Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Civil Industrial
IN-3171 – Modelamiento y Optimización

Auxiliar 5: Simplex II y pre-preparación C1

Degenerancia, Fase I y pregunta control

Profesores: Gonzalo Muñoz y Daniel Rossi
Auxiliares: Felipe Fierro, Felipe Hueitra, Anais Muñoz, Leonardo Navarro, Jimmy Pirul

Pregunta 1: Simplex en punto degenerado

Tenemos el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) **(Propuesto)** Grafique el conjunto e identifique las soluciones básicas factibles. ¿Cuál de ellas son degeneradas?

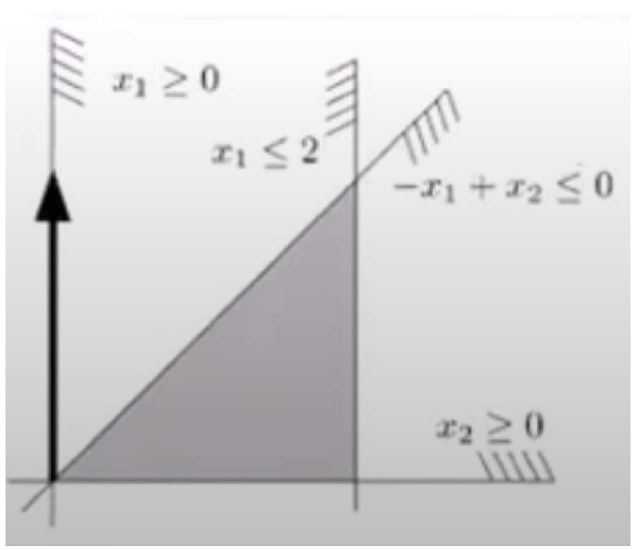

Figura 1: Conjunto parte a

b) Pase el problema a forma estandar.

c) Considere como variables básicas las variables de holguras asociadas a la primera y segunda restricción. Encuentre los costos reducidos.

d) Analice qué pasa si x_2 entra a la base y relacione lo obtenido con ciclar en un punto degenerado.

e) Ocupe la regla de Bland para resolver

f) **(Propuesto)** Es este nuevo punto obtenido óptimo?

g) Supongan el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Donde A $\in R^{2x4}$. ¿Cuál de los siguientes SBF son degeneradas?

- $(0, 1, 3, 0)$
- $(0, 0, 2, 2)$
- $(0, 0, 4, 0)$
- $(0, 0, 0, 0)$
- $(0, 5, 0, 0)$

Solución:

a) Tal cómo se ve en el gráfico, el conjunto queda de esa forma. Luego, podemos identificar tres vértices: $(0, 0), (2, 0), (2, 2)$, donde:

   - $(2, 0)$ y $(2, 0)$ son SBF no degeneradas, pues solo presentan dos restricciones activas.
   - $(0, 0)$ es una SBF degenerada, pues presenta tres restricciones activas.

   Recordemos que para que un punto sea degenerado en un problema de n dimensiones, debe poseer más de n restricciones activas (una restricción activa significa que al reemplazar en dicha restricción, queda una igualdad en vez de la desigualdad).

b) Incluyendo las variables de holgura para dejarlo en la forma estandar:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ & x_1 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

c) Considerando como variables básicas x_3 y x_4, y por consecuencia a x_1 y x_2 como variables no básicas, tendremos lo siguiente:

$$N = \{x_1, x_2\}, \quad B = \{x_3, x_4\}$$

Por lo que $x_1 = x_2 = 0$, pues son las variables no básicas, y $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, pues es lo que se obtiene al reemplazar en el problema. Quedando el siguiente punto de partida:

$$x^T = (0,0,0,2) \tag{1}$$

Además, las matrices y vectores costos quedarán de la siguiente forma:

$$B = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$c_B = (0,0), \quad c_N = (-2,-1) \tag{4}$$

Calculando los costos reducidos asociados a las variables no básicas, nos queda lo siguiente:

$$\bar{c_N}^T = (c_N^T - c_B^T B^{-1} N)$$

$$\bar{c_N}^T = (-2,-1) \tag{5}$$

d) Si x_2 entra a la base, notemos que no estaríamos usando la regla de Bland, por lo que nos estaríamos arriesgando a elegir una dirección que eventualmente lleve a un ciclamiento de base, es decir, luego de aplicar el algoritmo de Simplex, nuestra base eventualmente va a cambiar las variables que lo forman, pero el nuevo punto x_{nuevo} será el mismo que el antiguo (básicamente solo perderíamos tiempo).

Si x_2 entra a la base, la dirección de movimiento será la siguiente:

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Un cero en la posición asociada a x_1 pues no me interesa moverlo, un 1 en la posición de x_2 pues es precisamente la variable que entre a la base, y (d_1, d_2), las direcciones asociadas a las actuales variables básicas, calculándose con la fórmula:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = -B^{-1}(N)_{x_2}$$

Lo que es igual a:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = -I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quedando al final:

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Para calcular la condición de θ, nuevamente usaremos su fórmula asociada:

$$\theta = \min \left\{ \frac{-x_i}{d_i} : d_i < 0 \right\}$$

Y como solo tenemos un elemento $d_i < 0$, $\theta = \frac{-x_3}{d_3} = \frac{-0}{-1} = 0$.
Por lo que el punto nuevo queda:

$$x_{nuevo} = x_{antiguo} + \theta d = x_{antiguo} + 0d = x_{antiguo} \tag{7}$$

Pero con la nueva base y matriz no básica formada por las siguientes variables:

$$B = \{x_2, x_4\}$$

$$N = \{x_1, x_3\}$$

Conclusión: Como nos encontramos en un punto degenerado, el $(0, 0)$ en dos dimensiones y el $(0, 0, 0, 3)$ en cuatro dimensiones, sabíamos que existía cierto riesgo de ciclar nuestra base si no ocupábamos la regla de Bland, que fue precisamente lo que pasó en este caso.
Además, notar que la regla de Bland solo tiene poder e importancia en los puntos degenerados, en un punto no degenerado (por ejemplo si hubiésemos aplicado Simplex en el punto $(2, 0)$ o $(2, 2)$) no es necesario aplicar dicha regla, pues en un punto no degenerado no existe la posibilidad de ciclar la base.

e) Entonces, en vez de elegir el costo reducido de la forma anterior, ahora usemos la regla de Bland (dentro de los costos reducidos elegimos meter a la base la variable no básica asociada a la de menor índice), por lo tanto, en este caso entra x_1.

La dirección se calcula con la misma lógica que antes:

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = -B^{-1}(N)_{x_1}$$

Quedando al final:

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Calculando θ de la misma forma que antes:

$$\theta = \frac{-x_4}{d_4} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Por lo que el nuevo punto queda:

$$x^T_{nuevo} = (0,0,0,2) + 2(1,0,1,-1) = (2,0,2,0)$$

$$B = \{x_3, x_1\}, \quad N = \{x_4, x_2\}$$

Ojo: Notar que es literalmente un intercambio entre x_4 y x_1, no es necesario hacer posteriormente un reordenamiento (no es necesario hacer $B = \{x_1, x_3\}$, eso provocaría un desorden y posibles errores de arrastre a futuro).

f) **Propuesto:** Pero basta calcular los costos reducidos nuevamente (teniendo mucho ojo con los costos básicos y no básicos: respetar el orden de las variables en la base y la no base, y asignando correctamente los valores). Estos darán algún $(\bar{C_n})_i$ negativo, y por tanto no será óptimo.

g) La esencia de este problema, es notar que si dichos puntos son SBF y que tenemos dos restricciones (sin incluir las de no negatividad) y cuatro variables, cada SBF va a estar formada por dos variables básicas (debido a las dos restricciones) y dos variables no básicas (número variables - número restricciones).
Luego, si unas de estas SBF es degenerada, esta tendrá alguna variable básica igual a cero. Por lo que, si le sumamos a eso los ceros dados por las variables no básicas, tendremos 3 o más ceros en total.

- $(0,1,3,0) =$ No degenerado.

- $(0,0,2,2)$ = No degenerado.
- $(0,0,4,0)$ = Degenerado.
- $(0,0,0,0)$ = Degenerado.
- $(0,5,0,0)$ = Degenerado.

Pregunta 2: Simplex Fase I

Sabemos que para poder usar Simplex, primero que nada, necesitamos tener un punto de partida. Pero, ¿qué pasa cuando no lo tenemos? En esta pregunta veremos cómo Simplex fase I nos ayudará a resolver aquello. Y por sobre todo, nos ayudará a saber si un poliedro es factible.

$$\min -3x_1 + 4x_2 + x_3$$

s.a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 &\geq 18, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1,2,3. \end{aligned}$$

a) Determine la factibilidad del problema. Para ello, use Fase I siguiendo la siguiente ruta:

- Pase el problema a forma estandar.
- Plantee el problema auxiliar asociado a Fase I.
- Encuentre el óptimo del problema auxiliar y a partir de los resultados, concluya la factibilidad del problema original.
- Si eventualmente el problema original fuese factible, ¿qué puede concluir acerca del punto óptimo del problema auxiliar?

Solución:

Primero pasamos el problema a su forma estándar

Para ello, añadimos una variable de holgura a la segunda restricción para convertirla en una igualdad.

$$\min \; -3x_1 + 4x_2 + x_3$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_4 = 18$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4$$

Una vez está en forma estándar, pasémoslo a esta forma equivalente.

$$\min S_1 + S_2$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_4 + S_2 = 18$$

$$x_i \geq 0$$

Como partimos con la base de las variables del Simplex fase 1

$$B = \{S_1, S_2\}, \quad N = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Partimos del punto:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 4, 18)$$

1. **Costos reducidos**
   Simple recordatorio: En general, $\overline{C} = C - C_B B^{-1} A$, y como sabemos,

$$A = [B \,|\, N] \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{C_B} \\ \overline{C_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_B \\ C_N \end{pmatrix} - C_B^{-1} B^{-1} [B \,|\, N]$$

$$\Rightarrow \quad \overline{C}_B = C_B - C_B B^{-1} B = 0$$

$$\overline{C}_N = C_N - C_B B^{-1} N \quad \Rightarrow \text{ec. que conocemos.}$$

   Y como $C_B = 0$ siempre, es por eso que solo analizamos los costos reducidos no básicos.

   A partir del recordatorio anterior, en nuestro caso se tiene:

$$C_N = (0, 0, 0, 0)$$

$$C_B = (1, 1)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{C}_N = (-3, -2, -1, 1) \quad \Rightarrow \quad \text{Entró } x_1 \text{ a la base.}$$

2. Direcciones Recordemos nuevamente la fórmula:

$$d_B = -B^{-1}A_j \tag{9}$$

para nuestro caso

$$d = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$$

$$d = (1, 0, 0, 0, d_5, d_6)$$

Un 1 en la posición x_1, pues es la variable que va a entrar a la base.
necesitamos determinar d$_5$ y $d_6, conlafórmula(9), queeslamismafórmuladesiempre, peroconotranotac$

$$d = -B^{-1}N_1 = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Paso
Como $\exists\ d_B < 0,$ entonces calculamos el paso

$$\theta^* = \min\left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right\}$$

$$\theta^* = \min\left\{\frac{-4}{-1}, \frac{-18}{-2}\right\}$$

$$\theta^* = 4$$

Sale S_1 de la base, pues el θ elegido está asociado a esa variable básica.

4. Actualizar la base

$$X_{nuevo} = X_{antiguo} + \theta^* d$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Terminamos la primera iteración.
Veamos si el nuevo punto es óptimo, para ello, los datos son los siguientes:

$$B = \{x_1, s_2\}$$

$$N = \{s_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$C_B = (0, 1)$$

$$C_N = (1, 0, 0, 0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Recordatorio: Inversa matriz 2×2

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Tendremos entonces:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos costos reducidos:

$$\overline{C_N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{C_N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{C_N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{C_N} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como no tenemos costos reducidos negativos, estamos en el óptimo.

Conclusiones

Se tiene entonces que el óptimo del problema auxiliar será:

$$X = (4, 0, 0, 0, 0, 10)$$

Notamos que $S_2 = 10$, como hay una variable auxiliar $\neq 0 \;\Rightarrow$ el problema original no es factible.

Pregunta 3 - Costos reducidos (problema teórico)

Consideremos un problema lineal escrito en forma estándar:

$$\min c^T x; \quad x \in P_e := \{x : Ax = b, x \in \mathbb{R}^n_+\}, \quad (PL_e)$$

El objetivo es demostrar que, si los costos reducidos son positivos (i.e, $\overline{C_n} \geq 0$), entonces el punto extremo $\overline{x}$ es solución de (PL_e). Para ello,

a) Demuestre que el problema puede ser reescrito de la forma:

$$\min(c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N + c_B^T B^{-1} b$$

sujeto a

$$x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

$$x_N \geq 0, \quad x_B \geq 0$$

Indicación: Considere $A = [B \mid N]$, con B matriz de $m \times m$ invertible (base) y descomponga la variable de decisión $x = [x_B \mid x_N]$.

b) Concluya.

Indicación: Recuerde que en un punto extremo $\overline{x_N} = 0$.

Solución:

a) Sabemos que el problema lo podemos descomponer en una parte básica y no básica, es decir, puedo hacer los siguientes tres supuestos:

a) Para la matriz A que describe las restricciones,

$$A = [B \mid N], \quad \text{donde} \quad B = \text{matriz básica} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad N = \text{matriz no básica} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$$

Además, B debe ser invertible, es decir, sus columnas deben ser l.i.

b) Para todo $x \in P$ puedo descomponerlo en una parte básica y no básica:

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad X_B = \text{vector de v. básicas}, \quad X_N = \text{vector de v. no básicas}$$

$$X_B \in \mathbb{R}^{+m}, \quad X_N \in \mathbb{R}^{+(n-m)}$$

Positivos, pues si no, no serían factibles, debido a la forma que definimos el problema original.

c) Además, puedo hacer lo mismo para los costos:

$$C = \begin{pmatrix} C_B \\ C_N \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad C_B = \text{costos asociados a v. básicas}, \quad C_N = \text{costos asociados a v. no bási}$$

$$C_B \in \mathbb{R}^m, \quad C_N \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Ahora bien, reescribiendo el problema original,

$$\min \quad (C_B^T, C_N^T)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

$$\text{s.a.} \quad (B|N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b$$

$$X_B \geq 0, \quad X_N \geq 0$$

Luego aplicando álgebra de matrices:

$$\min \quad C_B^T X_B + C_N^T X_N$$

$$\text{s.a.} \quad BX_B + NX_N = b$$

$$X_B \geq 0, \quad X_N \geq 0$$

Aquí basta con multiplicar por B^-1 en la izquierda en cada termino, pues recordemos que construimos B de tal forma que su inversa existe:

$$\min \quad C_B^T X_B + C_N^T X_N$$

$$\text{s.a.} \quad X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$$

$$X_B \geq 0, \quad X_N \geq 0$$

Ya estamos casi listos, solo nos falta dejar la expresión de la función objetivo de la manera que queremos. Cómo en la expresión que nos piden en el enunciado no aparece ninguna expresión relacionada a x_b, tendremos que encontrar una expresión para quitarnos eso de encima. Entonces, usando la misma expresión que quedó para describir el conjunto, despejaremos x_b para luego reemplazarlo en la funcion objetivo.

$$X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$$

Nos queda:

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

Reemplazándolo en la Fobj:

$$\min \quad C_B^T X_B + C_N^T X_N$$

Nos queda:

$$\min \quad C_B^T(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N^T X_N$$

Finalmente, reordenando términos factorizando por x_n:

$$\min(c_N^T - c_B^T B^{-1} N)x_N + c_B^T B^{-1} b$$

Obteniendo así la forma pedida:

$$\min(c_N^T - c_B^T B^{-1} N)x_N + c_B^T B^{-1} b$$

sujeto a

$$x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

$$x_N \geq 0, \quad x_B \geq 0$$

Donde aquella expresión larga que aparece acompañando al x_n la definimos como los costos reducidos asociados a las variables no básicas.

b) **Intución**: Lo que continua ahora consiste en demostrar que, si dicha expresión larga que aparecía naturalmente en las ecuaciones y que nosotros le pusimos el nombre de costos reducidos es mayor que cero, entonces nos encontramos en el óptimo. ¿Y cómo sabemos si estamos en el óptimo? dado que el problema es de minimización, queremos llegar a una expresión del estilo:

$$c^T x \geq c^T \bar{x}, \quad \forall x \in P$$

Entonces, primero analicemos la naturaleza del punto extremo (la SBF) asociada a dicha base que elegimos al principio del problema:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$$

Si bien es un punto que vive en la frontera del conjunto P, sigue siendo factible, por lo que cumple la restricción que define el problema:

$$\bar{x}_B = B^{-1} b - B^{-1} N \bar{x}_N \tag{10}$$

Pero sabemos que

$$\bar{x}_n = 0 \quad x_n, 0 \in R^{(n-m)} \tag{11}$$

Porque $\bar{x}$ es una SBF.

Recuerdo: En general, para cualquier $\bar{x}$ que es una SBF, implica que necesitamos n restricciones L.I activas. Si el problema está en n dimensiones y tengo solo m restricciones, es decir $A \in R^{mxn}$ y $m \leq n$, al imponer la igualdad en esas m restricciones, estaría cumpliendo m restricciones l.i de forma activa, y las $(n-m)$ restantes debo sacarlas de las restricciones del estilo $x_i \geq 0$, pues no tengo de dónde más hacerlo. Quedando entonces $(n-m)$ restricciones $x_i = 0$. De ahí nacen las variables no básicas que sabemos que son siempre igual a cero.

Reemplazando (10) en (9), nos queda la expresión para $\bar{x}_B$:

$$\bar{x}_B = B^{-1}b \tag{12}$$

Por lo que, al evaluarlo en la función objetivo:

$$c^T\bar{x}$$

$$(c_N^T - c_B^T B^{-1}N)\bar{x}_N + c_B^T B^{-1}b$$

Nos queda simplemente:

$$c_B^T B^{-1}b$$

Y ya para finalizar, veámos que pasa para un x arbitrario ssi $\bar{c_n}^T \geq 0$:

$$\begin{aligned} C^T x &= (C_N^T - C_B^T B^{-1}N)X_N + C_B^T B^{-1}b \\ &= \bar{C}_N^T X_N + C_B^T B^{-1}b \end{aligned} \tag{4}$$

Luego como los costos reducidos asociados a las variables no básicas son positivos, $x_n \geq 0$ porque es factible, podemos acotar:

$$C^T x = (C_N^T - C_B^T B^{-1}N)X_N + C_B^T B^{-1}b \geq C_B^T B^{-1}b$$

Y reemplazando lo encontrado en (3):

$$C^T x = (C_N^T - C_B^T B^{-1}N)X_N + C_B^T B^{-1}b \geq C_B^T \bar{x}_b = C^T\bar{x}$$

Quedándo demostrado que, ssi el vector de costos reducidos asociados a las variables no básicas de $\bar{x}$ es positivo, entonces dicho punto es óptimo, pues su valor es menor o igual para todo x perteneciente a P.

Pregunta 4: Control C1 2024-2

Sea $b_1 \geq 0$ y $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente problema en forma estándar

$$\begin{array}{rrrrrl} \min & -x_1 & -x_2 & +c_3x_3 & +c_4x_4 & \\ \text{s.a} & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = b_1 \\ & -x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

1. **(1 pto)** Considere que las variables $\{x_1, x_2\}$ son variables básicas. ¿Qué condición debe satisfacer b_1 para que la solución correspondiente sea una solución básica factible?

2. **(1 pto)** Partiendo de esta SBF, encuentre las direcciones a las dos SBF adjacentes d^3 y d^4.
3. **(1 pto)** Encuentre valores de c_3 y c_4 que hacen que la SBF actual sea óptima o explique por que no es posible.
4. **(1 pto)** Encuentre valores de c_3 y c_4 que hacen que el problema sea no acotado o explique por que no es posible.
5. **(2 ptos)** Encuentre valores de c_3 y c_4 que hacen que el método Simplex realice una iteración y llegue a una SBF mejor que la actual. Realice la iteración.

Solución:

1. **(1 pto)** Considere que las variables $\{x_1, x_2\}$ son variables básicas. ¿Qué condición debe satisfacer b_1 para que la solución correspondiente sea una solución básica factible?

   Solución:

   Para obtener las soluciones básicas usamos $A_B^{-1}b = x_B$, entonces anotando los datos tenemos

   $x_B = \{x_1, x_2\}$ las variables básicas.

   $x_j = \{x_3, x_4\}$ las variables no básicas.

   $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz que corresponde a los coeficientes de las variables en las restricciones.

   $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ las columnas de la matriz A asociadas a las variables básicas.

   $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la inversa de A_B.

   $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 3 \end{pmatrix}$ el vector correspondiente al lado derecho de las restricciones.

   Ahora calculando las variables básicas tenemos

   $$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   Resolviendo la multiplicación de matrices tenemos que

   $$x_1 = -2b_1 + 3 \tag{1}$$

$$x_2 = -b_1 + 3 \tag{2}$$

Para que la solución sea una SBF entonces las variables básicas deben ser mayores o iguales que 0. Por lo tanto de (1) tenemos

$$-2b_1 + 3 \geq 0$$

$$b_1 \leq \frac{3}{2}$$

De (2) tenemos

$$-b_1 + 3 \geq 0$$

$$b_1 \leq 3$$

Finalmente $b_1 \in [0, \frac{3}{2}]$ para que la solución correspondiente sea SBF.

1 punto por encontrar la condición.

A partir de aquí en adelante se puede utilizar un valor de b_1 fijo que sea consistente con la condición encontrada

2. **(1 pto)** Partiendo de esta SBF, encuentre las direcciones a las dos SBF adjacentes d^3 y d^4.

   Solución:

   Las direcciones de las variables básicas a las dos SBF adyacentes se calculan como $d_B^3 = -A_B^{-1} A_3$ y $d_B^4 = -A_B^{-1} A_4$. Esto es

$$d_B^3 = -\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_B^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Como x_3 entra a la base entonces toma dirección $= 1$, mientras que x_4, como no entra a la base toma dirección $= 0$. De esta forma nos queda

$$d^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Análogamente, para d_B^4 tenemos

$$d_B^4 = -\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_B^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Como x_4 entra a la base entonces toma dirección $= 1$, mientras que x_3, como no entra a la base toma dirección $= 0$. De esta forma nos queda

$$d^4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.5 puntos por cada dirección.

3. **(1.5 ptos)** Encuentre valores de c_3 y c_4 que hacen que la SBF actual sea óptima o explique por que no es posible.

   Solución:

   Para que la solución actual sea óptima entonces los costos reducidos deben ser no negativos. Recordando que los costos reducidos se calculan como $\bar{c_j} = c_j - c_B A_B^{-1} A_j$, anotamos los datos que nos faltan

   $c = \begin{pmatrix} -1 & -1 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ el vector de costos.

   $c_B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$ el vector de costos asociado a las variables básicas.

   $c_j = \begin{pmatrix} c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ el vector de costos asociado a las variables no básicas.

   $A_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ las columnas de la matriz A asociadas a las variables no básicas.

   Luego los costos reducidos se calculan como

   $$\bar{c_j} = \begin{pmatrix} c_3 & c_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$\bar{c_j} = \begin{pmatrix} c_3 - 3 & c_4 + 2 \end{pmatrix}$$

   Imponiendo que cada componente de $\bar{c_j}$ sea no negativa, obtenemos

   $$c_3 - 3 \geq 0 \qquad\qquad c_4 + 2 \geq 0$$
   $$c_3 \geq 3 \qquad\qquad c_4 \geq -2$$

   Luego, si tomamos $c_3 = 3$ y $c_4 = 0$, entonces nuestra solución actual es óptima.

   1.3 puntos por encontrar costos reducidos.
   0.2 puntos por imponer que sean no negativos y concluir valores para c_3 y c_4.

4. **(0.5 ptos)** Encuentre valores de c_3 y c_4 que hacen que el problema sea no acotado o explique por que no es posible.

   Solución:

   Basta ver que el costo reducido sea negativo para la dirección que no tiene coordenadas negativas. Esto implica que la dirección se puede seguir para siempre y hacer el problema no acotado. Notemos que la dirección no negativa es d^3, por lo que el costo reducido asociado a c_3 debe ser negativo. Como ya calculamos costos reducidos en la parte anterior, solo necesitamos imponer restricciones sobre ellos.

$$c_3 - 3 < 0 \qquad\qquad c_4 + 2 \geq 0$$

$$c_3 < 3 \qquad\qquad c_4 \geq -2$$

Luego, si tomamos $c_3 = 0$ y $c_4 = 0$, entonces nuestro problema es no acotado.

0.3 puntos por mencionar la condición que se debe cumplir.
0.2 puntos por imponer la condición y concluir valores para c_3 y c_4.

5. **(2 ptos)** Encuentre valores de c_3 y c_4 que hacen que el método Simplex realice una iteración y llegue a una SBF mejor que la actual. Realice la iteración.

   Solución:

   Para que Simplex realice una iteración y llegue a una SBF mejor que la actual, entonces debe haber un costo reducido negativo. Tomando $c_3 = 3$ y $c_4 = -3$ entonces los costos reducidos quedan

   $$\bar{c_j} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \end{pmatrix}$$

   Como el costo reducido a x_4 es negativo, entonces x_4 entra a la base. Notemos que el vector de dirección cuando entra x_4 a la base fue calculado en la parte 2, por lo que solo falta calcular el paso, el cual se calcula como $\theta^* = \min\{\frac{-x_i}{d_i} \mid d_i < 0\}$. Entonces,

   $$\theta^* = \min\{\frac{2b_1 - 3}{-1}, \frac{b_1 - 3}{-1}\} = \min\{3 - 2b_1, 3 - b_1\}$$

   Como $b_1 \geq 0$, entonces

   $$\theta^* = 3 - 2b_1$$

   Para que θ^* sea positivo y el método de Simplex avance una cantidad positiva en una dirección que mejora la función objetivo, se necesita que $\theta^* = 3 - 2b_1 > 0$, que es equivalente a $b_1 < 3/2$ (la misma condición que hace al punto original SBF visto en P3.1). Luego, x_1 sale de la base. Nuestra nueva solución corresponde a $x' = x + \theta^* d^4$. Esto es,

   $$x' = \begin{pmatrix} -2b_1 + 3 & -b_1 + 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 - 2b_1 \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$x' = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 3 - 2b_1 \end{pmatrix}$$

   0.4 puntos por encontrar valores de c_3 y c_4 que hacen que Simplex haga una iteración.
   0.3 puntos por encontrar theta.
   1 punto por aplicar correctamente el método Simplex.
   0.3 puntos por encontrar una nueva solución mejor que la actual.

Resumen

- **Formas de elegir el punto de partida:** Cuando queremos resolver un problema con Simplex, el primer problema al que nos enfrentamos es elegir qué variables serán las básicas y las no básicas. En general, tendremos las siguientes situaciones para poder sobrellevar esto:

  1. El mismo enunciado nos dice qué variables elegir para partir.
  2. Por simplicidad, podemos elegir las variables que queramos, siempre y cuando se cumpla que las columnas de la base formada sean L.I y se cumplan las restricciones. Esto se hizo en el auxiliar pasado.
  3. Fase I: Manera más formal para llevar a cabo este proceso.

Fase I, apunte profesor Héctor Ramírez
Para el problema lineal escrito en su forma estándar:

$$\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}; \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0, \quad \text{(PL)}$$

donde A es una matriz sobreyectiva de m filas y n columnas, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, planteamos el siguiente problema auxiliar (introduciendo variables artificiales $\mathbf{x}^a = (x_{a1}, \ldots, x_{am})$):

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{ai}; \quad A\mathbf{x} + \mathbf{x}^a = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}^a \geq 0, \quad (\mathrm{PL}_{\mathrm{aux}})$$

Notemos que el problema (PL) es factible si y solo si el valor óptimo del problema auxiliar $(\mathrm{PL}_{\mathrm{aux}})$ es 0, obteniendo en este caso que $\mathbf{x}^a = 0$. Por lo tanto, resolveremos $(\mathrm{PL}_{\mathrm{aux}})$ usando el algoritmo Simplex, lo que da lugar a la Fase I del algoritmo de Simplex. Este procedimiento nos entrega además un punto extremo para (PL) en caso que este problema sea factible.

Clasificación por degeneración:
Sabemos que el algoritmo de Simplex consiste en ir saltando de un punto a otro punto que se considere igual o mejor (al evaluar en la función objetivo, sea menor si es que estamos minimizando; o que sea mayor si es que estamos maximizando). Una clasificación importante que existe para estos puntos es la siguiente:

- **Punto no degenerado:** todas las variables básicas son estrictamente positivas.
- **Punto degenerado:** cuando alguna variable básica es igual a cero.

La importancia de esta clasificación es que nos permite saber en que puntos exite el riesgo de que Simplex no funcione, es decir, que al momento de iterar, la base vaya cambiando pero el punto siga siendo el mismo (que cicle). ¿Y cómo se arregla esto? con la regla de Bland.

- **Regla de Bland:** Se utiliza para evitar ciclos en simplex. Solo es obligatoria de usar cuando nos encontramos en un punto degenerado.
  - Cuando calculamos costos reducidos $\bar{c_j}$ y tenemos que más de uno es menor a 0, entonces la variable que entra a la base es la de menor índice, **no** la de costos más negativos.
  - Cuando calculamos el paso θ^* y tenemos dos o más variables que entregan el mismo valor del cociente $\frac{-x_i}{d_i}$, entonces la variable que sale de la base es la de menor índice.