Auxiliar 1: Bienvenidos!

Modelamiento I y Gurobi

Profesores: Gonzalo Muñoz y Daniel Rossi
Auxiliares: Felipe Fierro, Felipe Hueitra, Anais Muñoz, Leonardo Navarro, Jimmy Pirul

Pregunta 1: Introducción

Una empresa productora de bombones de chocolate vende sus productos en dos versiones distintas, A y B. La versión A corresponde a una caja con 2 bombones grandes y 4 pequeños, mientras que la versión B va con 3 bombones grandes y 3 pequeños. La empresa cuenta con un total de 18 bombones grandes y 24 pequeños, y obtiene una utilidad de 8 y 7 unidades con cada versión vendida de A y B, respectivamente.

a) Formule el problema de optimización para maximizar las utilidades.

b) Escriba un programa en Python que le permita solucionar el problema en el caso planteado.

Solución:

a) Para estos problemas de modelamiento, es importante comenzar indentificando los parámetros del problema (los datos que son constantes y fijos), los conjuntos, las variables de decisión (las variables que pueden cambiar en función de optimizar el problema), las restricciones y la función objetivo.
A continuación le entregamos el problema planteado en dos formulaciones equivalentes.

Forma simple

Variables de decisión

- x_A: Cantidad de cajas de la versión A producidas.
- x_B: Cantidad de cajas de la versión B producidas.

$$\begin{aligned}
\max \quad & 8x_A + 7x_B \\
\text{s.a.} \quad & 2x_A + 3x_B \leq 18 \\
& 4x_A + 3x_B \leq 24 \\
& x_A, x_B \geq 0 \\
& x_A, x_B \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Forma General

Conjuntos y parámetros:

- C: Conjunto de versiones de cajas, en este caso C sólo tiene las versiones A y B.
- T: Conjunto de los tipos de bombones, en este caso T tiene los bombones grandes y pequeños.
- $d_{t,c}$: Cantidad de bombones del tipo t que puede tener la versión de caja c.
- u_c: Valor al que se vende la versión de caja c.
- s_t: Stock de bombones del tipo t.

Variables de decisión

- x_c: Cantidad de cajas c a producir.

Función objetivo:

$$\max \textstyle\sum_{c \in C} u_c \cdot x_c$$

Restricciones:

Máximo de tipo de bombón por caja

$$\textstyle\sum_{c \in C} d_{t,c} \cdot x_c \leq s_t \quad \forall t \in T$$

Naturaleza de las variables

$$\begin{aligned} x_c &\geq 0 \quad \forall c \in C \\ x_c &\in \mathbb{Z} \quad \forall c \in C \end{aligned}$$

b) Cápsula y colab :D

Pregunta 2: Minimizar costos

Una empresa fabricadora de triciclos futuristas cuenta con (n) instalaciones. Cada una de estas instalaciones (i) cuenta con una cantidad (C_i) de triciclos. La empresa debe trasladar sus triciclos a bodegas. Existen (m) bodegas y cada una tiene una demanda (Dj) de triciclos, es decir, debe llegar esa cantidad exacta. El costo de trasladar un triciclo de la instalación (i) a la bodega (j) es (Tij). La empresa puede decidir si abrir o no una instalación. Abrir cada instalación tiene un costo fijo (B_i). Si una instalación no está abierta, esta no puede trasladar ningún triciclo a ninguna bodega.

a) Formule el problema de optimización de minimizar los costes satisfaciendo toda la demanda.

b) Escriba un programa en Python que le permita solucionar el problema en un caso:

- $n = 5$
- $m = 4$
- $D_j \in [15, 25]\ \forall j$
- $C_i \in [15, 25]\ \forall i$
- $Bi \in [1000, 2000]\ \forall i$
- $Tij \in [2000, 5000]\ \forall (i, j)$

Solución:

a) Para estos problemas de modelamiento, es importante comenzar indentificando los parámetros del problema (los datos que son constantes y fijos), los conjuntos, las variables de decisión (las variables que pueden cambiar en función de optimizar el problema), las restricciones y la función objetivo.
Conjuntos

- I: Conjunto de instalaciones, donde $|I| = n$.
- J: Conjunto de bodegas, donde $|J| = m$.

Parámetros

- C_i: Cantidad de triciclos disponibles en la instalación i, $\forall i \in I$.
- D_j: Demanda de triciclos en la bodega j, $\forall j \in J$.
- T_{ij}: Costo de trasladar un triciclo desde la instalación i a la bodega j, $\forall i \in I, j \in J$.
- B_i: Costo fijo de abrir la instalación i, $\forall i \in I$.

Variables de decisión:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si decido abrir la instalación } i \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \text{Cantidad de triciclos transportados de la instalación } i \text{ a la bodega } j.$$

$$X_i \in \{0, 1\}; \quad Y_{ij} \in \mathbb{N}_0$$

Restricciones: Es importante considerar que las restricciones son las encargadas de definir matemáticamente a las variables de decisión. Entonces, el Python entenderá de que va una variable a partir de las restricciones que impogamos sobre esta. Por esto es tan importante definir correctamente las restricciones (y por supuesto para que el problema tenga sentido).

Satisfacer la demanda:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_{ij} = D_j \quad \forall j$$

Cantidad máxima a transportar:

$$\sum_{j=1}^{m} Y_{ij} \leq C_i \quad \forall i$$

Relación entre variables:

$$\sum_{j=1}^{m} Y_{ij} \leq M \cdot X_i \quad \forall i,\, M \gg 1$$

Función Objetivo:

$$\min \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot B_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Y_{ij} \cdot T_{ij}$$

b) Cápsula y colab :D

Resumen

- **Tip :D:** Los problemas de modelamiento son un area muy grande de estudio, sin embargo, ser ordenado puede optimizar el resultado. Por ejemplo, se podría seguir la siguiente metodología:
  - 1. Entender el problema y hacer un esquema. Definir conjuntos y parámetros.
  - 2. Crear las variables de decisión. Estas responden a la pregunta: "¿Qué decisión debo tomar?"
  - 3. Definir las restricciones.
  - 4. Definir la función objetivo.
  - 5. Volver al apartado de las restricciones, porque siempre se olvida alguna o se olvida poner la naturaleza de las variables.

Tips para restricciones (solo son válidas para variables que sean binarias):

- Si x es cierto, entonces y es cierto $\to x \leq y$.
- Exactamente una de las variables es 1. (Se debe escoger uno de n elementos) $\to \sum_i x_i = 1$.
- A lo más una de las variables es 1. (Se debe escoger a lo más uno de n elementos) $\to \sum_i x_i \leq 1$.
- A lo menos una de las variables es 1. (Se debe escoger a lo menos uno de n elementos) $\to \sum_i x_i \geq 1$.
- x es cierto si solo si y es falso $\to x = 1 - y$.
- x es cierto si solo si y es cierto $\to x = y$.
- 2 situaciones suceden de forma simultánea o no suceden $\to x_i - x_j = 0$.
- x es cierto si solo si y, z son ambos ciertos $\to x \leq y, \quad x \leq z, \quad x + 1 \geq y + z$.
- x es cierto si solo si y o z es cierto $\to x \geq y, \quad x \geq z, \quad x \leq y + z$.