

Apuntes de la Escuela de Ingeniería

IND3701 Optimización

Dr. Gonzalo Muñoz

Dr. Victor Verdugo

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

Aclaraciones sobre el apunte y agradecimientos

Se concede permiso para imprimir o almacenar copias de este documento a cualquier integrante de la Universidad de O'Higgins. Salvo por las excepciones más abajo señaladas, este permiso no autoriza fotocopiar o reproducir copias para otro uso que no sea el personal, o distribuir o dar acceso a copias electrónicas de este documento sin permiso previo por escrito del Director de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de O'Higgins.

Las excepciones al permiso por escrito del párrafo anterior son:

1. Las copias electrónicas disponibles en ucampus.uoh.cl,
2. Las copias distribuidas por el cuerpo docente de Universidad de O'Higgins en el ejercicio de las funciones que le son propias.

Cualquier reproducción parcial de este documento debe hacer referencia a su fuente de origen. Este documento fue realizado como material complementario a las cátedras del curso de Optimización IND3701 de la Universidad de O'Higgins, sin financiamiento particular ni fines de lucro.

La mayor parte del contenido está basado en el libro *Introduction to linear optimization* de Bertsimas y Tsitsiklis. Algunos ejemplos han sido tomados del libro *Convex Optimization* de Boyd y Vandenberghe y de los apuntes del curso de Optimización de la Universidad Adolfo Ibáñez y de la Universidad de Chile. La sección de programación entera también se basó parte en el libro *Integer Programming* de Conforti et al.

Índice general

1. Introducción	6
1.1. ¿Qué significa optimizar?	6
1.2. Cómo se ve un modelo de optimización	7
1.2.1. Algunas observaciones	8
1.3. Clasificación de problemas de optimización	9
2. Modelamiento	11
2.1. Modelos básicos	11
2.1.1. El problema de la mochila	11
2.1.2. Un problema de <i>covering</i>	12
2.1.3. Programación de tareas en máquinas paralelas	12
2.1.4. Regresión lineal	14
2.1.5. Un problema de manufactura	15
2.2. Modelos basados en grafos	16
2.2.1. Repaso de grafos	16
2.2.2. Flujo máximo	18
2.2.3. Flujo a costo mínimo	19
2.2.4. Camino a costo mínimo	20
2.2.5. Problema de asignación	21
2.2.6. Vertex cover	22
2.3. Ejercicios	23
3. Programación lineal	29
3.1. Introducción	29
3.1.1. Problemas equivalentes y reformulaciones	29
3.1.2. Representación gráfica de problemas en dos dimensiones	32
3.2. Geometría de programación lineal	34
3.2.1. Poliedros	34
3.2.2. Vértices, puntos extremos, y soluciones básicas	36
3.2.3. Optimalidad se alcanza en puntos extremos.	41
3.3. Algoritmo Simplex	43
3.3.1. Soluciones básicas y problemas en forma estándar	43
3.3.2. Diccionarios	47
3.3.3. Direcciones básicas	49
3.3.4. Condiciones de optimalidad	52
3.3.5. Ejecución del algoritmo Simplex: caso no-degenerado	53
3.4. Ejercicios	56
4. Dualidad en Programación Lineal	61
4.1. Introducción	61

4.1.1.	Par Primal-Dual	62
4.2.	Dual de un PL general	63
4.2.1.	Dualidad débil y sus consecuencias	63
4.2.2.	Dualidad fuerte y holgura complementaria	64
4.2.3.	Variables duales como costos marginales.	66
4.2.4.	Certificar Infactibilidad: Lema de Farkas	66
4.3.	Aplicación: Juegos de Suma Cero	67
4.4.	Otro enfoque: Dualidad Lagrangeana	68
4.5.	Ejercicios	69
5.	Programación Lineal Entera	72
5.1.	Modelamiento avanzado con variables binarias	72
5.1.1.	Cargos fijos: formulaciones Big-M	72
5.1.2.	Disyunciones	73
5.1.3.	Implicancias	74
5.2.	Dificultades al resolver un problema entero	76
5.2.1.	Redondear no siempre funciona	77
5.2.2.	¿Por qué no probar todas las combinaciones?	78
5.3.	Métodos de resolución	79
5.3.1.	Relajaciones lineales y acotamiento	79
5.3.2.	Branch & Bound	80
5.3.3.	Planos cortantes	84
5.3.4.	Cortes de Gomory	87
5.4.	Ejercicios	88
6.	Optimización No-Lineal	93
6.1.	Conceptos matemáticos básicos	93
6.1.1.	Nociones topológicas	93
6.1.2.	Continuidad y diferenciabilidad	95
6.1.3.	Aproximaciones de Taylor	97
6.2.	Optimización sin restricciones	98
6.2.1.	Mínimos locales: condiciones necesarias	99
6.2.2.	Mínimos locales: condiciones suficientes	101
6.2.3.	Mínimos globales y funciones convexas	101
6.2.4.	Algoritmos de descenso	105
6.2.5.	Tasas de convergencia	108
6.3.	Optimización con restricciones	110
6.3.1.	Definiciones básicas	110
6.3.2.	Conjuntos Convexos	111
6.3.3.	Funciones convexas sobre un conjunto convexo	113
6.3.4.	Condiciones de optimalidad en optimización con restricciones.	114
6.3.5.	Algoritmos de descenso en el caso con restricciones	115
6.4.	Ejercicios	116
7.	Dualidad Lagrangeana	119
7.1.	Dual Lagrangeano	120
7.2.	Dualidad Fuerte	122
7.2.1.	Condiciones de Slater	122
7.2.2.	Interpretación de los multiplicadores y del problema dual	123
7.3.	Condiciones de KKT	124
7.3.1.	Holgura complementaria	124
7.3.2.	Condiciones de KKT necesarias	125

7.3.3. Condiciones suficientes	126
7.3.4. Interpretación mecánica para los multiplicadores de Lagrange	128
7.4. Análisis de Sensibilidad	129
7.5. Ejercicios	130

Introducción

1.1 ¿Qué significa optimizar?

La *optimización* se ocupa de encontrar la *mejor decisión*, dentro de un conjunto de *decisiones posibles*. A qué nos referimos con “lo mejor” y cuales son las “decisiones posibles” dependerá de la aplicación.

Ejemplo 1. *Supongamos que nos enfrentamos al problema de encontrar el camino más corto desde Rengo a Rancagua.*

¿Cuales son las decisiones posibles? Cualquier camino desde Rengo a Rancagua es una decisión posible. Un camino podría irse por la carretera, otro podría pasar por Coya. Siempre que el camino parta en Rengo y termine en Rancagua, será un camino aceptado.

¿Qué es “lo mejor” en este caso? En este caso es claro: mientras más corto el camino, mejor. Un camino que parte en Rengo, pasa por Coya, y termina en Rancagua, es un camino posible, pero claramente no es óptimo.

Los problemas de optimización aparecen en muchas aplicaciones, como veremos en este curso. Frente a un problema de decisión real, normalmente se sigue el siguiente diagrama para resolverlo.



En este curso se verán técnicas para modelar problemas reales como modelos matemático de optimización, algoritmos para resolver estos modelos y cómo interpretar los resultados. Si bien los métodos de solución se aplican una vez que los modelos ya han sido creados, es importante conocer de antemano los métodos disponibles. En este curso veremos que algunos modelos aparentemente simples pueden ser muy difíciles de resolver. Siempre existe un trade-off entre qué tan realista es un modelo y qué tan eficientemente se puede resolver.

Ejemplo 2. *El conocido problema de la mochila es un problema clásico y muy útil. Supongamos que tenemos una mochila y objetos que queremos llevar en ella, pero la mochila es pequeña y no caben todos. ¿Cómo decidir qué elementos llevar? Supongamos que le hemos asignado un valor a cada objeto.*

*Esto también es un problema de optimización: nuestras decisiones posibles son cualquier conjunto de objetos que **quepa en la mochila**. ¿Cuál es lo mejor? Mientras los objetos en la mochila sumen **más valor, mejor**.*

El problema anterior parece artificial, pero decisiones de ese tipo se toman todo el tiempo. Por ejemplo, una empresa quizás puede producir muchos tipos de productos, pero tiene una capacidad de producción limitada. En este caso “la mochila” sería la capacidad de la empresa.

Otros ejemplos aplicados incluyen:

- **Minería.** Decidir qué secuencia seguir para excavar una mina, decidir cómo planificar trenes, entre otros.

- **Energía.** Decidir cuánto generar en plantas eléctricas para satisfacer demanda, cómo operar energía almacenada, entre otros.
- **Deporte.** Diseño del torneo de fútbol nacional¹, diseño de equipos.
- **Planificación.** Cómo asignar trabajadores (enfermeros/as a turnos, tripulantes a vuelos), trabajos a máquinas, entre otros.
- **Logística.** Decidir la manera en que una flota de vehículos realiza la distribución de productos.
- **Gestión.** Decidir precios para pasajes aéreos.

1.2 Cómo se ve un modelo de optimización

Como mencionamos anteriormente, un problema de optimización tiene dos componentes principales: un conjunto de “decisiones posibles” y un concepto de “mejor”. Formalicemos estas dos componentes.

Primero, supondremos que nuestras decisiones están codificadas como un vector variable $x \in \mathbb{R}^n$, y que el conjunto de decisiones posibles es $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Al vector x se le conoce como *variables de decisión* y a Ω se le llama *conjunto factible*. En el Ejemplo 1, x puede representar las calles que toma un camino Rengo-Rancagua y Ω sería el conjunto de *todos* los caminos que parten en Rengo y terminan en Rancagua.

Ejemplo 3. Una empresa productora de bombones de chocolate vende sus productos en dos versiones distintas, A y B. La versión A corresponde a una caja con 2 bombones grandes y 4 pequeños, mientras que la versión B va con 3 bombones grandes y 3 pequeños. La empresa cuenta con un total de 18 bombones grandes y 24 pequeños.

Describamos todas las maneras posibles que tiene la empresa de empaquetar sus productos. Llamemos x_A y x_B al número de cajas de tipo A y B, respectivamente, que se busca producir. Cualquier valor que le demos a x_A y x_B debe cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} 2x_A + 3x_B &\leq 18, \\ 4x_A + 3x_B &\leq 24 \end{aligned}$$

pues no podemos sobrepasar la capacidad de bombones grandes y pequeños que tiene la empresa. Además, no podemos producir fracciones de caja, por lo que además nuestras decisiones deben satisfacer que

$$x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+,$$

donde $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap [0, +\infty)$ son los números enteros positivos. Por lo tanto, en este caso tenemos que

$$\Omega = \{(x_A, x_B) : 2x_A + 3x_B \leq 18, 4x_A + 3x_B \leq 24, x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+\}$$

describe todas las decisiones posibles que tenemos para empaquetar los bombones.

En el ejemplo anterior, a cada una de las expresiones

$$\begin{aligned} 2x_A + 3x_B &\leq 18, \\ 4x_A + 3x_B &\leq 24 \\ x_A, x_B &\in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

se les llama *restricciones* y a cada punto (x_A, x_B) que las cumple se le conoce como *punto factible*.

¹<https://www.youtube.com/watch?v=aqcy0VNuT8I>

Segundo, dada una decisión x asumimos que existe una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que mide qué tan buena es la decisión x . La función f se puede ver como una medida de calidad de la decisión y se conoce como *función objetivo*. En caso que un valor alto de $f(x)$ es mejor (por ejemplo, si f es una utilidad) entonces buscamos *maximizar* f . Por el contrario, si un valor bajo de $f(x)$ es mejor (por ejemplo, si f representa costos), entonces buscamos *minimizar* f .

Ejemplo 4. (Continuación Ejemplo 3) Supongamos que la empresa de bombones obtiene una utilidad de 8 y 7 unidades con las versiones A y B, respectivamente. En este caso la función de performance dada por la utilidad total es

$$f(x_A, x_B) = 8x_A + 7x_B.$$

Si decidieramos producir 2 unidades de A y 1 unidad de B, entonces la utilidad es de $f(2, 1) = 23$. Si por otro lado decidieramos producir 1 unidad de A y 2 unidades de B, entonces la utilidad es de $f(1, 2) = 22$, por lo tanto la decisión $(x_A, x_B) = (2, 1)$ es mejor que $(x_A, x_B) = (1, 2)$.

En este caso, el problema de optimización se escribe como:

$$\text{máx} \quad 8x_A + 7x_B \tag{1.1a}$$

$$\text{sujeto a:} \quad 2x_A + 3x_B \leq 18, \tag{1.1b}$$

$$4x_A + 3x_B \leq 24 \tag{1.1c}$$

$$x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+ \tag{1.1d}$$

y su interpretación es: “encontrar x_A, x_B que cumpla las restricciones (3.2b), (3.2c) y (1.1d), y que tenga el valor de (3.2a) lo más alto posible”.

En general escribimos un problema de optimización como

$$\text{mín} \quad f(x)$$

$$\text{sujeto a:} \quad x \in \Omega,$$

en caso que queramos minimizar el valor de $f(x)$, y

$$\text{máx} \quad f(x)$$

$$\text{sujeto a:} \quad x \in \Omega,$$

en caso que queramos maximizar el valor de $f(x)$. En general asumiremos que Ω lo podemos describir con fórmulas, es decir

$$\Omega = \{x \in \mathcal{D} : g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0\}$$

para ciertas funciones $g_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ donde \mathcal{D} es el *dominio* de las funciones (\mathcal{D} puede ser, por ejemplo \mathbb{R}^n , \mathbb{Z}^n , entre otros). Si queremos minimizar f , entonces podemos escribir el problema de optimización como

$$\text{mín} \quad f(x)$$

$$\text{sujeto a:} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x \in \mathcal{D}.$$

1.2.1. Algunas observaciones

En general no haremos mucha diferencia entre *maximización* y *minimización*, y para simplificar las discusiones la mayor parte del tiempo hablaremos solo de problemas de *minimización*. Esto se puede hacer pues

$$\text{máx}\{f(x) : x \in \Omega\} = -\text{mín}\{-f(x) : x \in \Omega\},$$

es decir, maximizar f es equivalente a minimizar $-f$.

Además, cabe destacar que tampoco perdemos generalidad en asumir que las restricciones son todas de la forma

$$g_i(x) \leq 0.$$

Esto pues si tuvieramos una restricción del tipo $g_i(x) \geq 0$, entonces podemos reescribirla como

$$g_i(x) \geq 0 \iff -g_i(x) \leq 0,$$

por lo que bastaría trabajar con $-g_i$. Restricciones con igualdad también están modeladas por la forma anterior, pues

$$g_i(x) = 0 \iff g_i(x) \leq 0 \wedge -g_i(x) \leq 0.$$

1.3 Clasificación de problemas de optimización

Dependiendo de la naturaleza de las funciones f , g_i y el dominio \mathcal{D} , podemos clasificar los problemas de optimización usando las siguientes categorías.

Con o sin restricciones. Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ (es decir, si el dominio de las funciones son todos los vectores con componentes reales) y si $m = 0$ (es decir, si no existe restricción alguna) entonces el problema de optimización es *sin restricciones*. En este caso un problema de optimización se ve simplemente como

$$\text{mín } \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

En cualquier otro caso el problema es *con restricciones*

Lineal o no-lineal. Si las funciones f y g_i son lineales afín, es decir si tienen la forma

$$f(x) = c^\top x - d$$

$$g_i(x) = a_i^\top x - b_i$$

entonces decimos que el problema es *lineal*. Notar que siempre podemos asumir que $d = 0$ para resolver el problema de optimización, pues añadir una constante que no depende de la decisión x no tiene efecto al elegir "la mejor". Un problema lineal, entonces, tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\text{mín } c^\top x \\ &\text{sujeto a: } a_i^\top x - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &x \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

En cualquier otro caso decimos que el problema es *no-lineal*.

Contínuo, entero o mixto. Típicamente los dominios \mathcal{D} que consideraremos serán del tipo

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0 \quad j \in N, x_i \in \mathbb{Z} \quad i \in I \right\}.$$

Es decir, el dominio requerirá que ciertas variables (indexadas por N) sean no-negativas, y que otras variables (indexadas por I) sean números enteros. En el Ejemplo 3 podemos escribir

$$\mathcal{D} = \left\{ (x_A, x_B) \in \mathbb{R}^2 : x_i \geq 0 \quad i \in \{A, B\}, x_i \in \mathbb{Z} \quad i \in \{A, B\} \right\}.$$

Si $I = \emptyset$, es decir, si no se requiere que ninguna variable sea un número entero, entonces decimos que el problema es *contínuo*. Si $I = \{1, \dots, n\}$, es decir, si requerimos que *todas* las variables sean

números enteros, entonces decimos que el problema es *entero*. Por último, si $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ y $I \neq \emptyset$, es decir, si requerimos que solo algunas variables sean enteras, entonces decimos que el problema es *mixto*.

El problema de optimización (1.1) es un problema *con restricciones, lineal y entero*. Si permitiéramos producir fracciones de las cajas tipo A , entonces el modelo cambiaría a

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 8x_A + 7x_B \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_A + 3x_B \leq 18, \\ & 4x_A + 3x_B \leq 24 \\ & x_A \geq 0 \\ & x_B \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

el cual es un problema *con restricciones, lineal y mixto*. Por último, si agregamos un costo de distribución de $\log(x)$ cuando se produce un total de x unidades, entonces el modelo cambiaría a

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 8x_A + 7x_B - \log(x_A + x_B) \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_A + 3x_B \leq 18, \\ & 4x_A + 3x_B \leq 24 \\ & x_A \geq 0 \\ & x_B \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

el cual es un problema *con restricciones, no-lineal y mixto*.

Estas son las clasificaciones más básicas de problemas de optimización. Más adelante veremos una clasificación extra: *convexo o no-convexo*. Para una lista más completa de tipos de problema de optimización ver <https://neos-guide.org/content/optimization-taxonomy>.

Modelamiento

Representar un problema usando un modelo de optimización puede ser una tarea compleja. ¿Qué variables usar? ¿Como escribir fórmulas representando las restricciones o la función objetivo? Estas son preguntas cuyas respuestas varían mucho dependiendo de la aplicación.

En este capítulo mostraremos una serie de problemas clásicos y sus modelos de optimización para familiarizar al lector con técnicas de modelamiento comunes. Estos modelos se pueden moldear y combinar para lograr representar una gran cantidad de problemas aplicados.

2.1 Modelos básicos

2.1.1. El problema de la mochila

Volvamos al problema descrito en el Ejemplo 2. Se tiene una mochila que puede llevar un peso máximo C y un conjunto de N objetos que queremos llevar en la mochila. Cada objeto $i \in \{1, \dots, N\}$ tiene un peso w_i y un valor u_i . Nos gustaría determinar el subconjunto de objetos $F \subseteq \{1, \dots, N\}$ que maximiza la utilidad, pero a la vez no sobrecarga la mochila.

Para modelar este problema, primero nos preguntamos ¿qué decisión debo tomar? Esto servirá para determinar las variables a utilizar. En este caso, para cada elemento $i \in N$ debemos decidir si llevarlo o no en la mochila. Por lo tanto, por cada objeto i tendremos una variable *binaria* x_i con la siguiente interpretación:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si llevamos el objeto } i, \\ 0 & \text{si no llevamos el objeto } i. \end{cases}$$

Por ejemplo, el vector $x = (1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ representaría “llevamos el objeto 1 y 2 en la mochila”.

Usando estas variables, dado un vector $x \in \{0, 1\}^N$ (es decir, un vector con ceros y unos), ¿cuál es el peso de los objetos en la mochila? En este caso debemos sumar w_i para los elementos tales que $x_i = 1$. Esto se puede hacer con la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=1}^N w_i x_i$$

Como debemos restringir los elementos en la mochila de manera que no pesen más de C , tenemos la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^N w_i x_i \leq C.$$

Similarmente, la utilidad de los elementos que llevamos en la mochila está dado por

$$\sum_{i=1}^N u_i x_i.$$

De esta forma, el problema a resolver es

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{i=1}^N u_i x_i \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{i=1}^N w_i x_i \leq C, \\ & x \in \{0, 1\}^N. \end{aligned}$$

Como comentamos anteriormente, este problema es de gran aplicabilidad. Por ejemplo, C puede representar la capacidad de producción de una empresa y x_i puede determinar si producir o no cierto producto.

2.1.2. Un problema de *covering*

Supongamos que tenemos una situación similar a la del problema de la mochila, pero ahora en vez de interesarnos llevar el mayor valor posible sujeto a la capacidad C , deseamos llevar el *menor peso posible* que nos garantice llevar una utilidad de al menos U .

Usando las mismas variables que en el problema anterior, podemos modelar este problema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^N w_i x_i \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{i=1}^N u_i x_i \geq U, \\ & x \in \{0, 1\}^N. \end{aligned}$$

Si bien este problema es similar al problema de la mochila, sus soluciones pueden ser muy distintas. Este problema es *lineal y entero*, y pertenece a una clase de problemas llamados *problemas de covering*. En la Sección 2.2.6 veremos otro problema que cae en esta categoría.

2.1.3. Programación de tareas en máquinas paralelas

Supongamos que tenemos un conjunto M de computadores y un conjunto de tareas J . Cada uno de estos computadores puede procesar cualquiera de las tareas. Si la tarea $j \in J$ es procesada en el computador $i \in M$ requiere p_{ij} unidades de tiempo para completarse. Nos gustaría asignar todas las tareas a computadores de manera de minimizar el promedio de tiempo que los computadores estén ocupados.

Para modelar este problema seguimos el mismo procedimiento anterior. Primero, identificamos que debemos decidir: en este caso debemos decidir si una tarea j se asigna o no a una máquina i . Esto

indica que debemos definir las siguientes variables de decisión:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la tarea } j \text{ es realizada en el computador } i, \\ 0 & \text{si la tarea } j \text{ no es realizada en el computador } i. \end{cases}$$

Usando estas variables, podemos escribir directamente el tiempo que toma para un computador i completar los trabajos que se le asignan. En efecto, este es simplemente

$$\sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij},$$

pues solo se sumarán los términos p_{ij} cuando $x_{ij} = 1$. Con esto, el tiempo promedio que los computadores estarán ocupados es

$$\frac{1}{|M|} \sum_{i \in M} \sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij}.$$

Aparentemente no hay restricciones explícitas en las asignaciones. Los computadores no tienen capacidad máxima, por ejemplo. Sin embargo si hay una restricción, y es que *todas* las tareas deben ser completadas. Por lo tanto, debemos asegurarnos que, para cada $j \in J$ algún valor x_{ij} sea 1. Esto lo podemos lograr con la siguiente restricción:

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1.$$

Luego, el problema a resolver corresponde a

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{|M|} \sum_{i \in M} \sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{i \in M} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in J, \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J, i \in M. \end{aligned}$$

Este es un problema lineal y entero.

Veamos ahora una variante más compleja de este problema. Supongamos que ahora buscamos minimizar el tiempo en que finaliza *el último de los computadores*. Para modelar esta variante consideramos las mismas variables de decisión, sin embargo la función objetivo cambia a

$$\text{máx}_{i \in M} \sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij}$$

Es decir, la función objetivo es el tiempo máximo que está ocupado un computador. Con esta modificación, el problema a resolver corresponde a

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \text{máx}_{i \in M} \sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{i \in M} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in J, \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J, i \in M. \end{aligned}$$

Hasta acá, este problema puede ser considerado como *no-lineal*, pues la función objetivo no es lineal. Sin embargo, podemos construir una formulación lineal agregando una variable auxiliar T

que represente el objetivo:

$$\begin{aligned} & \text{mín } T \\ \text{sujeto a: } & \sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij} \leq T, \quad \forall i \in M, \\ & \sum_{i \in M} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in J, \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J, i \in M. \end{aligned}$$

¿Por qué esto es correcto? Como estamos minimizando la variable T , ella tomará el valor más bajo posible. La restricción

$$\sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij} \leq T \quad \forall i \in M,$$

asegura que el valor más pequeño que la variable T puede tomar es exactamente

$$\text{máx}_{i \in M} \sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij}.$$

Este truco se conoce como la reformulación de *epigrafo*, y lo volveremos a utilizar en algunos ejemplos.

2.1.4. Regresión lineal

Supongamos que tenemos una nube de m puntos $\mathcal{P} = \{(a_i, b_i)\}_{i \in [m]}$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Sabemos que b_i depende de a_i mediante una función: $f(a_i) = b_i$, pero no sabemos cual es esa función f .

Nos gustaría construir (o *aprender*) a través de los datos un modelo que, al observar un nuevo vector a prediga el valor de $f(a)$. Se propone un modelo de predicción lineal, es decir suponemos que la función f tiene la forma

$$f(a) = x^\top a$$

para algún x que no conocemos. ¿Cómo determinar x entonces? A partir de los datos que ya conocemos. Dado un punto $(a_i, b_i) \in \mathcal{P}$, nuestra función lineal debería satisfacer $b_i = x^\top a_i$, pero esto típicamente es difícil, e incluso indeseable pues las mediciones muchas veces tienen error. Por lo tanto, como podemos esperar que $b_i \neq x^\top a_i$, el error incurrido por el predictor corresponde a

$$|x^\top a_i - b_i|.$$

El objetivo es encontrar el predictor $x \in \mathbb{R}^n$ que minimiza el máximo error incurrido en \mathcal{P} . Esto lo podemos formular como el siguiente problema no-lineal, continuo sin restricciones:

$$\text{mín } \left\{ \text{máx}_{i \in [m]} |b_i - x^\top a_i| : x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Al igual que en el caso anterior, veremos que podemos construir un problema lineal equivalente. Para ello introducimos una nueva variable, z , y consideramos el siguiente model,

$$\begin{aligned} & \text{mín } z && (2.1a) \\ \text{sujeto a: } & -x^\top a_i + b_i \leq z, \quad \forall i \in [m], && (2.1b) \\ & x^\top a_i - b_i \leq z, \quad \forall i \in [m]. && (2.1c) \end{aligned}$$

Consideremos un punto óptimo (x, z) del problema (2.1). Probaremos que $z = \max_{i \in [m]} |x^\top a_i - b_i|$. De las restricciones del (2.1) y la definición de valor absoluto se desprende que $|x^\top a_i - b_i| \leq z$ para todo $i \in [m]$, es decir, $\max_{i \in [m]} |x^\top a_i - b_i| \leq z$. Sin embargo, como estamos minimizando, esta última desigualdad corresponde a una igualdad, pues $(x, \max_{i \in [m]} |x^\top a_i - b_i|)$ es un punto factible de (2.1).

Este tipo de problema pertenece a una clase más general de problema de ajustes de datos. Estos problemas se ven de la forma

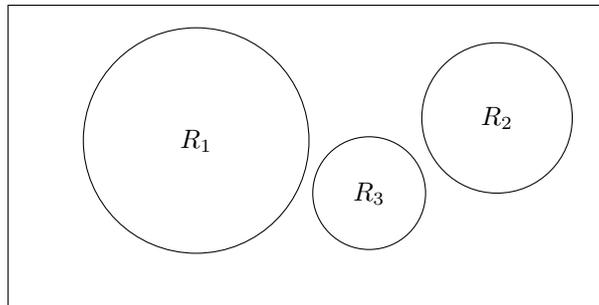
$$\min \left\{ \|Ax - b\| : x \in \mathbb{R}^n \right\},$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz de $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $\|\cdot\|$ es alguna norma en \mathbb{R}^m . En particular, el problema anterior corresponde a la versión con la norma $\|y\|_\infty := \max_{i \in [m]} |y_i|$.

Ejercicio 1. Estudie el problema cuando se considera la norma $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. En el primer caso considere una formulación extendida como la mostrada para el caso $\|\cdot\|_\infty$, y para la norma $\|\cdot\|_2$ observe que es equivalente minimizar el cuadrado de esta en \mathbb{R}^m .

2.1.5. Un problema de manufactura

Una fábrica necesita perforar 3 círculos de radios R_1, R_2 y R_3 en una plancha rectangular. Nos gustaría determinar el tamaño de la plancha de manera de minimizar la pérdida de material.



Como debemos determinar el tamaño de la plancha, queda claro que las dimensiones de ella deberían ser variables de decisión. Sean x_0 y y_0 las dimensiones de la plancha (por lo tanto deben ser no-negativos), y posicionamos un sistema de coordenadas cuyo origen está en la esquina inferior izquierda de la plancha.

Con estas variables podemos calcular inmediatamente la cantidad de material perdido: es simplemente

$$x_0 y_0 - \pi(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2).$$

Aparentemente estas son todas las variables que necesitamos, en cuyo caso el problema sería:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_0 y_0 - \pi(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) \\ \text{sujeto a:} \quad & x_0, y_0 \geq 0, \end{aligned}$$

Sin embargo, si miramos este modelo podemos ver que su óptimo se alcanza en $x_0 = y_0 = 0$, lo cual no tiene sentido! Esto pasó pues hay ciertas restricciones implícitas: las dimensiones de la plancha deben permitir efectivamente perforar los 3 círculos. Y para poder asegurarnos que esto pase, debemos agregar más variables de decisión, asociadas a *cómo* se perforarán los círculos.

Añadimos las siguientes variables (x_i, y_i) para $i = 1, 2, 3$ representando las coordenadas del centro del círculo en la plancha. Estas variables deben satisfacer los siguientes requerimientos:

- Los círculos deben estar dentro de la plancha. Esto lo aseguramos imponiendo que

$$R_i \leq x_i \leq x_0 - R_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$R_i \leq y_i \leq y_0 - R_i \quad i = 1, 2, 3.$$

- Los círculos no se pueden intersectar. Esto lo aseguramos imponiendo que

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_2 \geq R_1 + R_2$$

$$\|(x_1, y_1) - (x_3, y_3)\|_2 \geq R_1 + R_3$$

$$\|(x_2, y_2) - (x_3, y_3)\|_2 \geq R_2 + R_3$$

Es decir, la distancia entre los centros de los círculos debe ser al menos la suma de los radios.

Juntando todo, el modelo de optimización es

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_0 y_0 - \pi(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) \\ \text{sujeto a:} \quad & R_i \leq x_i \leq x_0 - R_i \quad i = 1, 2, 3 \\ & R_i \leq y_i \leq y_0 - R_i \quad i = 1, 2, 3 \\ & \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_2 \geq R_1 + R_2 \\ & \|(x_1, y_1) - (x_3, y_3)\|_2 \geq R_1 + R_3 \\ & \|(x_2, y_2) - (x_3, y_3)\|_2 \geq R_2 + R_3 \\ & x_0, y_0 \geq 0 \end{aligned}$$

Lo más importante de este ejemplo es notar que, a veces, para un modelar un problema de optimización es conveniente agregar variables que no son exactamente la decisión que debemos tomar. En este ejemplo, se nos preguntaba sólo por las dimensiones de la plancha, pero sin embargo, tuvimos que agregar más variables para poder modelar bien el problema.

2.2 Modelos basados en grafos

Para modelar muchos problemas nos será útil contar con definiciones que involucren *grafos*. Los grafos son útiles para representar redes de todo tipo (transporte, comunicaciones, sociales, etc.), por lo que manejar bien el lenguaje de grafos es clave para formular problemas de optimización.

2.2.1. Repaso de grafos

Definición 1. *Un grafo simple, o no-dirigido, corresponde a un par $G = (V, E)$ donde cada elemento de E es un par $\{u, v\}$ con $u, v \in V$. El conjunto V corresponde a los vértices o nodos de G , y E es el conjunto de aristas en G .*

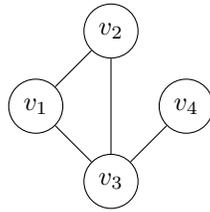
En el caso de los grafos simple usamos paréntesis de llave $\{\}$ para las aristas pues estas son un conjunto de dos vertices. Esto se hace para indicar que el orden no importa. Es decir, $\{u, v\} = \{v, u\}$. Por lo mismo, al dibujar las aristas, éstas no tienen un sentido.

Ejemplo 5. *Un ejemplo de grafo simple es $G = (V, E)$ con*

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}.$$

Este grafo se puede representar con el siguiente dibujo:



Definición 2. Un grafo dirigido corresponde a un par $G = (V, A)$ donde cada elemento de A es un par ordenado (u, v) con $u, v \in V$. El conjunto V corresponde a los vértices o nodos de G y A es el conjunto de arcos en G .

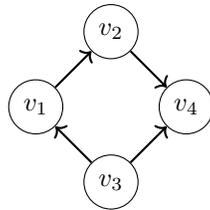
Para los arcos de los grafos dirigidos si importa el orden, y por eso se usan los paréntesis $()$. En este caso $(u, v) \neq (v, u)$, pues los arcos tienen una dirección.

Ejemplo 6. Un ejemplo de grafo dirigido es $G = (V, E)$ con

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$A = \{(v_1, v_2), (v_3, v_1), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}.$$

Este grafo se puede representar con el siguiente dibujo:



Definición 3. Dado un grafo simple $G = (V, E)$, decimos que $u, v \in V$ son vecinos si $\{u, v\} \in E$. Dado $v \in V$, llamamos vecindad de v al conjunto de sus vecinos, y se denota como $N(v)$. Es decir

$$N(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}.$$

El conjunto de aristas con un extremo en $v \in V$ se denota como $\delta(v)$, es decir

$$\delta(v) = \{\{u, v\} \in E : u \in V\}.$$

Definición 4. Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$ y un nodo $u \in V$, llamamos vecindad saliente de v al conjunto $N^+(v)$ definido por

$$N^+(v) = \{u \in V : (v, u) \in A\}.$$

Similarmente, llamamos vecindad entrante de v al conjunto $N^-(v)$ definido por

$$N^-(v) = \{u \in V : (u, v) \in A\}.$$

Por último, llamamos $\delta^+(v)$ el conjunto de arcos salientes de v , es decir

$$\delta^+(v) = \{(v, u) \in A : u \in V\},$$

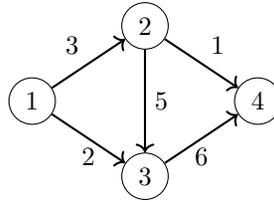
y similarmente llamamos $\delta^-(v)$ al conjunto de arcos entrantes a v , es decir

$$\delta^-(v) = \{(u, v) \in A : u \in V\}.$$

En las definiciones anteriores, en caso de estar trabajando con más de un grafo, usaremos el subíndice G para denotar que es respecto al grafo G .

2.2.2. Flujo máximo

Supongamos que tenemos un grafo dirigido $G = (V, A)$ como el siguiente:



En cada arco puede transitar un flujo (vehículos, datos, etc) en la dirección del arco, con un máximo indicado en el arco correspondiente. Nos gustaría enviar la mayor cantidad de flujo posible desde 1 hasta 4, respetando las capacidades de cada arco.

Para modelar este problema, utilizaremos variables x_e para cada $e \in A$ que indiquen el flujo en el arco correspondiente. Es decir, definimos las variables

$$x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}.$$

Las restricciones en este problemas son de tres tipos. Primero, los flujos no pueden ser negativos, ya que los arcos tienen dirección. Segundo, los flujos no pueden superar las capacidades. Y tercero, asumiremos que el flujo en los nodos 2 y 3 solo se re-distribuye, por lo tanto *lo que entra es igual a lo que sale*. Estas condiciones se traducen en:

$$\begin{aligned} x_{12} &= x_{23} + x_{24} \\ x_{13} + x_{23} &= x_{34} \\ x_{12} &\leq 3 \\ x_{13} &\leq 2 \\ x_{23} &\leq 5 \\ x_{24} &\leq 1 \\ x_{34} &\leq 6 \\ x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34} &\geq 0. \end{aligned}$$

Por último, como nos gustaría maximizar cuanto enviamos desde 1 a 4, nuestra función objetivo es cuánto llega a 4 (o equivalentemente cuánto sale de 1). Es decir, el problema queda modelado por:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_{24} + x_{34} \\ \text{subject to:} \quad & x_{12} = x_{23} + x_{24} \\ & x_{13} + x_{23} = x_{34} \\ & x_{12} \leq 3 \\ & x_{13} \leq 2 \\ & x_{23} \leq 5 \\ & x_{24} \leq 1 \\ & x_{34} \leq 6 \\ & x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34} \geq 0. \end{aligned}$$

Veamos ahora como formular el problema en general. Considere un grafo dirigido genérico $G = (V, A)$, y dos nodos especiales $s, t \in V$, llamados *fuelle* y *sumidero* respectivamente. Además supongamos que para cada arco $e \in A$ tenemos una capacidad u_e . El objetivo es enviar la mayor cantidad

de flujo posible de s a t , respetando la conservación de flujo en el grafo, y las restricciones de capacidad en los arcos. Utilizando el mismo razonamiento anterior, podemos modelar el problema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{máx} && \sum_{(u,t) \in \delta^-(t)} x_{ut} \\ \text{sujeto a:} &&& \sum_{(u,v) \in \delta^+(u)} x_{uv} - \sum_{(v,u) \in \delta^-(u)} x_{vu} = 0, && \forall u \in V \setminus \{s, t\}, \\ &&& 0 \leq x_e \leq u_e, && \forall e \in A. \end{aligned}$$

2.2.3. Flujo a costo mínimo

Supongamos que tenemos un grafo dirigido $G = (V, A)$. Cada nodo $v \in V$ tiene una oferta/demanda de flujo dada por b_v (si $b_v > 0$ es oferta, si $b_v < 0$ es demanda), cada arco $e \in A$ tiene un costo de c_e por cada unidad de flujo que pasa por e , y cada arco e tiene una cantidad mínima y máxima de flujo, ℓ_e y u_e respectivamente, que puede pasar por el. El objetivo del problema es enviar flujo por los arcos de manera de satisfacer la demanda total, minimizando el costo.

Por ejemplo, G puede representar una red de transporte de cierto alimento. Los nodos donde $b_v > 0$ son aquellos nodos donde se produce el alimento, los cuales deben ser transportados a los nodos donde $b_v < 0$. Los costos c_e pueden representar peajes en ciertos caminos, o costos de combustible. Y los máximos/mínimos u_e/ℓ_e pueden representar restricciones adicionales como límites en las cargas de un camión.

Al igual que en la sección anterior, consideramos una variable x_e por cada arco $e \in A$ que representa la cantidad de flujo en el arco. Luego, el problema de optimización corresponde a

$$\begin{aligned} & \text{mín} && \sum_{e \in A} c_e x_e \\ \text{sujeto a:} &&& \sum_{(u,v) \in \delta^+(u)} x_{uv} - \sum_{(v,u) \in \delta^-(u)} x_{vu} = b_u, && \forall u \in V, \\ &&& \ell_e \leq x_e \leq u_e, && \forall e \in A. \end{aligned}$$

Notar que hemos resumido la restricciones de balance de flujo en una sola expresión. Si $b_u > 0$, entonces *lo que sale de u menos lo que entra debe ser la oferta*. Lo mismo pasa para los otros casos.

Este problema también lo podemos escribir de forma más resumida introduciendo una matriz especial. Consideremos la matriz $N \in \{-1, 0, 1\}^{V \times A}$ donde cada entrada $N_{v,e}$ con $v \in V, e \in A$ está dada por

$$N_{v,e} = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in \delta^+(v), \\ -1 & \text{si } e \in \delta^-(v), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz N se llama *matriz de incidencia* del grafo G . Si representamos las funciones de demandas y capacidades como vectores $b \in \mathbb{R}^V$ y $\ell, u \in \mathbb{R}^A$, podemos escribir el problema como

$$\text{mín} \left\{ \sum_{e \in A} c_e x_e : Nx = b, \ell \leq x \leq u \right\}.$$

Observación 1. *Considere x un flujo factible para el problema. Si sumamos todas las restricciones obtenemos que,*

$$\sum_{v \in V} b_v = \sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in \delta^+(u)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(u)} x_e \right) = \sum_{e \in A} x_e - \sum_{e \in A} x_e = 0.$$

Es decir, la oferta debe ser igual a la demanda para tener un flujo factible. Cada vez que tengamos un problema de flujo a costo mínimo supondremos que esto se cumple, es decir, que $\sum_{v \in V} b_v = 0$. Como mencionamos arriba, al conjunto $\{v \in V : b_v > 0\}$ los llamaremos nodos oferta, y a $\{v \in V : b_v < 0\}$ serán nodos demanda. Un nodo tal que $b_v = 0$ diremos que es un nodo de transporte.

2.2.4. Camino a costo mínimo

Formalicemos el problema mencionado en el Ejemplo 1, es decir, el problema de encontrar el camino más corto entre 2 puntos. El lenguaje de grafos es muy conveniente para describir este problema.

Definición 5 (Caminos). Dado un grafo $G = (V, E)$, un camino de largo k es una secuencia de k aristas $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ tal que existe una secuencia de $k + 1$ vértices v_1, v_2, \dots, v_{k+1} tal que

$$e_i = \{v_i, v_{i+1}\}.$$

Un camino H es un (u, v) -camino si $v_1 = u$ y $v_{k+1} = v$.

Definición 6. Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si para todo $u, v \in V$ existe un (u, v) -camino en G .

Definición 7 (Caminos dirigidos). Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, un camino dirigido de largo k es una secuencia de k arcos $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ tal que existe una secuencia de $k + 1$ vértices v_1, v_2, \dots, v_{k+1} tal que

$$e_i = (v_i, v_{i+1}).$$

Un camino H es un (u, v) -camino si $v_1 = u$ y $v_{k+1} = v$.

Definición 8. Un grafo dirigido G es fuertemente conexo si para todo $s, t \in V$ existe un (s, t) -camino dirigido en G .

Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, costos $c_e \geq 0$ para todo $e \in A$, y dos nodos $s, t \in V$, nos gustaría encontrar un (s, t) -camino en G cuyo costo sea mínimo. Si los costos fueran *longitudes*, esto se interpreta como el camino más corto. Podemos modelar el problema usando el modelo de flujo a costo mínimo que vimos en la sección anterior.

Si enviamos exactamente una unidad de flujo desde s a t , y forzamos que ese flujo no se pueda subdividir, entonces esa unidad de flujo debería viajar por el camino más corto! Por lo tanto, podemos definir las siguientes demandas

$$b_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v = s, \\ -1 & \text{si } v = t, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases},$$

y los vectores de capacidad $\ell \equiv 0$ y $\mu \equiv +\infty$, y aplicar el modelo de flujo a costo mínimo para obtener un modelo para el problema del camino más corto. Específicamente, este modelo quedaría como

$$\begin{aligned}
 & \text{mín} \quad \sum_{e \in A} c_e x_e \\
 \text{sujeto a:} \quad & \sum_{(u,v) \in \delta^+(u)} x_{uv} - \sum_{(v,u) \in \delta^-(u)} x_{vu} = 0, \quad \forall u \in V \setminus \{s, t\}, \\
 & \sum_{(s,v) \in \delta^+(s)} x_{sv} - \sum_{(v,s) \in \delta^-(s)} x_{vs} = 1, \\
 & \sum_{(t,v) \in \delta^+(t)} x_{tv} - \sum_{(v,t) \in \delta^-(t)} x_{vt} = -1, \\
 & x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in A.
 \end{aligned}$$

Notemos que se impuso una restricción de integralidad en x para forzar que la unidad de flujo no se sub-divida y así seleccionar las aristas de A que forman el camino a costo mínimo. Sin embargo, se puede probar que esta restricción no es necesaria. Es decir, si resolvemos el problema relajado con $x \geq 0$, siempre existe una solución óptima $x^* \in \{0, 1\}^A$. Es decir, corresponde efectivamente a un problema de flujo a costo mínimo con $\ell \equiv 0$ y $\mu \equiv +\infty$.

Ejercicio 2. Analizar cómo cambia el modelo anterior si es que se considera el mismo problema en un grafo simple.

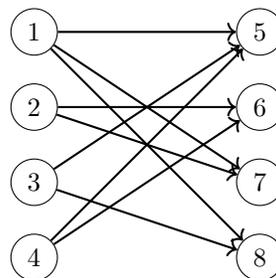
2.2.5. Problema de asignación

Supongamos que queremos asignar trabajadores a realizar ciertas tareas. Contamos con un conjunto de trabajadores U y un grupo de tareas W . Para simplificar el problema un poco, supongamos además que $|U| = |W|$, es decir, tenemos un trabajador por tarea. Cada trabajador $u \in U$ está capacitado para realizar solo algunas tareas $N^+(u) \subseteq W$, y asignar un trabajador u a una tarea w tiene un costo c_{uw} . Nos gustaría encontrar la asignación de trabajadores a tareas que tenga el menor costo posible.

Este problema también se puede formular como un problema de flujo a costo mínimo. Introduciremos una clase especial de grafos para este problema.

Definición 9. Un grafo dirigido (V, A) es bipartito si existen U, W , con $U \cap W = \emptyset$, tales que $V = U \cup W$ y para todo $(u, w) \in A$, $u \in U$ y $w \in W$.

En palabras simples, los arcos van siempre desde U a W . Un ejemplo de un grafo dirigido bipartito es el siguiente



Para formular el problema de asignación, podemos crear un grafo dirigido bipartito $G = (U, W, A)$ con $|U| = |W|$. Crearemos un arco (u, w) si el trabajador u puede realizar la tarea w , y asociamos el costo c_{uw} a dicho arco. Para modelar la asignación, podemos pensar en que cada trabajador tiene una oferta de una unidad de flujo, y cada tarea tiene una demanda de una unidad de flujo. Con esta

interpretación, asignar un trabajador a una tarea es exactamente decidir a qué tarea envía cada trabajador su oferta. Por lo tanto, podemos modelar este problema como un modelo de flujo a costo mínimo donde:

- $b_u = 1$ para todo $u \in U$,
- $b_w = -1$ para todo $w \in W$.

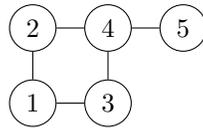
Notar que si u se asigna a w , la unidad de flujo usará el arco (u, w) y pagará el costo c_{uw} , que es exactamente lo que buscamos.

Ejercicio 3. Escribir explícitamente la formulación del problema de asignación.

Toda solución factible para este problema se denomina *emparejamiento* o *matching*.

2.2.6. Vertex cover

Supongamos que un museo desea vigilar todos sus pasillos de la manera más eficiente posible. Para ello, la administración ha decidido representar sus red de pasillos como un grafo (donde las aristas son los pasillos y los nodos representan los extremos de los pasillos e intersecciones) y posicionar un guardia en cada nodo del grafo. Por ejemplo, si el siguiente grafo representa la red de pasillos,



la administración pondría guardias en cada uno de los nodos 1, 2, 3, 4 y 5. Sin embargo, podemos notar que basta tener 2 guardias para vigilar todos los pasillos: un guardia en el nodo 1 y otro en el nodo 4 (asumiremos que un guardia en un nodo puede ver todos los pasillos que lo rodean sin problema). Cuando un conjunto de vértices “ve” todas las aristas, se dice que es un *vertex cover*. En este caso $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\{1, 4\}$ son ambos un vertex cover. Por otro lado, $\{1, 5\}$ no es un vertex cover pues la arista $\{2, 4\}$ no es “vista” por los nodos $\{1, 5\}$. Formalicemos el problema de encontrar “el mejor” vertex cover.

Definición 10. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Un conjunto de vértices $C \subseteq V$ es un vertex cover si

$$\bigcup_{v \in C} \delta(v) = E.$$

Es decir, si todas las aristas de E tienen algún extremo en C .

El problema de encontrar el vertex cover de menor tamaño corresponde a encontrar un conjunto C de menor tamaño que sea un vertex cover. Para formular este problema podemos definir variables $x_v \in \{0, 1\}$ para todo $v \in V$ indicando si se incluye o no el vértice v . Para que el conjunto de vértices sea efectivamente un vertex cover, se debe cumplir que

$$x_u + x_v \geq 1 \quad \forall \{u, v\} \in E.$$

Es decir, para cada arista $\{u, v\}$, debemos incluir u o v (o ambos) en el vertex cover. El problema queda entonces formulado como

$$\begin{aligned} & \text{mín} \sum_{v \in V} x_v \\ & \text{sujeto a: } x_v + x_u \geq 1 \quad \forall \{u, v\} \in E \\ & \quad x_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Notar que ya habíamos usado la palabra *cover* en la Sección 2.1.2. Los problemas de *covering*, a grandes rasgos, son problemas cuyas restricciones son todas del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$$

con $a_i \geq 0$ y $b > 0$.

2.3 Ejercicios

- P2.3.1.** a) Suponga que debe trasladar cobre a las ciudades de Santiago, Concepción y Valparaíso, para su exportación. El material proviene de las mineras de Chuquicamata, Teniente, Salvador y Los Andes. Las toneladas de cobre disponibles, las demandas, y los costos de transporte se detallan a continuación

Costos	Santiago	Concepción	Valparaíso	Oferta
Chuquicamata	30	45	10	400
Teniente	10	-	20	400
Salvador	12	15	15	64
Andina	20	10	-	236
Demanda	350	300	400	-

Plantee el PL que determina las rutas de distribución que minimizan el costo para satisfacer la demanda. Resuélvalo con AMPL.

- b) Se abrió una bodega que permite el tránsito intermedio en Talagante y otra en Requínoa. La nueva tabla de ofertas/demandas/costos es

Costos	Santiago	Concepción	Valparaiso	Talagante	Requínoa	Oferta
Chuquicamata	30	45	10	25	40	400
Teniente	10	-	20	13	9	400
Salvador	12	15	15	10	16	64
Andina	20	10	-	18	25	236
Talagante	8	12	15	-	9	-
Requínoa	15	10	24	7	-	-
Demanda	350	300	400	-	-	-

Además, la bodega de Talagante tiene una capacidad máxima para recibir 200 toneladas de material, y la de Requínoa 150. Adapte el modelo anterior para incluir estas bodegas y resuélvalo en AMPL.

- P2.3.2.** Latam debe decidir cuántos auxiliares de vuelo contratar y entrenar durante los primeros seis meses del próximo año. La cantidad de horas-auxiliar que se necesitan son 8000, 9000, 7000, 10000, 9000 y 11000 para los meses entre Enero y Junio, respectivamente. Al contratar un auxiliar, se debe entrenar durante un mes antes de asignarle a un vuelo. Por lo mismo, se debe contratar auxiliares un mes antes de asignarles en los vuelos. Cada auxiliar que está en período de entrenamiento requiere de 100 horas de supervisión de un auxiliar con experiencia. Esto significa que cuando se entrena a un auxiliar nuevo, hay 100 horas menos disponibles de auxiliares regulares.

Cada auxiliar experimentado puede trabajar hasta 150 horas al mes. Latam tiene 60 auxiliares experimentados al comienzo de Enero. Si durante un mes hay más horas-auxiliar disponibles de lo que se requieren para atender vuelos y para entrenamiento, entonces esas horas no se trabajan (y nadie es despedido). Al final de cada mes, 10% de los auxiliares experimentados renuncian a su trabajo.

Un auxiliar experimentado le cuesta \$1700 mensuales a la compañía (sueldos y beneficios), y un auxiliar en período de entrenamiento le cuesta \$900.

Formule este problema como un problema de optimización lineal.

Indicación: use como variables x_t el número de auxiliares que empiezan a entrenarse el mes t , e y_t el número de auxiliares experimentados disponible el mes t . Suponga que $x_0 = 0, y_1 = 60$.

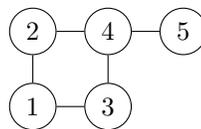
P2.3.3. Un prestigioso banco abre sus puertas de Lunes a Viernes de 9 AM a 5 PM. El administrador del banco, en base a su experiencia, calcula que el banco necesita la siguiente cantidad de cajeros:

Hora	Cajeros
9 - 10	4
10 - 11	3
11 - 12	4
12 - 1	6
1 - 2	5
2 - 3	6
3 - 4	8
4 - 5	8

El banco contrata dos tipos de cajeros. Cajeros tiempo-completo trabajan de 9 AM a 5 PM los cinco días de la semana, excepto por una hora que se toman de almuerzo, entre 12 y 1 o entre 1 y 2. Cajeros tiempo-completo ganan \$1500 la hora (inclusive su hora de almuerzo). El banco también puede contratar hasta 3 cajeros tiempo-parcial. Cada uno de estos cajeros de jornada parcial debe trabajar exáctamente 4 horas consecutivas cada día. Estos cajeros ganan \$1200 la hora. Formule un modelo de optimización lineal que permita decidir un plan de contratación que satisfaga los requerimientos del banco a un costo mínimo.

Indicación: divida los cajeros en categorías para definir variables. Por ejemplo, cajeros tiempo completo que toman su almuerzo entre 12 y 1, cajeros de tiempo parcial que trabajan desde las 9, etc.

P2.3.4. Un museo desea vigilar todos sus pasillos de la manera más eficiente posible. Para ello, la administración ha decidido representar su red de pasillos como un grafo (donde los arcos son los pasillos y los nodos representan los extremos de los pasillos e intersecciones) y posicionar un guardia en cada nodo del grafo. Por ejemplo, si el siguiente grafo representa la red de pasillos,



la administración pondría guardias en cada uno de los nodos 1,2,3, 4 y 5. Sin embargo, un ingeniero de la UOH se da cuenta que esto es muy ineficiente! ya que bastaría solo tener 2 guardias para vigilar todos los pasillos: un guardia en el nodo 1 y otro en el nodo 4 (asumiremos que un guardia en un nodo puede ver todos los pasillos que lo rodean sin problema).

Formule un modelo de optimización que determine el mínimo numero de guardias que se necesitan para vigilar todos los pasillos del museo. Asuma que la red de pasillos del museo está representada por un grafo no-dirigido $G = (V, E)$.

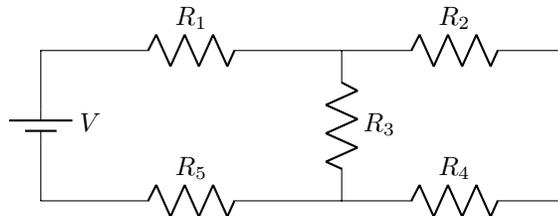
P2.3.5. Una empresa que produce sofás está intentando optimizar su proceso de producción. La empresa determina que para producir cada sofá necesita completar 9 pasos; ciertos pasos se pueden realizar en paralelo, mientras que otros solo se pueden realizar cuando sus requisitos se hayan completado. La siguiente tabla muestra las dependencias entre los distintos pasos, y la duración de cada uno.

Paso	Duración (min)	Pasos a completar antes
1	10	-
2	23	1
3	12	1
4	10	2
5	3	3,4
6	11	2
7	5	2
8	4	7
9	7	5,6,8

Por ejemplo, los pasos 2 y 3 pueden hacerse en paralelo, pero ambos solo pueden comenzar cuando el paso 1 se haya completado.

Formule un problema de optimización *lineal* que determine en qué momento realizar cada paso de manera de producir un sofá en el menor tiempo posible, pero respetando los requerimientos. Notar que el último paso siempre es el 9.

P2.3.6. [Ejercicio largo] Deseamos diseñar un circuito resistivo como el siguiente:



Para ello, debemos decidir qué resistencias R_i usar de manera que la potencia disipada total del sistema sea minimizada. En este sistema, el voltaje V se mantiene a un nivel fijo y la corriente a través de cada resistencia R_i sólo puede variar entre los límites inferiores y superiores $I_{i,mín}$ y $I_{i,máx}$. Formule el problema de decisión como un problema de optimización.

Para este problema deberá buscar/recordar: Ley de Ohm, primera ley de Kirchhoff y la definición de potencia disipada por una resistencia. Es recomendable partir por encontrar la resistencia equivalente del circuito (en función de R_i $i = 1, \dots, 5$) para encontrar la corriente total en el sistema.

P2.3.7. Suponga que tiene una nube de n puntos en 2 dimensiones $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$. Nos gustaría encontrar un círculo de radio mínimo que contenga a todos los puntos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$. Formule este problema como un problema de optimización.

P2.3.8. En el contexto del “Plan de Retorno Seguro” del Gobierno ante la crisis del COVID-19, una empresa que cuenta con 5 empleados comienza a planear el retorno al trabajo presencial. La empresa debe posicionar los escritorios de sus trabajadores de manera que se respete un distanciamiento mínimo de 2 metros, pero le gustaría mantener el costo de limpieza de sus instalaciones lo más bajo posible. Para esto, el gerente de la empresa contacta a un ingeniero

de la UOH y le pide que determine cuál es la menor área **cuadrada** que se necesita para poder posicionar a sus 5 empleados respetando el distanciamiento mínimo.

- a) Formule un modelo de optimización que resuelva este problema y resuélvalo con AMPL. *Indicación: De usar un modelo no-lineal, en AMPL se debe usar el solver BARON. Tomar en cuenta que un modelo no-lineal, aunque sea pequeño, puede tomar varios minutos en resolver.*
- b) Dibuje un diagrama mostrando la ubicación de sus 5 trabajadores en la solución que obtuvo.
- c) Uno de los empleados quiere tomar precauciones extra y le solicita al gerente tener una distancia de 3 metros con sus colegas. Modifique el modelo para tomar en cuenta esta petición y resuélvalo con AMPL. Asuma que para todos los otros trabajadores una distancia de 2 metros basta. Dibuje un diagrama que ilustre la nueva solución óptima.

P2.3.9. Debido a la pandemia, una fábrica desea determinar cuál es el número mínimo de trabajadores que necesita para seguir funcionando. La fábrica determina que necesita un número mínimo de trabajadores por cada día de la semana, indicados en la siguiente tabla:

	Lun.	Mar.	Mié.	Jue.	Vie.	Sab.	Dom.
Número mínimo de trabajadores	18	15	13	10	12	14	11

Por políticas de la fábrica, a cada trabajador se le asignan 5 días consecutivos para trabajar, y luego descansa 2 días. Formule un problema de optimización *lineal* que determine el número mínimo de trabajadores que se necesitan (en total) para cumplir los requerimientos de cada día.

P2.3.10. Una empresa de transporte debe transferir todos sus containers desde sus bodegas a algunos puertos de Chile. La cantidad de containers en cada bodega, y la demanda en cada puerto se indican en las siguientes tablas:

Bodega	Containers	Puerto	Demanda
Santiago	40	Valparaíso	25
Rengo	10	San Antonio	15
Cauquenes	15	Talcahuano	25
Valdivia	30	Puerto Montt	10

La empresa determina que sus costos son directamente proporcionales a la distancia que viaja cada container, por lo tanto, si se envían x containers desde A a B , se puede asumir que la empresa paga

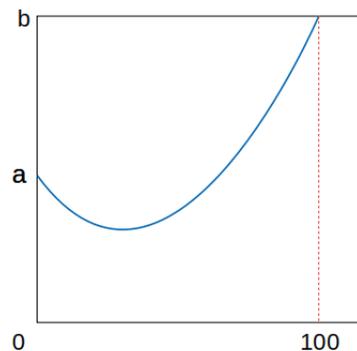
$$x \cdot [\text{distancia entre } A \text{ y } B]$$

Notar que la demanda total en los puertos es menor a la cantidad de containers disponibles y las bodegas deben quedar vacías. Por esto, algunos puertos recibirán más containers que su demanda.

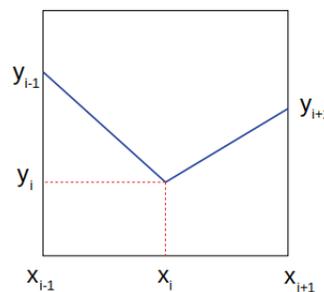
Formule el problema de optimización que debe resolver la empresa, resuélvalo con AMPL, y analice la solución óptima. ¿Qué puertos quedaron con más containers que su demanda?

Indicación: para este problema deberá estimar las distancias entre las distintas ciudades. Para esto puede utilizar cualquier método que estime conveniente.

P2.3.11. Supongamos que tenemos una cadena colgando de 2 puntos: en $x = 0$ la cadena se encuentra a una altura a , y en $x = 100$ se encuentra a una altura b . El siguiente diagrama ilustra esta situación.



La cadena tiene un largo L y deseamos encontrar su posición de reposo, la cual está dada por el estado que minimiza la energía potencial. Para determinar dicho estado, primero discretizamos el eje x en n intervalos de largo $h = 100/n$ y definimos variables $y_i, i = 0, \dots, n$ indicando la altura de la cadena en el punto $x_i = ih$. Asumimos que cada segmento $(x_i, y_i) - (x_{i+1}, y_{i+1})$ es recto. La siguiente figura muestra localmente cómo se hace la discretización:



Recuerde que sólo y_i es una variable, ya que cada x_i está fijado de manera que $x_{i+1} - x_i = h$.

- a) Usando la discretización y variables antes descritas, formule un problema de optimización que determine el estado de reposo de la cadena.

Para calcular la energía potencial, puede asumir que la densidad de la cadena es 1. Por lo tanto, la masa de un segmento de la cadena $(x_i, y_i) - (x_{i+1}, y_{i+1})$ es simplemente el largo del segmento y su centro de masa está ubicado en el centro del segmento.

Indicación: si lo necesita, puede asumir que la cadena nunca tocará el suelo.

- b) Resuelva el modelo en AMPL¹ para $a = 100, b = 130, n = 50$ y para 2 valores de L a su elección mayores a 105. Dibuje la cadena en su posición de reposo para ambos valores de L .

Indicación: si su modelo asume que la cadena no toca el suelo, evite valores de L muy grandes. Tenga en consideración que si su modelo es no-lineal, el solver podría tomar mucho tiempo y no reportar una solución óptima. Si lo necesita, puede interrumpir la ejecución después de unos minutos y utilizar la solución que reporte AMPL.

P2.3.12. Una refinería produce 3 tipos distintos de gasolina (A, B, C) mezclando 4 tipos de productos básicos. Los productos básicos se deben comprar a un proveedor que tiene cantidades limitadas:

¹Si su modelo es no-lineal, se recomienda usar el solver Baron.

Producto	Costo por litro	Litros disponibles
1	3	3000
2	6	2000
3	4	4000
4	5	1000

Al mezclar los productos para obtener las gasolinas se deben respetar las siguientes concentraciones:

Gasolina	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
A	$\leq 30\%$	$\geq 40\%$	$\leq 50\%$	X
B	$\leq 50\%$	$\geq 10\%$	X	X
C	$\geq 70\%$	X	X	X

Por ejemplo, para producir 1 litro (L) de gasolina A, no se puede utilizar más de 0.3 L del producto 1, se debe utilizar al menos 0.4 L del producto 2, y no se puede utilizar más de 0.5 L del producto 3. Los precios de venta de las gasolinas son:

Gasolina	Precio por litro
A	5.5
B	4.5
C	3.5

Formule un problema de optimización *lineal* que determine cómo producir las gasolinas de manera de maximizar la utilidad (beneficio por venta - costo de productos) de la refinería.

Indicación: para definir sus variables, note que no basta con determinar cuánta gasolina de cada tipo producir, si no que también debe decidir cuánto producto de cada tipo utilizar al elaborar una clase de gasolina.

Programación lineal

Un problema de optimización tiene la forma

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ \text{sujeto a: } & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Cuando $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ y todas las funciones f, g_1, \dots, g_m son lineales afín, decimos que el problema es *lineal*. Nos referiremos a un problema lineal como PL. Asumir que estas funciones son lineales afín es lo mismo que decir que existen $c, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ y $d, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} f(x) &= c^\top x + d \\ g_1(x) &= a_1^\top x - b_1 \\ &\vdots \\ g_m(x) &= a_m^\top x - b_m \end{aligned}$$

Es importante notar que podemos ignorar el término d que aparece en $f(x)$, pues es una constante en la función objetivo. Si definimos una matrix A de $m \times n$ cuyas *filas* están dadas por los vectores a_i , y un vector $b \in \mathbb{R}^m$ cuyas componentes están dadas por b_i , podemos escribir un PL como

$$\text{mín } c^\top x \tag{3.1a}$$

$$\text{sujeto a: } Ax \leq b. \tag{3.1b}$$

Estos problemas tienen una larga tradición en optimización, pues son los problemas con restricciones “más simples”. Los métodos de resolución de estos modelos han marcado grandes avances, y hoy forman la base de muchos métodos de optimización sofisticados. En este capítulo estudiaremos únicamente este tipo de problemas.

3.1 Introducción

3.1.1. Problemas equivalentes y reformulaciones

Claramente cualquier problema del siguiente tipo

$$\begin{aligned} & \text{mín } c^\top x \\ \text{sujeto a: } & Ax \leq b \\ & Cx = d \\ & Ex \geq h \end{aligned}$$

puede ser escrito de la forma (3.1) (multiplicando por -1 las desigualdades \geq y escribiendo las igualdades como dos desigualdades). Sin embargo, en programación lineal será importante tener claras ciertas formas especiales de formular un problema, pues las técnicas que veremos utilizarán dichas representaciones particulares.

Definición 11. Decimos que un PL está en forma **clásica** si tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{mín } & c^\top x \\ \text{sujeto a: } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Definición 12. Decimos que un PL está en forma **estándar** si tiene la forma:

$$\begin{aligned} \text{mín } & c^\top x \\ \text{sujeto a: } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Notar que parte del conjunto factible de un PL en forma estándar es un sistema lineal de ecuaciones. En lo que sigue, cada vez que trabajemos con un PL en forma estándar vamos a suponer que la matriz A siempre es de rango completo (por lo tanto, las filas son linealmente independientes) a menos que se especifique lo contrario. Este supuesto no es un problema en la práctica, ya que eliminando filas podemos obtener un sistema equivalente en forma estándar.

Definición 13 (Informal). Decimos que dos problemas de optimización P_1 y P_2 son equivalentes si, dada una solución óptima de P_1 , podemos obtener una solución óptima de P_2 , y vice-versa.

A primera vista se podría pensar que los problemas en forma estándar son una clase muy particular de PL. Sin embargo, la siguiente proposición muestra lo contrario.

Proposición 1. Todo problema de programación lineal es equivalente a otro problema de programación lineal en forma estándar

Omitiremos la demostración de esta proposición, pero ilustraremos la técnica a continuación.

Ejemplo 7. El siguiente problema de optimización no está en forma clásica ni estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín } & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a: } & x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ & x_2 - 4x_1 = -1 \\ & x_3 + x_2 \geq 1 \\ & 1 \leq x_1 \leq 7 \\ & x_2 \leq 24 \end{aligned}$$

Sin embargo, podemos obtener un problema equivalente que si lo está.

1. Transformando desigualdades en igualdades: en general, si tenemos una restricción lineal del tipo

$$a^\top x \leq b$$

entonces podemos agregar una variable extra s , conocida como **variable de holgura** y reemplazamos la desigualdad por el siguiente par de expresiones,

$$a^\top x + s = b, \quad s \geq 0.$$

Aplicando esto a nuestro problema podemos obtener el siguiente problema equivalente,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 17 \\ & x_2 - 4x_1 = -1 \\ & x_3 + x_2 - s_2 = 1 \\ & x_1 - s_3 = 1 \\ & x_1 + s_4 = 7 \\ & x_2 + s_5 = 24 \\ & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora nos falta escribir el problema solo con variables no-negativas.

2. Transformando variables libres a variables no-negativas: En el caso de x_1 , como $x_1 \geq 1$, entonces podemos agregar la restricción $x_1 \geq 0$ sin problemas. Sin embargo, x_2 y x_3 pueden tomar valores positivos y negativos. Para ellas, usamos el hecho que todo número real z puede ser escrito como diferencia de dos número no-negativos, es decir, existen $z^+, z^- \geq 0$ tales que

$$z = z^+ - z^-$$

Por lo tanto, creamos las variables x_i^+, x_i^- para $i = 2, 3$ y obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 3(x_2^+ - x_2^-) + (x_3^+ - x_3^-) \\ \text{sujeto a:} \quad & x_1 + 2(x_2^+ - x_2^-) + s_1 = 17 \\ & (x_2^+ - x_2^-) - 4x_1 = -1 \\ & (x_3^+ - x_3^-) + (x_2^+ - x_2^-) - s_2 = 1 \\ & x_1 - s_3 = 1 \\ & x_1 + s_4 = 7 \\ & (x_2^+ - x_2^-) + s_5 = 24 \\ & x_1, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^- \geq 0 \\ & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Este último problema está en forma estándar.

Ejercicio 4. Llevar el siguiente problema a un problema equivalente en forma estándar

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & -2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Hay problemas de optimización no-lineal que son equivalentes a problemas de optimización lineal. A continuación mostramos algunos ejemplos clásicos.

- Problemas con fracciones. El problema,

$$\text{máx} \left\{ 3x + 2y : \frac{x + 7y}{x + 2y + 1} \leq 2, x, y \geq 0 \right\}$$

es equivalente al problema,

$$\text{máx } \{3x + 2y : -x + 3y \leq 2, x, y \geq 0\}$$

Cuando se trabaja con fracciones, hay que tener cuidado con los denominadores. Si los denominadores pueden tomar valor cero, ¡el problema está mal definido!

- Problemas con valores absolutos. El problema,

$$\text{mín } \{3x + |y - z| : x + y + z \geq 1, x, y, z \geq 0, x, y, z \leq 1\}$$

es equivalente al problema,

$$\text{mín } \{3x + u : x + y + z \geq 1, u \geq y - z, u \geq z - y, u, x, y, z \geq 0, x, y, z \leq 1\}.$$

Esto sale de notar que las restricciones

$$u \geq y - z, u \geq z - y$$

son equivalentes a $u \geq |y - z|$. Como estamos minimizando, y u no tiene otras restricciones, en un óptimo siempre se cumplirá $u = |y - z|$.

Es importante notar que esto es sólo válido en el caso de minimización. En un problema de maximización no habría sido posible llegar a un problema lineal.

3.1.2. Representación gráfica de problemas en dos dimensiones

En el caso de dos variables podemos representar el problema gráficamente en el plano. Veamos un par de ejemplos para ilustrar qué pasa cuando se optimiza en un PL

Ejemplo 8. *Volvamos al Ejemplo 3. El problema fue modelado como (1.1), el cual es un problema lineal entero. Por el momento ignoremos las restricciones de integralidad, y consideremos el modelo*

$$\text{máx } 8x_A + 7x_B \tag{3.2a}$$

$$\text{sujeto a: } 2x_A + 3x_B \leq 18, \tag{3.2b}$$

$$4x_A + 3x_B \leq 24 \tag{3.2c}$$

$$x_A, x_B \geq 0. \tag{3.2d}$$

En la Figura 3.1 mostramos todos los puntos (x_A, x_B) que cumplen las restricciones. En los bordes de la figura se destacan las rectas $2x_A + 3x_B = 18$ (naranja), $4x_A + 3x_B = 24$ (verde), $x_A = 0$ (azul) y $x_B = 0$ (café). Además, como queremos maximizar la utilidad $u(x_A, x_B) = 8x_A + 7x_B$, mostramos distintas curvas de nivel para $u(x_A, x_B)$. En líneas rojas punteadas, mostramos (de izquierda a derecha) $8x_A + 7x_B = 0$, $8x_A + 7x_B = 20$ y $8x_A + 7x_B = 52$. Todo punto de la región factible que intersece cierta curva de nivel entrega la misma utilidad. Aquellos puntos factible que entregan la máxima utilidad son los óptimos del problema. De la observación anterior se concluye, por ejemplo:

- El óptimo no se encuentra en el interior de la región factible. Informalmente, siempre se puede mover la curva un poco a la derecha y obtener una utilidad un poco mayor.
- Vemos que el óptimo se encuentra en el vértice de la región factible donde se intersectan las restricciones de producción, es decir, $(x_A^*, x_B^*) = (3, 4)$.

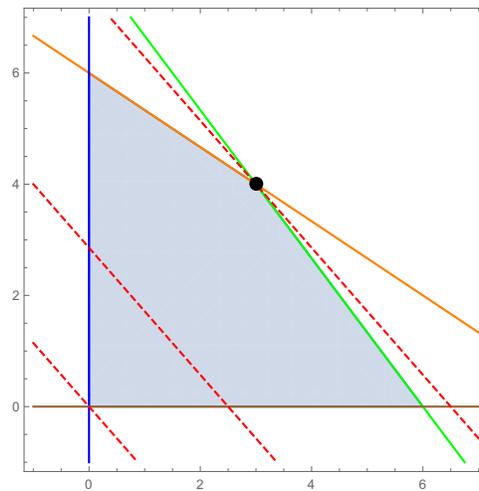


Figura 3.1: Región factible (azul) del problema (3.2) con x_A en el eje horizontal y x_B en el vertical. Cada línea punteada roja es una curva de nivel de la función objetivo. El óptimo se encuentra en (3, 4) (negro).

En cierto sentido, lo que estamos haciendo al optimizar, es mover las líneas punteadas rojas lo más lejos posible (“más lejos” siendo la dirección donde la función objetivo crece) pero siempre intersectando la región factible.

Ejemplo 9. Consideremos el siguiente problema:

$$\text{mín } -x_2 \tag{3.3a}$$

$$\text{sujeto a: } x_1 + x_2 \leq 1 \tag{3.3b}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3.3c}$$

En la Figura 3.2 mostramos la región factible, junto con ciertas curvas de nivel de la función objetivo. De la figura podemos ver claramente que el óptimo es el punto (0, 1).

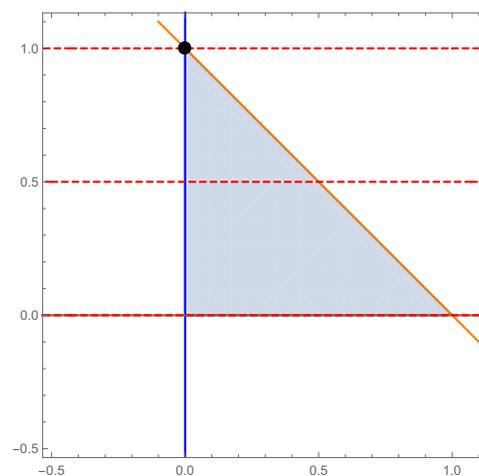


Figura 3.2: Región factible (azul) del problema (3.3). Cada línea punteada roja es una curva de nivel de la función objetivo. El óptimo se encuentra en (0, 1) (negro).

Ejemplo 10. Consideremos ahora el problema

$$\text{mín } -x_1 \tag{3.4a}$$

$$\text{sujeto a: } x_1 + x_2 \leq 8 \tag{3.4b}$$

$$x_1 \leq 5 \tag{3.4c}$$

$$x_2 \leq 4 \tag{3.4d}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3.4e}$$

En la Figura 3.3 mostramos la región factible, junto con ciertas curvas de nivel de la función objetivo. Podemos ver que en este caso el óptimo no se alcanza sólo en un vértice, si no que en todo un segmento. Sin embargo, existen 2 vértices óptimos en este caso!

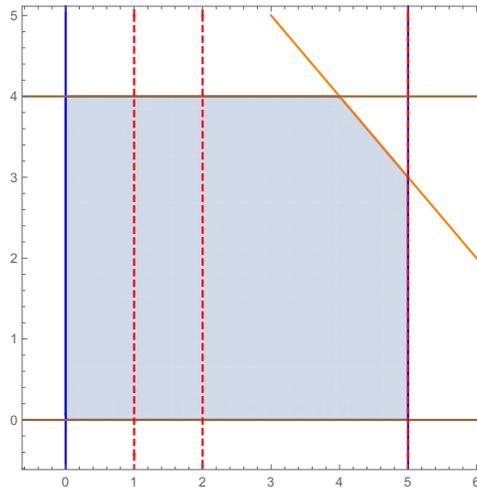


Figura 3.3: Región factible (azul) del problema (3.4). Cada línea punteada roja es una curva de nivel de la función objetivo. El óptimo se alcanza en el segmento dado por $x_1 = 5, x_2 \in [0, 3]$.

De estos ejemplos podemos ver que siempre existe un vértice de la región factible que es óptimo, lo cual es clave para el desarrollo del algoritmo *Simplex*. En lo que viene, veremos que esto no solo pasa en dos dimensiones. Para ello debemos definir qué es un vértice, y debemos estudiar la geometría de un problema lineal.

3.2 Geometría de programación lineal

En esta parte del curso nos enfocamos en estudiar la región factible de problema de optimización lineal. Esto nos indicará cómo encontrar las soluciones óptimas a un problema usando el algoritmo *Simplex*, reconocido como uno de los algoritmos más relevantes en computación en ingeniería durante el siglo XX.

3.2.1. Poliedros

Estamos considerando un problema del tipo

$$\begin{aligned} &\text{mín } c^\top x \\ &\text{sujeto a: } Ax \leq b \end{aligned}$$

Gráficamente vimos que siempre había un óptimo en un vértice. En lo que viene, probaremos que este siempre es el caso. Partiremos por describir ciertos aspectos geométricos de las región factible de un PL.

Definición 14 (Semi-espacio). *Dado $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$, el semiespacio dado por a y b corresponde al conjunto*

$$S_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leq b\}$$

Definición 15 (Hiperplano). *Dado $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$, el hiperplano dado por a y b corresponde al conjunto*

$$H_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = b\}$$

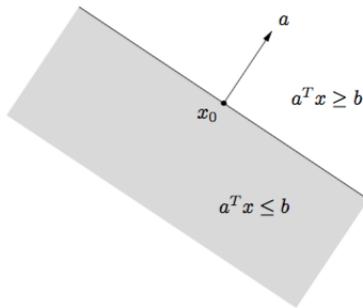


Figura 3.4: Semiespacios $S_{a,b}$ y $S_{-a,-b}$.

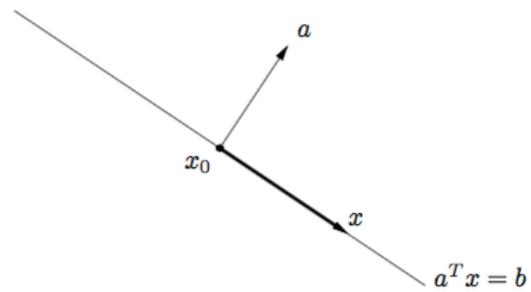


Figura 3.5: Hiperplano $H_{a,b}$.

Definición 16 (Poliedro). *Un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro si existe $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ para algún m , y $b \in \mathbb{R}^m$ tal que*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

Notar que también podemos escribir

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$$

con a_i^\top las filas de A . Por lo tanto, todo poliedro es una intersección de semi-espacios.

Definición 17. *Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice acotado si existe $K > 0$ tal que $\|x\|_\infty \leq K$ para todo $x \in S$.*

Definición 18. *Un poliedro acotado se denomina **polígono**.*

Ejemplo 11. *El poliedro dado P_1 , definido por*

$$P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y \leq 3, 2x + y \leq 5\},$$

es un polígono pues todo $(x, y) \in P_1$ cumple que $|x| \leq 5$ y $|y| \leq 5$.

Ejercicio 5. Dibuje el poliedro P_2 dado por

$$P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y \geq 3, 2x + y \geq 5\}.$$

Concluya que no es un polígono.

La siguiente definición es clave en el desarrollo de múltiples técnicas de optimización.

Definición 19 (Conjunto convexo). Diremos que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo si para todo $x, y \in S$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$, se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$. A la expresión $\lambda x + (1 - \lambda)y$ se le llama combinación convexa de x e y .

Lo anterior puede ser visualizado geoméricamente. Si tomamos dos puntos x e y cualquiera en el conjunto, cualquier punto contenido en el segmento que une x e y debe también pertenecer al conjunto.

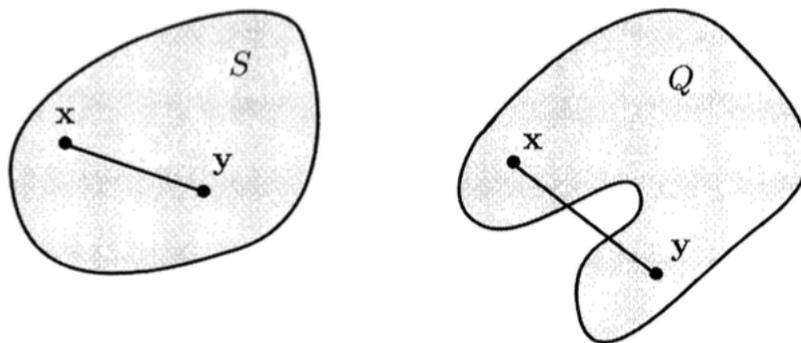


Figura 3.6: Ejemplo de conjunto convexo S y no-convexo Q

Este concepto será visto con más detalle más adelante. Por el momento, solo nos interesa establecer que un poliedro siempre es un conjunto convexo.

Teorema 1. *Todo poliedro es un conjunto convexo.*

Demostración. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Luego, existen vectores $\{a_i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \dots, m\}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tales que $P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$. Sea ahora $x, y \in P$ y $\lambda \in [0, 1]$. Entonces para todo $i = 1, \dots, m$, tenemos que

$$\begin{aligned} a_i^\top (\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \lambda a_i^\top x + (1 - \lambda)a_i^\top y \\ &\leq \lambda b_i + (1 - \lambda)a_i^\top y && \text{(pues } \lambda \geq 0 \text{ y } a_i^\top x \leq b_i) \\ &\leq \lambda b_i + (1 - \lambda)b_i && \text{(pues } 1 - \lambda \geq 0 \text{ y } a_i^\top y \leq b_i) \\ &= b_i \end{aligned}$$

Es decir, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in P$. Con esto se concluye la convexidad de P . □

3.2.2. Vértices, puntos extremos, y soluciones básicas

Definición 20 (Punto extremo). Sea P un poliedro. Un vector $x \in P$ es un **punto extremo** de P si es que no existen $y, z \in P$, ambos diferentes de x , $y \lambda \in (0, 1)$, tales que $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$.

En otras palabras, un punto en P es extremo si no puede ser escrito como combinación convexa de dos puntos distintos en S .

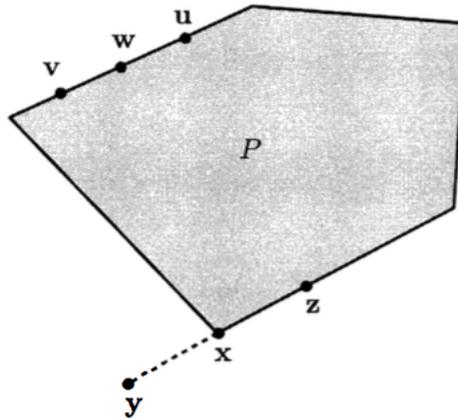


Figura 3.7: Ilustración de punto extremo en un poliedro P . El único punto extremo en la figura es x , pues para escribirlo como combinación convexa de otros puntos, debemos usar un punto $y \notin P$.

Definición 21 (Vértice). Sea P un poliedro. Un vector $x \in P$ es un vértice de P si existe c tal que $c^\top x < c^\top y$ para todo $y \in P$ tal que $y \neq x$.

Es decir, un punto en P es un vértice si existe un hiperplano tal que interseca P sólo en el punto x , y tal que P está a un solo lado del hiperplano.

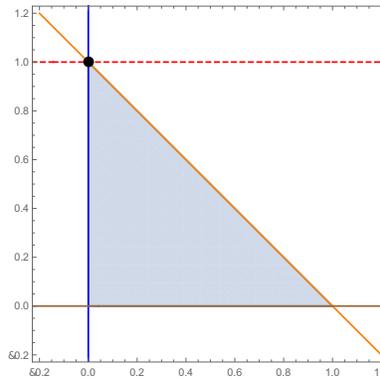


Figura 3.8: Ilustración de un vértice. El punto $x = (0, 1)$ es un vértice pues tomando $c = (0, -1)^\top$ nos da que $c^\top x = -1 < c^\top y = -y_2$ para todo $y \in P$.

Las dos definiciones que hemos visto, puntos extremos y vértices, son nociones geométricas, útiles para visualizar lo que ocurre. Sin embargo, es necesario tener alguna noción más algebraica de estos puntos para así poder trabajar con ellos solo teniendo la descripción matricial del poliedro. Al igual que en lo anterior, dado un poliedro $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, denotamos por $a_i^\top x \leq b_i$ la restricción dada por la fila i -ésima de A .

Definición 22. Sea $x \in P$. Diremos que la restricción $i \in \{1, \dots, m\}$ es activa en x si $a_i^\top x = b_i$. Al conjunto de restricciones activas en x lo denotamos por $I(x) = \{i \in \{1, \dots, m\} : a_i^\top x = b_i\}$.

En lo que sigue, utilizaremos resultados importantes de álgebra lineal que iremos repasando. Si para algún punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $I(x^*)$ tiene cardinalidad n , es decir, si hay n restricciones

que se satisfacen con igualdad, y además las filas que definen estas restricciones son linealmente independientes, entonces x^* es el único punto en satisfacer este conjunto de restricciones con igualdad.

Definición 23. Dado un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$ en \mathbb{R}^n , el subespacio generado por S , denotado por $\langle S \rangle$, son todos los puntos que se obtienen como combinación lineal de elementos de S . Es decir,

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i : \alpha \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

El siguiente teorema nos permitirá caracterizar el tipo de puntos que satisface n restricciones con igualdad. Este teorema es un resultado conocido de álgebra lineal, el cual probamos más abajo.

Teorema 2. Sea $x^* \in \mathbb{R}^n$ y sea $I(x^*)$ el conjunto de restricciones activas en $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existen n vectores en el conjunto $\{a_i : i \in I(x^*)\}$ que son linealmente independientes.
2. El conjunto $\{a_i : i \in I(x^*)\}$ genera \mathbb{R}^n , es decir, $\langle \{a_i : i \in I(x^*)\} \rangle = \mathbb{R}^n$.
3. El sistema de ecuaciones dado por $a_i^\top x = b_i$ con $i \in I(x^*)$ posee solución única.

Recordemos que un conjunto de vectores $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n si i) $\langle V \rangle = \mathbb{R}^n$ y ii) son linealmente independientes. Dado un subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^n$, denotamos por S^\top al subespacio ortogonal a S , es decir, $S^\top = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle = 0 \text{ para todo } x \in S\}$. Para demostrar el Teorema 2 necesitaremos el siguiente lema.

Lema 1.

1. Sea $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $\langle V \rangle = \mathbb{R}^n$. Entonces existe $\tilde{V} \subseteq V$ tal que \tilde{V} es base de \mathbb{R}^n .
2. Sea $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n . Entonces, V es una base de \mathbb{R}^n .
3. Sea $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto de vectores. Entonces, $\langle V \rangle \neq \mathbb{R}^n$ si y solo si existe $d \neq 0$ tal que $d \in \langle V \rangle^\top$.

Demostración del Teorema 2. Veamos primero que (1) \Rightarrow (2). Supongamos que existen n vectores en el conjunto $\{a_i : i \in I(x^*)\}$ que son linealmente independientes, digamos B . Gracias al Lemma 1 (2), B es una base de \mathbb{R}^n , es decir, $\langle B \rangle = \mathbb{R}^n$. Luego, como $B \subseteq \{a_i : i \in I(x^*)\}$, también tenemos que $\langle \{a_i : i \in I(x^*)\} \rangle = \mathbb{R}^n$.

Ahora demostraremos que (2) \Rightarrow (1). Supongamos que $\{a_i : i \in I(x^*)\}$ genera \mathbb{R}^n . Gracias al Lemma 1 (1), existe un subconjunto de vectores $T \subseteq \{a_i : i \in I(x^*)\}$ tal que T es una base de \mathbb{R}^n . En particular, T es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Para probar (2) \Rightarrow (3), por contradicción supongamos que no se tiene (3), es decir, el sistema de ecuaciones posee más de una solución. Sean x_1 y x_2 dos soluciones distintas. Luego, $a_i^\top (x_1 - x_2) = 0$ para todo $i \in I(x^*)$. Esto implica que $d = x_1 - x_2 \in \langle \{a_i : i \in I(x^*)\} \rangle^\top$. Como $d \neq 0$, gracias al Lemma 1 (3) tenemos entonces que $\{a_i : i \in I(x^*)\}$ no genera \mathbb{R}^n . Esto es una contradicción.

Por último, probaremos (3) \Rightarrow (2) por contradicción. Supongamos ahora que $\{a_i : i \in I(x^*)\}$ no genera \mathbb{R}^n . Luego, gracias al Lemma 1 (3), existe $d \neq 0$ tal que $d \in \langle \{a_i : i \in I(x^*)\} \rangle^\top$, es decir, $a_i^\top d = 0$ para todo $i \in I(x^*)$. En particular, si existe una solución x al sistema de ecuaciones entonces $x + d$ es otra solución. Esto es una contradicción. \square

En lo que sigue diremos que un conjunto de restricciones I es *linealmente independiente* si el conjunto de vectores $\{a_i : i \in I\}$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^n . En los ejemplos en \mathbb{R}^2 pudimos ver que los puntos extremos del polígono se pueden obtener resolviendo un sistema de dos ecuaciones en \mathbb{R}^2 , y estas dos restricciones son activas en el punto encontrado. Esto, sumado el teorema anterior, sugiere la siguiente manera de encontrar estos puntos: tomamos un total n restricciones linealmente independientes en P , y resolvemos el sistema obtenido al considerar las restricciones como igualdades. La única solución encontrada será factible si además satisface el resto de las restricciones.

Definición 24 (Solución básica). *Considere un poliedro P en \mathbb{R}^n y sea $x^* \in \mathbb{R}^n$.*

1. *El vector x^* es solución básica si de todas las restricciones que son activas en x^* existen n que son linealmente independientes. Es decir, el conjunto de vectores $\{a_i : i \in I(x^*)\}$ tiene n vectores linealmente independientes.*
2. *El vector x^* es solución básica factible si además de ser básica se tiene $x^* \in P$.*

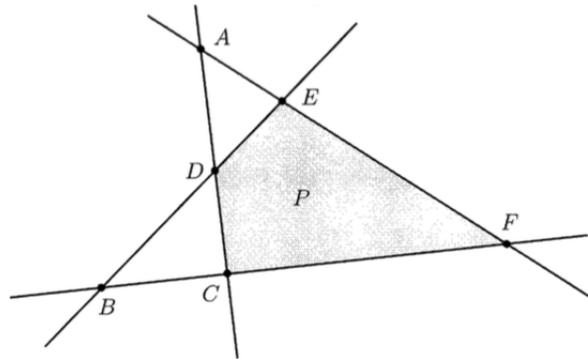


Figura 3.9: Ilustración de soluciones básicas. A y B son soluciones básicas, sin embargo no son factibles. C, D, E, F son soluciones básicas factibles.

En el teorema siguiente mostraremos que las tres nociones que hemos visto son equivalentes.

Teorema 3. *Sea P un poliedro no-vacío y sea $x \in P$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- x es un vértice.
- x es un punto-extremo.
- x es una solución básica factible.

Demostración. En esta demostración supondremos que P está dado por $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

- Vértice \Rightarrow Punto extremo.

Supongamos que x es vértice. Por definición existe c tal que $c^\top x < c^\top u$ para todo $u \in P$ tal que $u \neq x$. Supongamos que x no es un punto extremo, es decir, suponemos que existen $z, y \in P$ (ambos distintos de x) y $\lambda \in]0, 1[$ tales que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z$$

Como x es un vértice, entonces $c^\top x < c^\top z$ y $c^\top x < c^\top y$. Pero esto implica que

$$c^\top x = c^\top(\lambda y + (1 - \lambda)z) = \lambda c^\top y + (1 - \lambda)c^\top z > \lambda c^\top x + (1 - \lambda)c^\top x = c^\top x$$

Lo cual es una contradicción.

- Punto extremo \Rightarrow Solución básica factible.

Supongamos que $x \in P$ no es solución básica. Dado que la solución no es básica, no existen n filas linealmente independientes en el conjunto $\{a_i : i \in I(x)\}$. Por lo tanto existe $d \in \{a_i : i \in I(x)\}^\top$ no nulo. Es decir

$$a_i^\top d = 0 \quad \forall i \in I(x).$$

Esto implica que $a_i^\top(x + \lambda d) = b_i$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ con $i \in I(x)$. Por otro lado, si consideramos $i \notin I(x)$ entonces $a_i^\top x < b_i$. Si elegimos ε lo suficientemente pequeño, tendremos entonces que $a_i^\top(x + \varepsilon d) \geq b_i$ y $a_i^\top(x - \varepsilon d) \geq b_i$ para todo $i \notin I(x)$. Esto implica que

$$x + \varepsilon d \in P \quad \wedge \quad x - \varepsilon d \in P.$$

Pero como

$$x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon d) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon d)$$

obtenemos una contradicción con x siendo punto extremo.

- Solución básica factible \Rightarrow Vértice.

Sea x solución básica factible. Definimos $c = \sum_{i \in I(x)} a_i$. Con esto, tenemos que

$$c^\top x^* = \sum_{i \in I(x)} a_i^\top x^* = \sum_{i \in I(x)} b_i.$$

Ahora sea $y \in P$ cualquiera distinto de x , nos gustaría demostrar que $c^\top y > c^\top x$. Notar que $c^\top y = \sum_{i \in I(x)} a_i^\top y$. Sin embargo, $a_i^\top y \leq b_i$ para todo $y \in P$ (por definición de P), lo cual implica que

$$c^\top y \geq \sum_{i \in I(x)} b_i.$$

Más aún, la igualdad sólo se puede alcanzar cuando $a_i^\top y = b_i$ para todo $i \in I(x)$. Como hay n filas en $I(x)$ linealmente independientes, este sistema tiene una solución única (que debe ser x). Luego, para todo $y \neq x$ debe tenerse $c^\top y > c^\top x$. \square

Corolario 1. *El número de puntos extremos de un poliedro es finito.*

Demostración. Esto se tiene pues en n dimensiones podemos tener a lo más n restricciones linealmente independientes. Por ende, si el problema tiene $m \geq n$ restricciones, pueden existir a lo más $\binom{m}{n}$ soluciones básica-factibles. Como los puntos extremos son soluciones básica-factibles se tiene el resultado. \square

Notar que, aunque sean finitos, el número de soluciones básicas factibles puede ser exponencial en la dimensión, por ejemplo, basta considerar el cubo n -dimensional,

$$P_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

El polítopo P_n posee 2^n soluciones básicas factibles.

3.2.3. Optimalidad se alcanza en puntos extremos.

Ahora veremos una secuencia de resultados que confirmarán la intuición geométrica de que (casi) siempre habrá un vértice que sea óptimo. Esto es uno de los resultados clave en programación lineal. Para probar esto primero debemos estudiar la existencia de puntos extremos en poliedros. En la mayoría de los ejemplos que hemos visto la existencia se tiene, sin embargo esto podría no ser verdad. Para ello basta considerar por ejemplo la región

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_2 \leq 2\}.$$

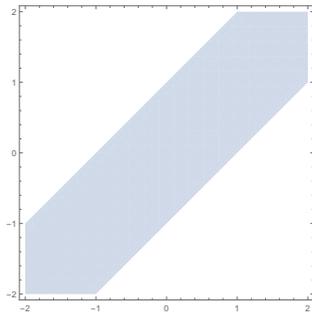
Esta región es un poliedro, sin embargo, no posee puntos extremos.

Definición 25. Decimos que un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ contiene una línea si existe \bar{x} y $d \neq 0$

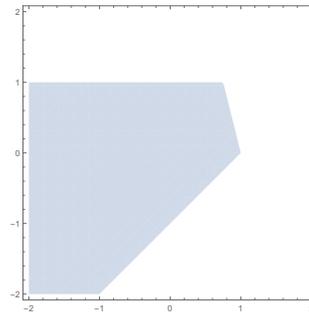
$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \bar{x} + \mu d, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq C$$

El conjunto de la izquierda es simplemente una línea infinita que pasa por \bar{x} y que tiene dirección d .

El que un poliedro tenga o no una línea está relacionado con que tenga puntos extremos. En la siguientes figuras vemos ejemplos de poliedros con/sin líneas.



(a) En este caso el poliedro tiene una línea. Las “puntas” superior derecha e inferior izquierda son solo los límites del dibujo. El poliedro es una banda infinita.



(b) En este caso el poliedro no tiene una línea, y tiene un punto extremo

Teorema 4. Suponga que el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$ es no-vacío. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes,

- (a) El poliedro P tiene al menos un punto extremo.
- (b) El poliedro P no contiene una línea.
- (c) Existen n vectores de la familia $\{a_1, \dots, a_m\}$ que son linealmente independientes.

Demostración.

(b) \Rightarrow (a). Sea $x \in P$ cualquiera y considere $I(x)$ las restricciones activas en x . Si entre los vectores $\{a_i\}_{i \in I(x)}$ hay n que son linealmente independientes, entonces encontramos un punto extremo. Si hay menos de n vectores linealmente independientes, entonces debe existir un $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_i^\top d = 0$ para $i \in I(x)$. Considere ahora una línea $y = x + \lambda d$. Observe que todos los puntos en la línea son activos en todas las restricciones de $I(x)$ pues

$$a_i^\top (x + \lambda d) = b_i \quad \forall i \in I(x).$$

Dado que P no contiene líneas, debe existir un λ tal al movernos con un paso λ topamos con una restricción nueva de P . Es decir, existe λ^* y $j \notin I(x)$ tal que $a_j^\top(x + \lambda^*d) = b_j$. Este nuevo vector a_j debe ser linealmente independiente de las restricciones en $I(x)$. En efecto, de lo contrario $a_j = \sum \delta_i a_i$ y $b_j = \sum \delta_i b_i$ para algún vector δ . Esto implicaría que $a_j^\top x = b_j$, lo cual contradice $j \notin I(x)$. Aplicando este argumento de forma recursiva, observamos que en a lo más n iteraciones encontramos n restricciones linealmente independientes que son activas en algún punto de P . Esto implica que existe un punto extremo.

(a) \Rightarrow (c). Si P tiene punto extremo, entonces es una solución básica. Por lo tanto, existen n restricciones linealmente independientes.

(c) \Rightarrow (b). Sean $\{a_1, \dots, a_n\}$ filas linealmente independientes. Suponga por contradicción que P tiene una línea $x + \lambda d$, donde $d \neq 0$. Entonces, $a_i^\top(x + \lambda d) \leq b_i$ para todo λ , luego $a_i^\top d = 0$ (si no, podríamos elegir $\lambda \rightarrow \infty$ o $\lambda \rightarrow -\infty$ y violar alguna de las restricciones). Como las filas son linealmente independientes, concluimos que $d = 0$. Esto es una contradicción. \square

En particular, si un polítopo es acotado entonces no posee una línea, y por lo tanto existe algún punto extremo.

Corolario 2. *Todo polítopo posee al menos un punto extremo.*

Corolario 3. *Todo poliedro en forma estándar tiene al menos un punto extremo.*

Demostración. Este corolario es directo pues un poliedro P está en forma estándar si $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, y la restricción $x \geq 0$ previene que tenga líneas. \square

Teorema 5. *Considere el problema:*

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x \\ \text{sujeto a:} \quad & x \in P \end{aligned}$$

donde P es un poliedro que tiene al menos un punto extremo. Luego, el mínimo del problema es $-\infty$ o bien existe una solución óptima que es punto extremo de P .

Demostración. Supongamos que el mínimo del problema no es $-\infty$, lo cual implica que el conjunto de soluciones óptimas Q es no-vacío. Si $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, y v es el valor óptimo del problema, entonces, $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, c^\top x = v\}$ también es un poliedro. Dado que $Q \subseteq P$, sabemos que Q no contiene líneas. Sea x^* punto extremo de Q . Veamos que x^* es punto extremo de P . Si existen $y, z \in P$ tales que $x^* = \lambda y + (1 - \lambda)z$ para $\lambda \in]0, 1[$ e $y \neq x^*, z \neq x^*$, entonces, $v = c^\top x^* = c^\top(\lambda y + (1 - \lambda)z) = \lambda c^\top y + (1 - \lambda)c^\top z$, lo que implica $c^\top y = c^\top z = v$. Pero esto implica $y, z \in Q$, lo que contradice la extremalidad de x^* en Q .

Con esto concluimos que x^* es una solución óptima que es además un punto extremo de P . \square

A pesar de que n restricciones linealmente independientes definen una solución básica factible x , podría ocurrir que $|I(x)| > n$. Para esto definimos lo siguiente

Definición 26. *Sea x una solución básica factible de un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que la solución es degenerada si $|I(x)| > n$.*

Por ejemplo, consideremos el polítopo

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^2 : x_2 - x_1 \leq 0 \right\}.$$

El punto $(0, 0)$ es solución básica factible definida por las restricciones activas $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Sin embargo, $x_2 - x_1 \leq 0$ también es activa en $(0, 0)$. Luego, esta solución es degenerada.

Ejercicio 6. Dibuje la región factible del ejemplo anterior y observe como se ven las restricciones en el punto $(0, 0)$.

3.3 Algoritmo Simplex

Los resultados de la sección anterior son el principal motor tras uno de los algoritmos más exitosos de optimización: el método Simplex. Este método fue el primero que permitió resolver problemas con restricciones de manera *eficiente* y hoy en día sigue siendo ampliamente utilizado en la práctica. Muchos algoritmos elaborados de optimización utilizan el algoritmo Simplex como una sub-rutina.

La idea detrás del algoritmo Simplex es sumamente intuitiva: basta con moverse de un punto extremo al otro hasta encontrar el óptimo. Para esto debemos responder dos preguntas: primero, si estamos en un punto extremo ¿cómo saber si es un óptimo o no? y de no estar en un óptimo, ¿cómo saber hacia donde moverse de manera de no violar restricciones y llegar a otro punto extremo? En esta sección veremos como hacer ambas cosas.

3.3.1. Soluciones básicas y problemas en forma estándar

Para el método Simplex será útil trabajar con problemas en forma estándar, es decir:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ \text{sujeto a:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ya hemos visto como llevar *cualquier* problema de optimización lineal a un problema en forma estándar. Un ejemplo para refrescar la memoria se presenta a continuación:

Ejemplo 12. Consideremos P dado por

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 8, \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 0, \\ -x_1 + x_2 &\geq -2, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 22, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Primer debemos introducir variables de holgura de manera que las primeras cuatro restricciones de desigualdad sean de igualdad. Para ello, consideremos x_3, x_4, x_5, x_6 . La variable x_1 es irrestricta, y por lo tanto, introducimos dos nuevas variables x_1^+, x_1^- de manera que $x_1 = x_1^+ - x_1^-$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} -x_1^+ + x_1^- + 2x_2 + x_3 &= 8, \\ 3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 - x_4 &= 0, \\ -x_1^+ + x_1^- + x_2 - x_5 &= -2, \\ x_1^+ - x_1^- + 4x_2 + x_6 &= 22, \\ x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Además, sabemos de la sección anterior que un problema en esta forma está garantizado a tener puntos extremos. Dada una matriz A denotaremos por A_i a su i -ésima columna y a_i su i -ésima fila. Partiremos por caracterizar de manera más directa los puntos extremos de un problema en forma

estándar.

Como estamos trabajando en forma estándar, parte del conjunto factible está determinado por un sistema lineal $Ax = b$. Asumiremos que este sistema lineal es consistente. Más aún, asumiremos que todas las filas de A son linealmente independientes, pues si no lo fueran, algunas ecuaciones en $Ax = b$ serían redundantes y podemos eliminarlas. Notar que esto implícitamente implica que $m \leq n$, es decir, pueden haber a lo más n restricciones de igualdad. Además, sabemos de Álgebra Lineal que si hay m filas linealmente independientes en una matriz, entonces también hay m columnas linealmente independientes. Esto será importante más adelante.

Teorema 6. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Considere el sistema:

$$Ax = b, x \geq 0$$

con todas las filas de A linealmente independientes. Entonces, \hat{x} es solución básica si y solo si se tiene que $A\hat{x} = b$, y existen índices i_1, \dots, i_m tales que:

- (a) las columnas A_{i_1}, \dots, A_{i_m} son linealmente independientes, y
- (b) las otras columnas son tales que $\hat{x}_i = 0$.

Demostración. Primero, supongamos que $A\hat{x} = b$ y que (a) y (b) se satisfacen. Vamos a demostrar que \hat{x} es solución básica.

Las restricciones activas para \hat{x} son $Ax = b$ y $x_i = 0$ para $i \neq i_1, \dots, i_m$. Notar que en total estas son n restricciones. Debemos mostrar que son todas linealmente independientes. Tenemos que

$$\sum_{k=1}^m A_{i_k} x_{i_k} = \sum_{i=1}^n A_i x_i = Ax = b.$$

De esto sigue, directamente, que

$$\sum_{k=1}^m A_{i_k} x_{i_k} = b.$$

Dado que las columnas A_{i_k} son linealmente independientes, la matriz

$$(A_{i_1} \quad A_{i_2} \quad \cdots \quad A_{i_m})$$

es invertible, entonces existe una única solución a $\sum_{k=1}^m A_{i_k} x_{i_k} = b$. Además, si aumentamos el sistema a las variables restantes x_i $i \neq i_1, \dots, i_m$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m A_{i_k} x_{i_k} &= b && (m \text{ ecuaciones}) \\ x_i &= 0 \quad \forall i \neq i_1, \dots, i_m && (n - m \text{ ecuaciones}) \end{aligned}$$

claramente también tiene solución única, y esta debe ser \hat{x} . De aquí podemos concluir que existen n restricciones activas en \hat{x} que son linealmente independientes. Es decir, \hat{x} debe ser básica.

Ahora, supongamos que \hat{x} es solución básica, y veamos que (a) y (b) se cumplen. El argumento es similar al que acabamos de ver. Sean i_1, \dots, i_k los índices que satisfacen $\hat{x}_{i_j} \neq 0$ para $j = 1, \dots, k$. Al ser \hat{x} básica, sabemos que existen n restricciones linealmente independientes que son activas en

\hat{x} . Esto implica que \hat{x} es solución única del sistema $Ax = b$, $x_i = 0$ para todo $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Esto, entonces, implica que \hat{x} es solución única de

$$\sum_{j=1}^k A_{i_j} x_{i_j} = b.$$

Luego, concluimos que A_{i_1}, \dots, A_{i_k} son linealmente independientes. Sin embargo, podemos tener que $k < m$ (en ningún caso tendremos $k > m$, ya que A es de rango m). Como A es de rango m , sabemos que existen $m - k$ columnas $A_{i_{k+1}}, \dots, A_{i_m}$ que son linealmente independientes, y, que juntas a las columnas A_{i_1}, \dots, A_{i_k} generan \mathbb{R}^m . Como las restantes columnas (e.g., las columnas A_i tales que $i \neq i_1, \dots, i_m$) siguen siendo tales que $x_i = 0$, concluimos que (a) y (b) se cumplen. \square

Con este teorema podemos obtener fácilmente puntos extremos de un poliedro en forma estándar, identificando columnas que sean linealmente independientes.

Definición 27. Dado un sistema en forma estándar $Ax = b$, $x \geq 0$ y un subconjunto de columnas A_{i_1}, \dots, A_{i_m} que son linealmente independientes, decimos que la matriz

$$B = [A_{i_1} \ A_{i_2} \ \dots \ A_{i_m}]$$

define una base de A . Observe que una matriz base es de $m \times m$ y de rango m , por lo tanto es invertible.

Ejemplo 13. Considere la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las columnas A_1, A_3 y A_4 son linealmente independientes y definen la base,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 14. Considere el poliedro,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 - x_1 &\geq 0 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Buscaremos una solución básica usando la definición de base. Partimos por llevar este poliedro a su forma estándar. Si agregamos las variables de holgura x_3, x_4 y x_5 obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_1 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

esto corresponde a un poliedro en forma $Ax = b, x \geq 0$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos las columnas 1, 2 y 5. Es decir, las variables x_1, x_2 y x_5 . La matriz,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

es invertible, por lo que define una base. Según el teorema anterior, para obtener una solución básica factible bastaría con fijar

$$x_3 = x_4 = 0$$

y resolver

$$Ax = b \Rightarrow B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = b$$

Como B es invertible, para resolver el sistema debemos calcular $B^{-1}b$.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con esto, la solución básica correspondiente es

$$x = (1/2, 1/2, 0, 0, 1).$$

Notar que además es factible! Pues $x_i \geq 0$ para todo i .

Observación 1. Considere un sistema en forma estándar $Ax = b$, $x \geq 0$. Toda base del sistema tiene asociada una única solución básica. Sin embargo, una solución básica puede tener asociada múltiples bases. Por ejemplo, si consideramos el siguiente poliedro en forma estándar

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Este tiene como matrix $A = [1, 1, -1]$. En este caso cualquier columna nos da una base. Si elegimos la primera columna como base, entonces $x_2 = x_3 = 0$ y

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Es decir obtenemos la solución básica factible $(0, 0, 0)$. Por otro lado, si elegimos la segunda columna como base, entonces $x_1 = x_3 = 0$ y

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Es decir, obtenemos el mismo punto $(0, 0, 0)$ de distintas bases! De hecho, eligiendo la tercera columna como base también nos da el punto $(0, 0, 0)$.

Definición 28. Considere un sistema en forma estándar $Ax = b$, $x \geq 0$, y una base $B = [A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_m}]$. Decimos que las variables x_{i_1}, \dots, x_{i_m} son las variables básicas asociadas a la base B . Al resto de las variables se les llama no-básicas

Observación 2. Si P es un poliedro en forma estándar, $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, entonces x es degenerada (ver Definición 26) si y solo si tiene más de $n - m$ ceros. En efecto, dado que las m restricciones dadas por $Ax = b$ son activas y linealmente independientes, afirmar que hay más de n restricciones activas es sinónimo de afirmar que deben haber al menos $n - m$ restricciones de no-negatividad activas.

Ejemplo 15. Consideremos el Ejemplo 12, y tomemos las variables x_1^+, x_2, x_3, x_4 como básicas. Luego, $x_1^- = x_5 = x_6 = 0$, y el sistema para las variables básicas viene dado por

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \\ 22 \end{pmatrix}$$

La solución al sistema es $(x_1^+, x_2, x_3, x_4) = (6, 4, 6, 26) \geq 0$, y por lo tanto x es factible. Si uno escoge como variables básicas a x_1^+, x_3, x_4, x_5 es posible chequear que la solución básica obtenida no es factible.

Ejercicio 7. Considere el poliedro P definido por las restricciones,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 + x_3 &\leq 1 \\ x_3 + x_4 &\leq 1 \\ x_4 + x_1 &\leq 1 \\ 0 &\leq x_1 \leq 1 \\ 0 &\leq x_2 \leq 1 \\ 0 &\leq x_3 \leq 1 \\ 0 &\leq x_4 \leq 1 \end{aligned}$$

Analizar si las siguientes soluciones son básicas y/o degeneradas:

$$(1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0.2, 0.3, 0.5, 0.5) \text{ y } (0.5, 0.5, 0.5, 0.5).$$

En los casos degenerados (si los hay), indique si hay más de una base asociada a la solución.

3.3.2. Dicionarios

Considere un poliedro en forma estándar $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ y un conjunto de índices $B(1), \dots, B(m)$ que definen una matriz base $B = [A_{B(1)} \dots A_{B(m)}]$. Es decir, B es una submatriz de A que es invertible. Supongamos que $N(1), \dots, N(n - m)$ son los índices no-básicos y $N = [A_{N(1)} \dots A_{N(n-m)}]$ la matriz no-básica correspondiente.

Esto implica que podemos separar las variables x en sus componentes básicas, que denotamos x_B , y sus componentes no-básicas, que denotamos x_N . Más aún, con esta notación podemos escribir

$$Ax = b \text{ si y solo si } Bx_B + Nx_N = b.$$

Como B es invertible, podemos escribir entonces $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$. Esto refuerza lo que discutimos arriba: si fijamos una base B , y ponemos los valores de x_N iguales a 0, entonces la solución básica queda determinada completamente. La solución, por supuesto, depende de la base que elijamos.

Esta idea la podemos llevar un paso más allá y nos permite llevar cualquier problema de programación lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín } & c^\top x \\ \text{sujeto a: } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

a la siguiente forma

$$\text{mín } c_B^\top B^{-1}b + (c_N^\top - c_B^\top B^{-1}N)x_N \quad (3.5a)$$

$$\text{sujeto a: } x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad (3.5b)$$

$$x \geq 0 \quad (3.5c)$$

Lo único que hicimos acá fue reemplazar $Ax = b$ por la fórmula descrita para x_B , y hacer lo mismo con la función objetivo, pues

$$c^\top x = c_B^\top x_B + c_N^\top x_N.$$

La expresión (3.5) se llama informalmente el *diccionario* asociado a la base B .

Definición 29. Sea B una base, x la solución básica asociada y c_B el vector de costos de las variables básicas. Para cada índice j definimos el costo reducido \bar{c}_j asociado a la variable x_j como

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^\top B^{-1}A_j.$$

Observemos que el costo reducido de las variables básicas es nulo. En efecto, si j es un índice de una variable básica, entonces A_j corresponde a una columna de B . Por lo tanto $B^{-1}A_j = e_j$, donde e_j es el j -ésimo vector canónico que tiene un 1 en la entrada j y 0 en el resto. Luego

$$c_j - c_B^\top B^{-1}A_j = c_j - c_B^\top e_j = c_j - c_j = 0.$$

Notar que el costo reducido de una variable es simplemente el coeficiente que tiene esa variable en la función objetivo (3.5a).

¿Por qué nos importa esto de describir un problema en términos de diccionarios? Veamos un ejemplo.

Ejemplo 16. Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \text{mín } & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a: } & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Si lo ponemos en forma estándar agregando holguras (digamos x_3, x_4 y x_5) nos queda

$$\begin{aligned} \text{mín } & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a: } & 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

De acá podemos ver que las variables $\{x_1, x_3, x_5\}$ definen una base. En efecto,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, las variables no-básicas serían $\{x_2, x_4\}$, por lo que

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para escribir el diccionario necesitamos computar $B^{-1}b$ y $B^{-1}N$:

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El diccionario asociado a esta base es,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 4 + 3x_2 - 2x_4 \\ \text{sujeto a:} \quad & x_1 = 2 + x_2 - x_4 \\ & x_3 = 0 - 4x_2 + 3x_4 \\ & x_5 = 3 - x_2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

En este caso, $c_B^\top B^{-1}b = 4$, y $\bar{c}_N = (3, -2)$. La solución básica asociada a B es $x_B = B^{-1}b$ y $x_N = 0$, o equivalentemente, $x_1 = 2$, $x_3 = 0$, $x_5 = 3$, $x_2 = x_4 = 0$.

¿Es óptima esta solución? Si vemos el último problema de optimización, x_2 tiene un costo reducido de 3. Es decir, que el valor de $x_2 = 0$ es lo más conviene para minimizar. Sin embargo, x_4 tiene un costo reducido de -2 ! Por lo tanto no nos conviene tener $x_4 = 0$, si no que es mejor aumentar el valor de x_4 . Todo este análisis es posible gracias al diccionario, que nos permite ver si fijar $x_N = 0$ es lo mejor, y si no, en que variable conviene incrementar. En la sección 3.3.4 formalizaremos esto. Primero veremos cómo movernos de una solución básica a otra.

3.3.3. Direcciones básicas

Ahora veremos como podemos movernos de una solución básica a otra. Partimos por definir qué es una dirección factible.

Definición 30. Sea x elemento de un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Un vector $d \in \mathbb{R}^n$ es dirección factible en x si existe $\delta > 0$ tal que $x + \delta d \in P$.

Observemos que si P está en forma estándar, entonces toda dirección factible d debe satisfacer $Ad = 0$, esto pues para que $x + \delta d$ esté en el poliedro, entonces

$$A(x + \delta d) = b$$

y como $x \in P$, entonces $Ax = b$, lo que implica $Ad = 0$.

Cada solución básica factible está determinada por una base, y por lo tanto para movernos de una solución a otra podemos considerar una dirección factible que nos permita cambiar de base y obtener otra solución básica. Para que una variable no básica x_j deje serlo, debemos aumentar su valor. Por lo tanto buscamos d tal que $d_j = 1$. Si hacemos que $d_i = 0$ para todo el resto $i \in N \setminus \{j\}$ de variables no básicas, ellas mantendrán su valor en cero y se mantendrán no-básicas. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 31. Considere un poliedro en forma estándar $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$. Digamos que x es una solución básica en P , y supongamos que $B(1), \dots, B(m)$ corresponden a los índices de las variables básicas. Sea $j \in N$, es decir, el índice de una variable no-básica. Decimos que $d \in \mathbb{R}^n$ es dirección básica en x en la componente j si: (a) $d_j = 1$, (b) $d_i = 0$ para todo índice no-básico $i \neq j$.

Una dirección básica es tal que: cambia el valor de *una y solo una* variable no-básica. Las variables básicas podrían cambiar todas, como veremos a continuación.

Sabemos que una dirección factible para un poliedro en forma estándar debe cumplir $Ad = 0$. Como en una dirección básica todos los índices no-básicos valen 0, salvo el índice j , tenemos que:

$$Ad = 0 \Rightarrow Bd_B + Nd_N = 0 \Rightarrow d_B = -B^{-1}Nd_N = -B^{-1}A_j.$$

Por lo tanto una dirección básica tiene la forma $d = (d_B, d_N)$ con $d_B = -B^{-1}A_j$ y $d_N = e_j$ (donde e_j es el vector que tiene ceros, salvo un 1 en la posición j).

Observación 3. Una dirección básica podría no ser factible para la solución básica asociada. En efecto, para tener factibilidad necesitamos que, además de lo anterior, se tenga que $x + \delta d \geq 0$. Para las variables no básicas esto se tiene por construcción. Para el caso de las variables básicas, si x es no degenerado entonces $x_B > 0$, y por lo tanto $x + \delta d \geq 0$ para un valor de δ lo suficientemente pequeño. El caso en que x es degenerado, podría pasar que $x_i = 0$ con i básico y que $d_i < 0$, en cuyo caso $x_i + \delta d_i = \delta d_i < 0$, lo cual hace este punto infactible. Veremos un caso así en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 17. Volvamos al Ejemplo 16:

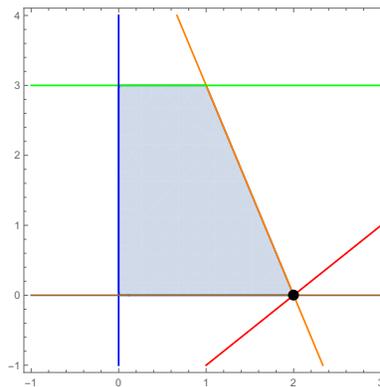
$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Llevando este problema a forma estándar y usando como base $\{x_1, x_3, x_5\}$ llegamos al diccionario

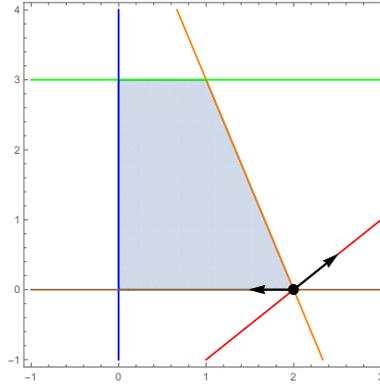
$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 4 + 3x_2 - 2x_4 \\ \text{sujeto a:} \quad & x_1 = 2 + x_2 - x_4 \\ & x_3 = 0 - 4x_2 + 3x_4 \\ & x_5 = 3 - x_2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Para este ejemplo graficaremos los conceptos en las 2 dimensiones originales x_1 y x_2 , aunque todo el análisis estará hecho en 5 dimensiones.

La solución básica que calculamos en este caso es $x = (2, 0, 0, 0, 3)$. En el siguiente dibujo mostramos el poliedro y dicha solución en las variables x_1, x_2 .



En este caso las variables no-básicas son x_2 y x_4 , por lo que tenemos 2 opciones para direcciones básicas. Al calcular la dirección básica dada por $j = 2$ obtenemos que $d_B = (1, -4, -1)$ (verificar!) luego, $d = (1, 1, -4, 0, -1)$. Análogamente, la dada por $j = 4$ es tal que $d_B = (-1, 3, 0)$, luego, $d = (-1, 0, 3, 1, 0)$. Si plotamos estas direcciones desde la solución básica (en las primeras 2 dimensiones) se ve así:



Donde la flecha que va a lo largo de la línea roja corresponde a la dirección dada por $j = 2$, y la que va a lo largo de la línea café corresponde a $j = 4$. Hay varias cosas que podemos observar acá:

- No hay ninguna dirección que vaya a lo largo de la línea naranja! Eso se debe a nuestra elección de base. El punto extremo que estamos considerando tiene más de una base.
- La dirección básica dada por x_2 inmediatamente sale del poliedro, es decir, no es factible! Esto se puede ver analíticamente también. Como el punto es $x = (2, 0, 0, 0, 3)$ y en este caso $d = (1, 1, -4, 0, -1)$, vemos que para cualquier $\delta > 0$ la tercera componente de $x + \delta d$ será:

$$x_3 + \delta d_3 = 0 - 4\delta < 0.$$

- En el dibujo podemos ver que la dirección básica dada por x_4 si es factible. Esto también lo podemos ver analíticamente:

$$x + \delta d = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si δ es pequeño, la expresión de arriba sigue siendo un vector no negativo. Por lo que la dirección es factible.

¿Cuánto es lo máximo que podemos tomar δ ? Siempre que $x + \delta d \geq 0$. En este caso $\delta = 2$. ¿Y qué pasa con este $\delta = 2$? Veamos:

$$x + \delta d = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Notar que en este caso las primeras 2 variables son 0, es decir, en el dibujo de más arriba llegamos al punto extremo que está en el origen. Que es exactamente lo que queríamos.

Del ejemplo anterior, podemos ver que lo que hizo que fallara la dirección dada por x_2 es que existía una variable básica (x_3) cuyo valor era 0. Es decir, la solución básica era degenerada. Más en general, si la solución básica x no hubiese sido degenerada, entonces $x_B > 0$ y por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que $x_B + \delta d_B \geq 0$.

Observación 4. *Por estas razones, primero desarrollaremos el método asumiendo que todas las soluciones básicas factibles son no-degeneradas. Es decir, dada una dirección básica siempre tendremos que será factible.*

3.3.4. Condiciones de optimalidad

Con lo que vimos arriba, ya sabemos cómo movernos de un punto extremo a otro cuando el problema está en forma estándar. Sin embargo, debemos ahora desarrollar una manera de movernos en una dirección que nos permita *descender* en el valor objetivo, o determinar si ya estamos en un óptimo y no hay manera de descender. Acá entran en juego los costos reducidos (ver Definición 29).

Definición 32. *Sea x elemento de un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Una dirección factible en x dada por $d \in \mathbb{R}^n$ es dirección de descenso si $c^\top d < 0$.*

Con esta definición, podemos probar lo siguiente.

Proposición 2. *Sea x^* un elemento de un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Se tiene que x^* es solución óptima del problema*

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x \\ \text{sujeto a:} \quad & x \in P \end{aligned}$$

si y solo si no existe ninguna dirección de descenso en x^* .

Ejercicio 8. Demostrar la última proposición. En esta demostración es clave usar que un poliedro es un conjunto convexo (ver Teorema 1).

Veamos como se traduce esta condición de optimalidad cuando el poliedro está en forma estándar. Supongamos que estamos en una solución básica con el diccionario correspondiente. Si consideramos una dirección básica, al movernos en esa dirección todas las variables no-básicas quedan igual salvo una. Al ir cambiando esa variable básica, el costo en el objetivo también cambia según el costo en el diccionario, es decir, según el costo reducido.

Ejemplo 18. *Continuemos con el Ejemplo 17. En este ejemplo, los costos reducidos eran 3 y -2 para las variables no-básicas x_2 y x_4 , respectivamente. La solución básica $(2, 0, 0, 0, 3)$ tenía como valor objetivo 4. Al tomar la dirección dada por x_4 incrementamos el valor de la 4-ta componente de x desde 0 hasta 2. Esto fue lo máximo que pudimos aumentar el valor de x_4 pues en paralelo x_1 bajó de 2 a 0. El valor objetivo de la nueva solución $(0, 0, 6, 2, 3)$ es 0. La reducción del valor objetivo coincide exactamente con*

$$(\text{costo reducido de } x_4) \cdot (\text{incremento en } x_4) = -2 \cdot 2 = -4.$$

Los costos reducidos, entonces, se puede interpretar como tasas de cambio en el objetivo al seguir ciertas direcciones. Todo esto sugiere el siguiente resultado. Formalizando esto, al cambiarnos de base con una dirección básica d tenemos que

$$c^\top(x + \delta d) - c^\top x = \delta(c_B^\top d_B + c_j) = \delta(c_j - c_B^\top B^{-1} A_j).$$

Si $\delta > 0$, entonces basta estudiar el valor de $c_j - c_B^\top B^{-1} A_j$ para saber si hay una reducción en el valor de la función objetivo.

Teorema 7. *Considere una solución básica factible x asociada a una base B , y sea \bar{c} el vector de costos reducidos asociado. Si suponemos un problema de minimización, tenemos que:*

- Si $\bar{c} \geq 0$ entonces x es solución óptima.
- Si x es óptima y no-degenerada, entonces $\bar{c} \geq 0$.

Demostración. (a) Supongamos una base B tal que $\bar{c} \geq 0$. Sea x la solución básica asociada. Consideremos $y \in P$ y la dirección $d = y - x$. Claramente d es dirección factible. Dado que $Ad = 0$ sabemos que $d_B = -B^{-1}Nd_N$. ¿Será d dirección de descenso? Para ver esto, notar que

$$c^\top d = c_B^\top d_B + c_N^\top d_N = (c_N^\top - c_B^\top B^{-1}N)d_N.$$

Dado que $\bar{c} \geq 0$ sabemos que $(c_N - c_B^\top B^{-1}N) \geq 0$. Por definición, $d_N = y_N - x_N$, y como $x_N = 0$ y $y_N \geq 0$, tenemos que $d_N \geq 0$. Esto implica que $c^\top d \geq 0$. Es decir d no es dirección de descenso. Esto implica que $c^\top y \geq c^\top x$. Como $y \in P$ era arbitrario, concluimos que x es un óptimo.

(b) Por contradicción, supongamos que existe j tal que $\bar{c}_j < 0$. Sea d la dirección básica asociada a j . Veamos que d es una dirección factible. Primero que todo, sabemos que $Ad = 0$. Además, como estamos en el caso no-degenerado, $x_B > 0$ y entonces $x_B + \delta d_B \geq 0$ para un δ pequeño. Por otro lado, $x_N = 0$ y $d_N = e_j$ por lo que $x_N + \delta d_N \geq 0$. Juntando todo esto vemos que existe un δ pequeño tal que

$$x + \delta d \geq 0.$$

Así que d es efectivamente un dirección factible. Veamos ahora que d es una dirección de descenso:

$$\begin{aligned} c^\top d &= c_B^\top d_B + c_N^\top d_N \\ &= c_B^\top (-B^{-1}Nd_N) + c_N^\top d_N \\ &= -c_B^\top B^{-1}A_j + c_j \\ &= \bar{c}_j < 0. \end{aligned}$$

Esto contradice la optimalidad de x . □

Este último teorema nos dice entonces que dada una solución básica factible tenemos 2 opciones:

- Si los costos reducidos cumplen $\bar{c} \geq 0$, entonces estamos en un óptimo.
- Si no, entonces existe un j tal que $\bar{c}_j < 0$. Este j debe ser el índice de una variable no-básica (las variables básicas tienen costo reducido 0 como vimos arriba). Por lo tanto, nos conviene aumentar x_j desde 0 “lo más posible” para reducir la función objetivo. Esto lo podemos hacer con la dirección básica dada por j que es de descenso cuando la solución es no-degenerada.
- Además, el análisis anterior nos dice que si $d_B \geq 0$, entonces $x + \delta d \geq 0$ para todo $\delta > 0$. En este caso podemos avanzar sin límite y seguir disminuyendo la función objetivo. Esto demuestra que el problema no tiene un óptimo.

Todos estos ingredientes forman el algoritmo Simplex.

3.3.5. Ejecución del algoritmo Simplex: caso no-degenerado

Asumamos que estamos en alguna solución básica factible x . El algoritmo simplex funciona de la siguiente forma:

1. Si los costos reducidos de las variables no básicas son no negativos entonces estamos en un óptimo, gracias al Teorema 7.

2. En otro caso, existe una variable no básica $j \in N$ tal que $\bar{c}_j < 0$ y por lo tanto su dirección básica asociada es de decrecimiento en el valor de la función objetivo. Si x es no-degenerada, la dirección es factible.
3. En esta situación x_j deja de ser cero, y en ese caso decimos que entra a la base. Recordemos que el valor del nuevo vector está dado por $x + \delta d$, con $\delta \geq 0$ escogido de manera que se mantenga dentro del poliedro. Como es una dirección de decrecimiento, tomamos δ que minimice el valor posible en esta dirección, es decir,

$$\delta^* = \text{máx} \left\{ \delta \geq 0 : x + \delta d \in P \right\}.$$

Estudiamos este valor más detenidamente.

Gracias a la elección de la dirección básica d , $A(x + \delta d) = b$ y por lo tanto la única manera en que este punto puede ser infactible es si alguna de sus variables se vuelve negativa. Tenemos en este caso dos situaciones,

- a) Si $d \geq 0$, entonces $x + \delta d \geq 0$ para todo valor de δ y en ese caso el valor óptimo del problema es $-\infty$.
- b) En otro caso, existe i básico tal que $d_i < 0$. Luego, $x_i + \delta d_i \geq 0$ equivale a tomar $\delta \leq -x_i/d_i$. De esta forma, el mayor valor que puede tomar δ es

$$\delta^* = \min_{i: d_i < 0} \left\{ -\frac{x_i}{d_i} \right\}.$$

En este caso la nueva solución básica factible esta dada por $x + \delta^* d$.

Veamos un ejemplo donde se ejecutan algunos pasos del algoritmo Simplex. También ilustraremos qué pasa en presencia de degenerancia.

Ejemplo 19. Consideremos el siguiente PL,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -4x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ & 20x_1 + x_2 + x_5 = 60, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Las variables $B = \{3, 4, 5\}$ forman una base. Con esta base, podemos obtener la solución básica dada por $x_1 = x_2 = 0$, y

$$x_B = B^{-1}b = I_3 \cdot (8, 6, 60) = (8, 6, 60).$$

Esta solución básica es factible, y además no degenerada. Los costos reducidos en las variables no básicas están dados por

$$\begin{aligned} \bar{c}_N^\top &= c_N^\top - c_B^\top B^{-1}N \\ &= (-4, -3) - 0 \cdot I \cdot N \\ &= (-4, -3). \end{aligned}$$

Como el costo reducido es negativo, no estamos en un óptimo. Seleccionemos x_1 como variable no básica entrante. Luego, la dirección básica d^1 asociada a la variable no-básica x_1 se obtiene fijando $d_1^1 = 1$, $d_2^1 = 0$ y

$$d_B^1 = -B^{-1}A_1 = -I_3 \cdot (2, 2, 20) = (-2, -2, -20).$$

El valor de δ^* en esta dirección está dado por

$$\begin{aligned}\delta^* &= \min_{i \in \{3,4,5\}: d_i^1 < 0} \left\{ -\frac{x_i}{d_i^1} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{8}{2}, \frac{6}{2}, \frac{60}{20} \right\} \\ &= 3.\end{aligned}$$

Luego, la solución obtenida al movernos en la dirección d^1 es

$$x + \delta^* d^1 = (0, 0, 8, 6, 60) + 3 \cdot (1, 0, -2, -2, -20) = (3, 0, 2, 0, 0).$$

Notamos que 1 entra a la base, pero x_4 y x_5 tomaron el valor 0. Este es un caso degenerado, por lo que podemos elegir si dejamos a x_4 o a x_5 en la base. Removamos 5 de la base, y por lo tanto nuestra nueva base es $\{1, 3, 4\}$. Luego,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & -2 \\ 0 & 20 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los costos reducidos corresponden a

$$\begin{aligned}\bar{c}_N^\top &= (\bar{c}_2, \bar{c}_5) \\ &= c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N \\ &= (-3, 0) - (-4, 0, 0) \cdot \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & -2 \\ 0 & 20 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-2.8, 0.2).\end{aligned}$$

Como x_2 tiene costo reducido negativo, escogemos movernos en la dirección básica d^2 asociada a x_2 . Luego, $d_2^2 = 1$, $d_5^2 = 0$ y

$$d_B^2 = -B^{-1} A_2 = (-0.05, -1.9, -0.9).$$

Calculamos el valor de δ^* ,

$$\begin{aligned}\delta^* &= \min_{i \in \{1,3,4\}: d_i^2 < 0} \left\{ -\frac{x_i}{d_i^2} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{3}{0.05}, \frac{2}{1.9}, \frac{0}{0.9} \right\} \\ &= 0,\end{aligned}$$

y por lo tanto la nueva solución encontrada es $x + \delta^* d^2 = x = (3, 0, 2, 0, 0)$. Nos quedamos en el mismo punto! Esto ocurre debido a la degenerancia. Cuando simplex llega a una solución degenerada, puede iterar una cantidad infinita de veces si no se escoge una regla adecuada para escoger que variables salen y entran de la base. Sin embargo, en caso de no haber degenerancia Simplex encuentra la solución en número finito de pasos.

Teorema 8. Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ y consideremos el problema lineal $\min\{c^\top x : x \in P\}$. Además supongamos que toda solución básica factible de P es no degenerada. Entonces Simplex termina luego de una cantidad finita de operaciones. Al terminar, se tienen dos posibilidades:

- a) Se tiene una base óptima y una solución básica factible asociada que es óptimo.

b) Se tiene un vector $d \neq 0$ tal que $Ad = 0$, $d \geq 0$ y $c^\top d < 0$, y por lo tanto el valor del problema es $-\infty$.

Demostración. Primero verifiquemos las condiciones al terminar la ejecución de Simplex. Si el algoritmo termina pues los costos reducidos $\bar{c} \geq 0$, entonces se cumplen las condiciones suficientes de optimalidad, y la base es óptima.

Si el algoritmo finaliza debido a que hemos encontrado una variable no básica x_j tal que $\bar{c}_j < 0$, cuya dirección básica $d \geq 0$, entonces $x + \delta d \in P$ para todo $\delta > 0$. Dado que $c^\top d = c_B^\top d_B + c_j = \bar{c}_j < 0$, el costo de una solución $x + \delta d$ puede ser arbitrariamente negativo, y por lo tanto el valor del problema es $-\infty$.

Para chequear que Simplex finaliza en número finito de pasos, basta notar que en toda iteración el algoritmo se mueve de manera estrictamente positiva sobre una dirección d tal que $c^\top d < 0$. Es decir, el costo de la nueva solución es estrictamente menor que el de la solución anterior. Se concluye observando que el número de soluciones básicas factibles es finito. \square

3.4 Ejercicios

P3.4.1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos S son poliedros? Si es posible, exprese S en la forma

$$S = \{x \mid Ax \leq b, Fx = g\}$$

- a) $S = \{y_1 a_1 + y_2 a_2 \mid -1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$, donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$.
- b) $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
- c) $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \mathbf{1}^T x = 1, \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1, \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2\}$, donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.
- d) $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$

P3.4.2. Considere el siguiente problema lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- a) Escogiendo x_3, x_4 como variables básicas, calcule el diccionario y la solución básica correspondiente. Argumente por qué esta solución no es óptima.
- b) Usando la base anterior, calcule la dirección básica d dada por x_2 .
- c) Considere la solución básica $x = (0, 2, 0, 1)$. ¿Cuáles son las variables básicas y no-básicas? Con esto, identifique la base y muestre que este punto es óptimo.

Indicación: Para esta pregunta, recuerde que la inversa de una matriz de 2×2 se puede calcular de la siguiente forma

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

P3.4.3. Considere en \mathbb{R}^2 el conjunto de puntos que está por encima de la recta horizontal que es idénticamente 3 y que está por debajo de la recta $f(x) = x$. ¿Es este conjunto un poliedro? ¿tiene un punto extremo? Si es así encuentrelo y demuestre formalmente que es un punto extremo.

P3.4.4. a) Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ un poliedro. Sea $\tilde{x} \in P$ y $d \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\tilde{x} + \lambda d \in P \quad \forall \lambda \geq 0$$

Es decir, desde un punto \tilde{x} se puede avanzar infinitamente en la dirección d sin salir de P .¹ Muestre que se debe cumplir que

$$Ad \leq 0.$$

Concluya que para *cualquier* $\hat{x} \in P$ se cumple que $\hat{x} + \lambda d \in P$ para todo $\lambda \geq 0$.

b) Sea P un poliedro y $x \in P$. Se dice que x es un *punto esquina* si se cumple que

$$\forall \delta > 0, \forall d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad x + \delta d \in P \Rightarrow x - \delta d \notin P.$$

Muestre que x es un punto esquina si y solo si es un vértice.

c) Sea P un poliedro en forma estándar $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$. Suponga que A tiene $n - 1$ filas, todas ellas linealmente independientes. Argumente por qué esto implica que P está contenido en una línea, y que P tiene a lo más 2 puntos extremos.

d) Sea P un poliedro en forma estándar como en la parte (c), y sea $x \in P$. Muestre que si d es tal que $Ad = 0$ y $d_i \geq 0$ para todo i tal que $x_i = 0$, entonces d es una dirección factible en x .

P3.4.5. Considere el problema

$$(P) \begin{cases} \text{mín} & -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 \\ \text{s.a} & -2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\ & x_i \geq 0 \end{cases}$$

a) Lleve el problema a forma estándar

b) Considere las variables de holgura de la parte anterior como variables básicas y encuentre la solución básica asociada. ¿Cómo se interpreta en P que las variables de holgura del problema en forma estándar estén o no en la base?.

c) Escoja x_1 y x_2 como variables básicas del problema en forma estándar, encuentre el diccionario asociado y muestre que la solución básica asociada no es óptima.

d) Considere la dirección $d = (3/8, -1/8, 1, 0, 0)$. Muestre que es una dirección factible en el punto encontrado en la parte anterior.

P3.4.6. Una empresa desea producir dos bienes, a un precio de \$30 y \$40 por unidad. Para producir una unidad del primer bien, se requieren 2 unidades del primer material, y 3 unidades del segundo. Para producir el segundo bien, se requieren 4 unidades del primer material, y 2 unidades del segundo material. La empresa cuenta con una capacidad limitada de materiales (20 unidades del primero, y 12 del segundo).

El siguiente es un modelo de optimización que permite decidir la producción óptima de estos dos bienes, donde x_1 y x_2 representan las cantidades de cada bien a producir, de forma de maximizar la ganancia. Se asume que es posible fabricar fracciones de cada bien.

$$\begin{aligned} \text{mín} & \quad -30x_1 - 40x_2 \\ \text{s.a} & \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 20 \\ & \quad 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

¹Atención: esto no significa que P contenga una línea, pues solo se considera $\lambda \geq 0$.

Note que el problema está escrito en su forma estándar, donde x_3 y x_4 son las variables de holgura de las restricciones de material. Al utilizar las variables x_1, x_2 como base, se llega al siguiente diccionario

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -210 + \frac{15}{2}x_3 + 5x_4 \\ \text{s.a} \quad & x_1 = 1 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ & x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- Determine la solución básica asociada a este diccionario. Justifique por qué esta solución es óptima.
- Una empresa externa está interesada en comprar los excedentes del primer material, a un valor ε . Esto se ve reflejado en que la función de costo de x_3 disminuirá de 0 a $-\varepsilon$. Determine la máxima variación posible que podría tener ε sin que cambie el punto óptimo del problema.
- Asuma una variación “un poquito” mayor que la de la parte anterior. Es decir, determine la dirección básica asociada a x_3 , calcule el máximo avance en esa dirección, y determine el nuevo vértice que se alcanza.
- Volviendo al problema original: suponga ahora que la empresa está estudiando hacer promociones o alzas, que producirán variaciones de precios al primer bien. Es decir, el costo asociado a x_1 variará de -30 a $-30 + \delta$, donde δ puede ser positivo o negativo. Determine el rango en que puede variar δ , sin que cambie el punto óptimo del problema.

Indicación: Nuevamente debe analizar cómo afecta ε en los costos reducidos de la solución.

P3.4.7. Considere el siguiente PL:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 5 \\ & 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Construya un PL equivalente que esté en forma estándar.

P3.4.8. Considere el siguiente PL

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Para cada una de las siguientes funciones objetivo, encuentre el valor óptimo del problema gráficamente y muestre una solución (x_1, x_2) que alcance ese valor.

- $c = (0, -1)^\top$
- $c = (-1, 0)^\top$

$$c) c = (-1, -1)^\top$$

$$d) c = (-2, -3)^\top$$

P3.4.9. Considere el siguiente PL

$$(O) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & x_1 \\ \text{s.a.} & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \end{array}$$

donde $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Llame P a la región factible del problema O .

- Proponga valores para a_1, a_2, b que aseguren que el problema O tenga una única solución óptima. ¿Cuál es el único óptimo para los valores que propuso?
- Determine si P contiene una línea. ¿Depende su respuesta de los valores de a_1, a_2, b ?
Indicación: para la última parte, si argumenta con un dibujo obtendrá puntaje parcial. Para obtener puntaje completo debe demostrar formalmente si es que posee una línea o no.

P3.4.10. Considere el siguiente PL

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & -x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Construya un problema equivalente en forma estándar. Llame s_1 y s_2 a las variables de holgura de la primera y segunda restricción, respectivamente.
- Escoja $\{x_1, s_1\}$ o $\{x_1, s_2\}$ como variables básicas y determine la base asociada. Construya el diccionario asociado a la base que escogió.
- Determine la solución básica asociada a la base que escogió y determine si es óptima o no.

P3.4.11. Considere el siguiente PL

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ \text{s.a.} & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

- Dibuje la región factible y encuentre el óptimo del problema gráficamente.
- Agregue la restricción $x_2 \geq 1$ al problema. ¿Cuál es el nuevo óptimo?
- Reemplace la restricción $3x_1 - 2x_2 \leq 6$ por $3x_1 - 2x_2 \leq 9$ en el problema original (es decir, no incluya la restricción agregada en la parte anterior). ¿Cuál es el nuevo óptimo?
- Construya un PL equivalente al problema original que esté en forma estándar.

P3.4.12. a) Invente 2 poliedros $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ distintos tales que:

- Cada uno tenga al menos 3 vértices.

- $(0, 3)$ sea el único óptimo para cada uno de los siguientes problemas de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -x_2 \\ \text{s.a} & (x_1, x_2) \in P_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -x_2 \\ \text{s.a} & (x_1, x_2) \in P_2 \end{array}$$

- $(2, 2)$ sea el único óptimo para cada uno de los siguientes problemas de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -x_1 - x_2 \\ \text{s.a} & (x_1, x_2) \in P_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -x_1 - x_2 \\ \text{s.a} & (x_1, x_2) \in P_2 \end{array}$$

- b) Muestre que si existen 2 soluciones óptimas a un PL arbitrario, entonces existen infinitas soluciones óptimas.

Dualidad en Programación Lineal

Gran parte de los problemas de programación lineal que se resuelven en distintas áreas de la ingeniería, gestión y computación tienen una clara interpretación en función de la situación particular que se está atacando. Sin embargo, muchas veces es posible reinterpretar estos problemas de manera que se puede plantear otro problema de optimización, y que bajo ciertas condiciones resulta ser equivalente al problema original. Más aun, muchas veces entregan una mayor intuición en información sobre la situación que se está resolviendo y también permitan explotar ciertas estructuras para lograr una resolución más eficiente. La *teoría de dualidad* desarrolla estas ideas, y en este capítulo estudiaremos esta teoría desde el caso de programación lineal. Veremos parte de los resultados principales y también ejemplos de su aplicabilidad.

4.1 Introducción

Para ganar un poco de intuición, consideremos el siguiente PL dado por

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -4x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ & -x_1 + x_2 \geq -2 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 22 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Trataremos de obtener alguna cota inferior en el valor que puede tomar la función objetivo $f(x_1, x_2) = -4x_1 + 2x_2$ sobre la región factible del problema anterior. Para ello, trataremos de contrar alguna combinación lineal de las restricciones de tal manera que nos permitan implicar una cota en el valor de la función objetivo. Esta es una manera, en principio, simple de construir una cota inferior en el valor óptimo del problema pero veremos que de hecho es bastante general.

Por ejemplo, tomemos la primera restricción multiplicada por -2 y la tercera restricción multiplicada por 6 . Luego, las sumamos, y obtenemos que

$$-2 \cdot (-x_1 + 2x_2) + 6 \cdot (-x_1 + x_2) \geq -2 \cdot 8 + 6 \cdot -2 = -28,$$

y el lado izquierdo es justamente igual a $-2 \cdot (-x_1 + 2x_2) + 6 \cdot (-x_1 + x_2) = -4x_1 + 2x_2 = f(x_1, x_2)$, que es la función objetivo de nuestro problema. Luego, a través de esta simple observación tenemos que el valor del PL es al menos -28 , pues probamos que para cualquier (x_1, x_2) factible el valor de la función objetivo es al menos este valor.

Consideremos ahora la siguiente manera de encontrar una cota inferior que viene de refinar el proceso anterior: tomemos la tercera restricción y multipliquémosla por $\alpha \geq 0$, y también tomemos la cuarta

restricción y multipliquémosla por $\beta \leq 0$. Los valores de α y β los determinaremos posteriormente. Luego, sumamos ambas desigualdades, y obtenemos que

$$\alpha \cdot (-x_1 + x_2) + \beta \cdot (x_1 + 4x_2) \geq \alpha \cdot -2 + \beta \cdot 22 = 22\beta - 2\alpha.$$

Reordenando el lado izquierdo, obtenemos que

$$(\beta - \alpha)x_1 + (\alpha + 4\beta)x_2 \geq -2\alpha,$$

y notemos que esto vale para todo $\alpha \geq 0$, $\beta \leq 0$ y (x_1, x_2) factible. Entonces, como deseamos acotar inferiormente el valor de $f(x_1, x_2)$, lo que haremos será chequear si existen valores de $\alpha \geq 0$ y $\beta \leq 0$ tales que nos entregan $f(x_1, x_2) = -4x_1 + 3x_2$ al lado izquierdo, es decir,

$$\begin{aligned}\beta - \alpha &= -4, \\ \alpha + 4\beta &= 2.\end{aligned}$$

Este sistema tiene como solución única a los valores $\beta = -2/5$ y $\alpha = 18/5$, que satisfacen las condiciones de signo. Al evaluar el lado derecho obtenemos que

$$f(x_1, x_2) \geq 22\beta - 2\alpha = 22 \cdot -2/5 - 2 \cdot 18/5 = -14,$$

que mejora la cota inferior que habíamos encontrado anteriormente!

Tratemos de generalizar este proceso. Dado que buscamos una cota inferior en el valor de la función objetivo, multiplicaremos cada restricción por un valor que trataremos de determinar posteriormente, y cuyo dominio es tal que la desigualdad obtenida es del tipo \geq (también podríamos convertir todas las restricciones al tipo \leq y luego considerar solo variables no negativas.) Consideremos entonces $y_1 \leq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$ y $y_4 \leq 0$, un valor por cada restricción del PL, y multipliquemos cada una por la restricción respectiva. Luego, sumamos todo, y obtenemos que

$$y_1 \cdot (-x_1 + 2x_2) + y_2 \cdot (3x_1 + 2x_2) + y_3 \cdot (-x_1 + x_2) + y_4 \cdot (x_1 + 4x_2) \geq y_1 \cdot 8 + y_2 \cdot 0 + y_3 \cdot -2 + y_4 \cdot 22.$$

Reordenando el lado izquierdo, obtenemos que

$$x_1 \cdot (-y_1 + 3y_2 - y_3 + y_4) + x_2 \cdot (2y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4) \geq 8y_1 - 2y_3 + 22y_4.$$

Luego, como $x_2 \geq 0$, si imponemos $-y_1 + 3y_2 - y_3 + y_4 = -4$ y $2y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 \leq 2$, tenemos que el lado izquierdo es menor o igual a $f(x_1, x_2)$. Esta cota vale para todo y_1, y_2, y_3, y_4 que satisfaga las condiciones que hemos impuesto, y por lo tanto la mejor cota inferior que podemos obtener viene de resolver otro PL, dado por

$$\begin{aligned}\max \quad & 8y_1 - 2y_3 + 22y_4 \\ \text{suje to a:} \quad & -y_1 + 3y_2 - y_3 + y_4 = -4, \\ & 2y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 \leq 2, \\ & y_1, y_4 \leq 0, \\ & y_2, y_3 \geq 0.\end{aligned}$$

4.1.1. Par Primal-Dual

Al problema original en las variables x lo llamamos el problema **primal**, mientras que al problema que hemos obtenido en las variables y lo llamamos problema **dual**. Si llamamos P a la región factible original, D a la región factible del problema dual, y g a la función objetivo del problema dual, entonces observamos que por construcción tenemos que

$$\min \{f(x) : x \in P\} \geq \max \{g(y) : y \in D\}. \quad (4.1)$$

Esta desigualdad, conocida como *dualidad débil*, juega un rol clave en programación lineal, pues veremos que bajo ciertas condiciones de hecho se tiene la igualdad, en cuyo caso hablaremos de *dualidad fuerte*. Volveremos a esto un poco más adelante. Tratemos ahora de generalizar el proceso que hemos hecho para este problema en particular al caso más general.

Ejercicio 9. Usando el procedimiento mostrado anteriormente encuentre el dual del siguiente PL,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & -2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

¿Cuántas variables posee el problema dual? ¿cuántas restricciones?

4.2 Dual de un PL general

El proceso que seguimos en la sección anterior para encontrar el dual de un PL particular sugiere la manera de encontrar el dual de un PL en general. Dada una matriz A , el vector a_i^\top representa la fila i de A , y el vector A_j representa la columna j de A .

$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x \\ \text{sujeto a:} \quad & a_i^\top x \geq b_i, \quad i \in M_1 \\ & a_i^\top x \leq b_i, \quad i \in M_2 \\ & a_i^\top x = b_i, \quad i \in M_3 \\ & x_j \geq 0, \quad j \in N_1 \\ & x_j \leq 0, \quad j \in N_2 \\ & x_j \text{ libre,} \quad j \in N_3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{máx} \quad & b^\top y \\ \text{sujeto a:} \quad & y_i \geq 0, \quad i \in M_1 \\ & y_i \leq 0, \quad i \in M_2 \\ & y_i \text{ libre,} \quad i \in M_3 \\ & A_j^\top y \leq c_j, \quad j \in N_1 \\ & A_j^\top y \geq c_j, \quad j \in N_2 \\ & A_j^\top y = c_j, \quad j \in N_3 \end{aligned}$
---	---

Tal como vimos en el capítulo anterior, el problema primal puede ser escrito de varias maneras, via transformaciones sobre sus restricciones y naturaleza de las variables. Por ejemplo, una variable libre puede ser reemplazada como diferencia de dos positivas, o una restricción de desigualdad puede ser escrita como una de igualdad agregando variables de holgura. El dual de cada uno de estos problema se verá, en principio, diferente, sin embargo es posible probar que todos ellos son equivalentes en el sentido que, o bien ambos son infactibles o tienen el mismo valor en el óptimo.

4.2.1. Dualidad débil y sus consecuencias

A continuación probaremos el resultado mencionado anteriormente en la expresión (4.1) que liga el valor del problema primal con el del problema dual. Consideremos el problema primal escrito en la siguiente forma,

$$\text{mín} \{ c^\top x : Ax = b, x \geq 0 \}.$$

Teorema 9 (Dualidad débil). *Si x es una solución factible para el problema primal e y es una solución factible para su dual, entonces $b^\top y \leq c^\top x$.*

Demostración. El problema dual corresponde a $\max \{b^\top y : A^\top y \leq c\}$. Luego, notamos que

$$\begin{aligned} c^\top x - b^\top y &= c^\top x - y^\top Ax + y^\top Ax - b^\top y \\ &\geq (c - A^\top y)^\top x + y^\top (Ax - b) \\ &= (c - A^\top y)^\top x \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

pues $x \geq 0$, $Ax \geq b$ y $c \geq A^\top y$ para todo x e y factibles para el primal y dual respectivamente. \square

En palabras, el valor de toda solución factible para el primal está acotada superiormente por el valor de cualquier solución factible para el problema dual. En particular, esto implica el siguiente corolario.

Corolario 4. *Si el valor del primal es $-\infty$, entonces el dual es infactible. Si el valor del dual es $+\infty$, entonces el primal es infactible.*

Otra consecuencia del teorema de dualidad débil es que si una solución factible para el primal tiene un valor igual al de alguna solución factible para el dual, entonces ambas soluciones deben ser óptimas respectivamente.

Corolario 5. *Sea x solución factible para el primal e y solución factible para el dual tales que $b^\top y = c^\top x$. Entonces x e y son óptimos para el primal y el dual respectivamente.*

Demostración. Consideremos \tilde{x} factible para el primal. Luego, gracias al Teorema 9 de dualidad débil tenemos que $c^\top \tilde{x} \geq b^\top y = c^\top x$, de donde se obtiene la optimalidad de x . Para y la demostración es análoga. \square

Cabe destacar que el resultado de dualidad débil se cumple en contextos bastante generales, incluyendo una amplia familia de problemas de optimización no lineal.

Ejercicio 10. Escriba el dual del siguiente PL,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ & x_2 - 4x_1 = -1 \\ & x_3 + x_2 \geq 1 \\ & 1 \leq x_1 \leq 7 \\ & x_2 \leq 24. \end{aligned}$$

Encuentre alguna solución factible para el dual y usando dualidad débil entregue una cota inferior en el valor del problema primal.

4.2.2. Dualidad fuerte y holgura complementaria

Como mencionamos anteriormente, el teorema de dualidad débil vale en un contexto general. Sin embargo, en el caso de programación lineal, una condición aun más fuerte es válida, conocida como **dualidad fuerte**. Esta condición establece que siempre y cuando el problema primal posea una solución óptima, entonces el valor óptimo dual iguala al valor óptimo primal.

Teorema 10 (Dualidad fuerte). *Supongamos que el primal posee solución óptima. Entonces, el dual también posee un óptimo y sus valores son iguales.*

Demostración. En lo que sigue supongamos que las filas de A son linealmente independientes y consideremos el primal escrito en forma estándar. Ejecutemos el algoritmo Simplex sobre este problema. Sea x el óptimo entregado y B la base asociada. Luego, $\bar{c}^\top = c^\top - c_B^\top B^{-1}A \geq 0$. Consideremos entonces $y = (B^\top)^{-1}c_B$. Notemos $\bar{c}^\top = c^\top - y^\top A \geq 0$ y por lo tanto y es una solución factible para el dual. Además, tenemos que

$$c^\top x = c_B^\top x_B = c_B^\top B^{-1}b = y^\top b$$

y por lo tanto y es óptimo para el dual, gracias al Corolario 5. Para probar el resultado cuando el primal está en forma arbitraria, basta escribir un problema equivalente en forma estándar y remover filas linealmente independientes. Ambos problemas poseen el mismo valor óptimo, y los duales respectivos también poseen el mismo valor. El resultado sigue entonces para el caso general. \square

Gracias a los teorema mostrados podemos conocer sobre el valor del primal a través del dual, y viceversa. Esto se puede resumir en la siguiente tabla,

Primal/Dual	óptimo finito	no acotado	infactible
óptimo finito	posible	imposible	imposible
no acotado	imposible	imposible	posible
infactible	imposible	posible	posible

Observación 5. *El único caso no abordado hasta el momento es que ambos sean infactibles. Esto es posible, y un ejemplo es el el par primal-dual siguiente,*

$$\begin{aligned} \text{mín } & \{x_1 + 2x_2 : x_1 + x_2 = 1, 2x_1 + 2x_2 = 3\}, \\ \text{máx } & \{y_1 + 3y_2 : y_1 + 2y_2 = 1, y_1 + 2y_2 = 2\}. \end{aligned}$$

El siguiente resultado permite ligar de manera general soluciones óptimas para el primal y dual respectivamente. Luego, conociendo el óptimo de uno es posible estudiar el óptimo para el otro.

Teorema 11 (Holgura complementaria). *Sean x e y soluciones factibles para el primal y dual respectivamente. Luego, x e y son óptimos para el primal y dual respectivamente si y solo si*

$$\begin{aligned} y_i(a_i^\top x - b_i) &= 0, \text{ para todo } i, \\ x_j(c_j - A_j^\top y) &= 0, \text{ para todo } j. \end{aligned}$$

Demostración. De la demostración de dualidad débil se obtuvo que

$$c^\top x - b^\top y \geq (c - A^\top y)^\top x + y^\top (Ax - b) \geq 0.$$

Como x e y son óptimos, dualidad fuerte nos dice que $c^\top x - b^\top y = 0$. Luego, la cadena de desigualdades arriba son todas igualdades a 0, de donde se obtiene el resultado. \square

En caso que el primal esté escrito en forma estándar, la primera condición se satisface de manera automática. Sin embargo, el segundo conjunto de igualdades sigue siendo no trivial de satisfacer.

Ejercicio 11. Escriba las condiciones de holgura complementaria para el siguiente PL,

$$\begin{aligned} \text{mín } & -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 \\ \text{sujeto a: } & -2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

4.2.3. Variables duales como costos marginales.

Una manera en la cual podemos interpretar el valor de las variables duales es a través de considerar perturbaciones en el lado derecho de un PL. Consideremos un problema en forma estándar

$$\text{mín} \left\{ c^\top x : Ax = b, x \geq 0 \right\}$$

con rango-fila completo. Supongamos que hay una solución óptima x^* con base asociada B la cual es no degenerada, es decir, $x_B^* = B^{-1}b > 0$. Consideremos ahora una perturbación d sobre b , es decir, el nuevo lado derecho en el poliedro es $b + d$,

$$\text{mín} \left\{ c^\top x : Ax = b + d, x \geq 0 \right\}.$$

Si la norma de d es lo suficientemente pequeña, entonces $B^{-1}(b + d) > 0$, y por lo tanto la base B sigue entregando una solución básica factible para el problema perturbado. Los costos reducidos para la base B no dependen del vector b , y por lo tanto la misma base es óptima para el problema perturbado también. Luego, el costo para el problema perturbado es

$$c_B^\top B^{-1}(b + d) = p^\top (b + d),$$

donde $p = (B^{-1})^\top c_B$ es óptimo para el problema dual. Esto nos dice que una perturbación en el lado derecho del primal provoca un cambio en el valor objetivo del dual, y cada valor p_i puede ser interpretado como el costo marginal de incrementar en una unidad el requerimiento i .

4.2.4. Certificar Infactibilidad: Lema de Farkas

Supongamos que se busca obtener alguna prueba de infactibilidad (en caso de serlo) para cierta región factible. El siguiente lema, también conocido como *lema de las alternativas*, muestra que esto es siempre posible para el caso de un poliedro descrito en forma estándar.

Lema 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Entonces, exactamente una de las siguientes alternativas se satisface:

- (a) Existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$.
- (b) Existe $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^\top p \geq 0$ y $b^\top p < 0$.

Demostración. Supongamos que se tiene (a). Luego, para todo $p \in \mathbb{R}^m$, si $A^\top p \geq 0$ entonces $b^\top p = x^\top A^\top p \geq 0$, pues $x \geq 0$. Luego, (b) no es posible en este caso. Consideremos el problema primal

$$\text{mín} \left\{ b^\top p : A^\top p \geq 0 \right\}.$$

Luego, su dual asociado es $\text{máx}\{0 : Ax = b, x \geq 0\}$. Si se tiene (b), entonces el valor del problema primal es $-\infty$. Luego, gracias a dualidad débil, el dual es infactible y entonces no se tiene (a). \square

En consecuencia, si tenemos cierta región factible escrita en forma estándar, para dar una prueba de infactibilidad solo necesitamos chequear que la condición (b) se satisface. Dependiendo de la manera en que en que esté dado el poliedro, hay diferentes versiones de este lema de las alternativas.

Ejercicio 12. Muestre que el siguiente sistema descrito en forma estándar es infactible,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= -2 \\ 3x_1 - 10x_2 &= 1 \\ -4x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

4.3 Aplicación: Juegos de Suma Cero

Consideremos un juego entre dos jugadores, Alicia y Rodrigo. Cada uno dispone de un conjunto de estrategias posibles, I en el caso de Alicia y J en el caso de Rodrigo. Cada uno selecciona una estrategia, de manera simultánea, y luego cada uno revela al otro lo que escogió. Cada par de estrategias $(i, j) \in I \times J$ escogido por ellos tiene asociado un pago para Alicia, a_{ij} (no necesariamente positivo), y la utilidad de Rodrigo en ese caso es $-a_{ij}$. Es decir, lo que gana un jugador es lo que pierde el otro. La información de los pagos queda almacenada en una matriz $A \in \mathbb{Q}^{I \times J}$ con $A_{ij} = a_{ij}$ para todo $(i, j) \in I \times J$.

Este tipo de juegos son llamados de *suma cero*, pues la suma de los pagos de ambos jugadores es siempre cero. A modo de ejemplo, pensemos en el clásico *cachipún*. Los conjuntos de estrategias para Alicia y Rodrigo en este caso son los mismos,

$$I = \{\text{piedra, papel, tijeras}\} = J.$$

La matriz de A de pagos para Alicia en este caso corresponde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde la primera fila y columna son *piedra*, la segunda fila y columna son *papel* y la tercera fila y columna son *tijeras*. Supondremos que ambos jugadores *aleatorizan*, de manera independiente, al momento de escoger sus estrategias. Es decir, Alicia escoge un vector

$$x \in \Delta_I = \left\{ w \in \mathbb{R}^I : \sum_{i \in I} w_i = 1, w \geq 0 \right\}$$

y Rodrigo escoge en

$$y \in \Delta_J = \left\{ z \in \mathbb{R}^J : \sum_{j \in J} z_j = 1, z \geq 0 \right\}.$$

Notemos que los vectores x, y representan una distribución de probabilidad sobre los conjuntos de estrategias I y J , respectivamente.

Ejemplo 20. *En el caso del cachipún, una manera posible de aleatorizar es que Alicia juegue cada movida con probabilidad $1/3$, y una manera posible para Rodrigo es que juegue piedra y papel con probabilidad $1/2$ cada una, y con probabilidad 0 juega tijeras.*

La *utilidad* de Alicia, $u_1(x, y)$, corresponde al valor esperado de su pago, donde la esperanza se toma sobre la distribución de probabilidad que inducen x e y sobre $I \times J$. Es decir,

$$u_1(x, y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} x_i y_j.$$

A su vez, la utilidad de Rodrigo es $u_2(x, y) = -\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} x_i y_j = -u_1(x, y)$.

Definición 33. *Diremos que un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times J$ es un equilibrio de Nash si $u_1(\bar{x}, \bar{y}) \geq u_1(x, \bar{y})$ y $u_2(\bar{x}, \bar{y}) \geq u_2(\bar{x}, y)$, para todo $(x, y) \in \Delta_I \times \Delta_J$.*

Se puede chequear que (\bar{x}, \bar{y}) es un equilibrio de Nash para el juego de suma cero si y solo si

$$x^\top A \bar{y} \geq \bar{x}^\top A \bar{y} \geq \bar{x}^\top A y, \text{ para todo } (x, y) \in \Delta_I \times \Delta_J.$$

De qué manera debería jugar Alicia su estrategia? y Rodrigo? Supongamos por un momento que Alicia conoce la estrategia y de Rodrigo, lo cual en principio supone cierta ventaja para ella. Luego, Alicia escoge su estrategia de manera de maximizar su utilidad, $\max_{x \in \Delta_I} x^\top Ay$. Dado esto, lo mejor que puede hacer Rodrigo es escoger su estrategia y de manera que se minimice este valor, es decir,

$$\min_{y \in \Delta_J} \max_{x \in \Delta_I} x^\top Ay,$$

y llamemos v_1^* a este valor.

Ejercicio 13.

- 1) Pruebe que $v_1^* = \min\{\max_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} y_{ij} : y \in \Delta_J\}$ y escriba un PL que represente este problema. Llame (P_1) al programa lineal obtenido.

Supongamos ahora que Rodrigo conoce la estrategia x de Alicia, lo cual en este caso supone cierta ventaja para él. Luego, como el juego es de suma cero, Rodrigo escoge su estrategia de manera de minimizar la utilidad de Alicia, $\min_{y \in \Delta_J} x^\top Ay$. Dado esto, lo mejor que puede hacer Alicia es escoger su estrategia x de manera que este valor se maximice, es decir,

$$\max_{x \in \Delta_I} \min_{y \in \Delta_J} x^\top Ay,$$

y llamemos v_2^* a este valor.

Ejercicio 14.

- 2) Pruebe que $v_1^* \geq v_2^*$.
- 3) Pruebe que $v_2^* = \max\{\min_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij} x_{ij} : x \in \Delta_I\}$ y escriba un PL que represente este problema. Llame (P_2) al programa lineal obtenido.
- 4) Verifique que (P_2) es el dual de (P_1) . Usando dualidad fuerte pruebe que $v_1^* = v_2^*$. El real $v^* = v_1^* = v_2^*$ se conoce como el *valor del juego*.

Este resultado, en una versión más general, se conoce como Teorema Minimax (Von Neumann, 1928). Observe que este resultado dice, intuitivamente, que conocer la estrategia jugada por el oponente no representa una ventaja en juegos de suma cero.

Ejercicio 15.

- 5) Sea \bar{y} un óptimo para (P_1) y \bar{x} un óptimo para (P_2) . Pruebe que (\bar{x}, \bar{y}) es un equilibrio de Nash.
- 6) Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule un equilibrio de Nash y el valor del juego.

4.4 Otro enfoque: Dualidad Lagrangeana

En esta parte consideramos brevemente otra forma de derivar el problema dual basado en una manera más general de estudiar dualidad en optimización. Más adelante cuando estudiemos optimización no lineal volveremos a este enfoque. Dado un problema lineal escrito en forma estándar,

$$\min \{c^\top x : Ax = b, x \geq 0\},$$

el *lagrangeano* asociado a este problema corresponde a la función $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L}(x, y) = c^\top x + y^\top (b - Ax).$$

El vector y se conoce como *los multiplicadores de Lagrange* asociados a la restricción $Ax = b$. La función *dual lagrangeana* corresponde a $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(y) = \min \left\{ \mathcal{L}(x, y) : x \geq 0 \right\}.$$

Lema 3. Para todo $y \in \mathbb{R}^m$, $g(y) \leq \min \left\{ c^\top x : Ax = b, x \geq 0 \right\}$.

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}^m$ y sea $\tilde{x} \geq 0$ tal que $A\tilde{x} = b$. Luego,

$$g(y) = \min \left\{ \mathcal{L}(x, y) : x \geq 0 \right\} \leq \mathcal{L}(\tilde{x}, y) = c^\top \tilde{x} + y^\top (b - A\tilde{x}) = c^\top \tilde{x}.$$

Como esto vale para todo \tilde{x} factible concluimos lo buscado. □

Gracias al lema anterior, tenemos entonces que

$$\max \left\{ g(y) : y \in \mathbb{R}^m \right\} \leq \min \left\{ c^\top x : Ax = b, x \geq 0 \right\}.$$

Veamos que el problema del lado izquierdo corresponde al dual del PL original. En efecto,

$$\begin{aligned} \max_{y \in \mathbb{R}^m} g(y) &= \max_{y \in \mathbb{R}^m} \min_{x \geq 0} \left\{ c^\top x + y^\top (b - Ax) \right\} \\ &= \max_{y \in \mathbb{R}^m} \min_{x \geq 0} \left\{ (c^\top - y^\top A)x \right\} + y^\top b \end{aligned}$$

Notemos que

$$\min_{x \geq 0} (c^\top - y^\top A)x = \begin{cases} -\infty & \text{si } c^\top - y^\top A < 0, \\ 0 & \text{si } c^\top - y^\top A \geq 0, \end{cases}$$

y por lo tanto reemplazando en la igualdad anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \max_{y \in \mathbb{R}^m} g(y) &= \max_{y \in \mathbb{R}^m} \min_{x \geq 0} \left\{ (c^\top - y^\top A)x \right\} + y^\top b \\ &= \max \left\{ y^\top b : y^\top A \leq c \right\}, \end{aligned}$$

que corresponde al dual del PL en forma estándar.

4.5 Ejercicios

P4.5.1. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Escriba el dual del problema.
- Utilizando las condiciones de holgura complementaria, verifique que $x^* = (9/7, 0, 1/7)^\top$ es óptimo para el problema primal y encuentre un óptimo para el dual.

- c) Suponga que se desea agrandar el lado derecho de **una de las restricciones** del problema de optimización primal. ¿Cuál lado derecho conviene agrandar de manera que el valor mínimo baje lo más posible? Justifique su elección.

P4.5.2. Considere el problema de optimización lineal

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1 + x_2 = -1 \end{aligned}$$

donde α, β son ciertos parámetros (no variables).

- a) Argumente brevemente por qué el problema de optimización es infactible.
 b) Encuentre **todos** los valores de α, β tales que:
- 1) El dual sea infactible.
 - 2) El dual sea no acotado (es decir, tenga por valor $+\infty$).
 - 3) El dual tenga valor óptimo $< +\infty$.

Puede argumentar que sus α, β cumplen lo deseado con un dibujo en 2 dimensiones del problema dual.

P4.5.3. Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 3x_1 - 5x_2 + 8x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 - x_3 = 6 \\ & 2x_2 - x_3 \geq -5 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_2 \leq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

- a) Escriba el dual de este problema.
 b) Muestre que $x = (6, 0, 0)$ es solución óptima de este problema. Para esto, utilice el teorema de holgura complementaria para construir una solución dual que certifique la optimalidad de x .

P4.5.4. a) Considere el siguiente problema de optimización lineal

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Sea x^* un óptimo para este problema, e y^* un óptimo para su dual. Muestre que x^* también es óptimo para el problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^\top x - (y^*)^\top (Ax - b) \\ \text{s.a.} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

- b) Utilizando resultados de dualidad, muestre que $x^* = (4, 1)$ es óptimo para

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

P4.5.5. a) Utilizando dualidad, muestre que $x^* = (\frac{5}{26}, \frac{5}{2}, \frac{27}{26})$ es óptimo del problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -9x_1 - 14x_2 - 7x_3 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 12 \\ & 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \text{ libres.} \end{aligned}$$

b) Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 145 \\ & 4x_1 + 8x_2 - 8x_3 \leq 260 \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 190 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando resultados de dualidad, verifique que $x^* = (0, 52.5, 20)$ es óptimo para el problema y encuentre un óptimo para el dual. Si pudiera aumentar uno de los lados derechos $\{145, 260, 190\}$ en $\Delta > 0$ unidades, ¿cuál lado derecho aumentaría de manera de reducir el valor óptimo lo más posible?

Programación Lineal Entera

En este capítulo estudiaremos como resolver problemas que involucran variables enteras. En general, asumimos que el problema está dado en la forma

$$\text{mín } \left\{ c^T x : Ax + Gy \geq b, y \in \mathbb{R}_+^p, x \in \mathbb{Z}_+^n \right\}.$$

En la primera parte del curso estudiamos distintos ejemplos de problemas que pueden ser modelados usando programación entera, como el problema de la mochila o el problema de asignación. Resolver un problema que involucre variables enteras, incluso si es lineal, es significativamente más difícil que un problema que considere solo variables continuas. Sin embargo, desde el punto de vista de modelamiento, utilizar variables enteras permite modelar situaciones complejas. En lo que sigue veremos algunas técnicas para resolver este tipo de problemas, y ejemplos de modelos de optimización avanzados usando variables enteras.

5.1 Modelamiento avanzado con variables binarias

Antes de ver cómo resolver un problema entero, mostraremos las ventajas que puede tener usar variables enteras desde un punto de vista de modelamiento. En esta sección nos enfocaremos en variables binarias, pues al poder interpretarse como “sí/no” o “verdadero/falso”, permiten representar expresiones lógicas elaboradas.

5.1.1. Cargos fijos: formulaciones Big-M

Supongamos que tenemos un problema de optimización donde se pueden producir dos items, A y B , y venderlos a un precio p_A y p_B respectivamente. Un modelo típico, que considere restricciones de producción se vería como

$$\begin{aligned} & \text{máx } p_A x_A + p_B x_B \\ & \text{sujeto a: } (x_A, x_B) \in P \end{aligned}$$

donde P es cierto conjunto que representa las restricciones de producción. Supongamos ahora que al producir A se incurre en un costo fijo K que no depende de la cantidad exacta x_A , si no que solamente de si $x_A \neq 0$ (por ejemplo, para producir A se puede necesitar de maquinaria especial que se debe arrendar, y el arriendo se paga independientemente de cuanto se use la máquina). Para modelar esto, es útil definir una variable $y_A \in \{0, 1\}$ que representará si se produce A o no. Con esta variable, la función objetivo simplemente es

$$p_A x_A + p_B x_B - K y_A.$$

Es decir, solamente si $y_A = 1$ se incurre en el costo K . Esto es un buen avance, pero nos falta vincular las variables y_A con x_A , es decir, deberíamos agregar alguna restricción que imponga que

$$y_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 0.$$

Esto garantizaría que nuestra variables y_A represente exactamente lo que queremos. Para esto usamos la siguiente restricción:

$$x_A \leq M \cdot y_A$$

donde M es un número grande. Esta restricción se conoce como restricción *Big-M*. Si $x_A > 0$, entonces la restricción fuerza automáticamente a que $y_A = 1$. Y si $x_A = 0$, entonces $y_A = 0$, pues no conviene incurrir en el costo K a menos que $x_A \neq 0$.

¿Cuán grande debe ser M ? Al modelar hay que tener cuidado con el M que se elige. Por ejemplo, si impusiéramos

$$x_A \leq y_A,$$

es decir $M = 1$, también logramos el efecto que queremos: $y_A = 0 \Leftrightarrow x_A = 0$. Sin embargo, estamos agregando implícitamente la restricción $x_A \leq 1$, pues $y_A \leq 1$. Esto no es correcto, pues cuando $y_A = 1$, deberíamos permitir que x_A sea cuan grande se pueda. Acá es donde el valor de M juega un rol importante: debe ser lo suficientemente grande para asegurar que $x_A \leq M$ no sea una restricción no-deseada. En este ejemplo, podemos elegir x_A como la cantidad máxima que puede producir la planta, por ejemplo. En general el valor correcto de M lo determina la aplicación.

5.1.2. Disyunciones

En algunos problemas de optimización se presentan opciones entre restricciones, de las cuales solo una se debe cumplir. Por ejemplo, en el ejemplo discutido en la sección anterior, supongamos que la producción de A y B se puede hacer con dos máquinas distintas, y debemos elegir cual. La máquina 1 tiene un límite asociado de producción descrito por

$$x_A + x_B \leq 4$$

y la máquina 2 tiene un límite descrito por

$$x_A + 1.5x_B \leq 6.$$

¿Cómo incluir la elección de máquina a nuestro modelo? No podemos simplemente incluir estas dos restricciones, pues solo se debe cumplir una de ellas. Para esto incluimos una variable binaria z con la siguiente interpretación:

$$z = \begin{cases} 1 & \text{si se usa la máquina 1} \\ 0 & \text{si se usa la máquina 2} \end{cases}$$

Con esta variable nueva, nos gustaría lograr que

$$\begin{aligned} z = 1 &\Rightarrow x_A + x_B \leq 4 \\ z = 0 &\Rightarrow x_A + 1.5x_B \leq 6 \end{aligned}$$

Esto también lo podemos lograr con una formulación Big-M! Si consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\leq 4 + M(1 - z) \\ x_A + 1.5 \cdot x_B &\leq 6 + Mz \end{aligned}$$

entonces obtenemos lo que necesitamos. Cuando $z = 1$, la M en la primera restricción se cancela, se impone $x_A + x_B \leq 4$, y la segunda restricción no impone nada (suponiendo que M es lo suficientemente grande). Cuando $z = 0$ se impone la segunda y no la primera.

En un caso más general, supongamos que tenemos una familia de k poliedros acotados

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : A^i x \leq b^i, 0 \leq x \leq u^i\},$$

con $i = 1, \dots, k$. El objetivo es encontrar una formulación lineal entera que represente que

$$x \in P_1 \vee x \in P_2 \vee \dots \vee x \in P_k$$

es decir, que x está en la la unión de estos conjuntos, $\cup_{i \in [k]} P_i$. Para esto podemos introducir k variables binarias $z_i \in \{0, 1\}$ representando

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in P_i, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego, consideramos las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} A^i x &\leq b^i + \mathbf{1} \cdot M(1 - z_i), & i = 1, \dots, k, \\ 0 \leq x &\leq u^i + M(1 - z_i), & i = 1, \dots, k, \\ \sum_{i=1}^k z_i &= 1. \end{aligned}$$

Acá $\mathbf{1}$ es un vector de 1's. En este caso, la restricción $\sum_{i=1}^k z_i = 1$ asegura que solo uno de los valores z_i será 1.

Otra opción alternativa al truco Big-M es usar las mismas variables $z_i \in \{0, 1\}$ pero además considerar vectores de variables $y_i \in \mathbb{R}^n$ para todo $i = 1, \dots, k$. La idea es que y_i toma el valor de x cuando este vector pertenece a P_i . Luego, consideremos la siguiente formulación,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k z_i &= 1, \\ \sum_{i=1}^k y_i &= x, \\ A^i y_i &\leq b^i z_i, & i = 1, \dots, k \\ 0 \leq y_i &\leq u^i z_i, & i = 1, \dots, k \\ z &\in \{0, 1\}^k. \end{aligned}$$

Llamemos a este conjunto U , y \tilde{U} a la proyección de U en las variables x , es decir,

$$\tilde{U} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists z \in \{0, 1\}^k, y_i \in \mathbb{R}^n \text{ para } i \in [k] \text{ tal que } (z, (y_i)_{i \in [k]}, x) \in U \right\}.$$

Proposición 3. *Se tiene que $\tilde{U} = \cup_{i \in [k]} P_i$.*

Demostración. Consideremos $x \in \cup_{i \in [k]} P_i$. Luego, existe $j \in [k]$ tal que $x \in P_j$, es decir $A^j x \leq b^j$ y $0 \leq x \leq u^j$. Consideremos $z \in \{0, 1\}^k$ tal que $z_j = 1$ y $z_i = 0$ para todo $i \neq j$, y además tomemos $y_j = x$, $y_i = 0$ para todo $i \neq j$. Es fácil chequear que estos valores satisfacen las restricciones que definen U . Ahora consideremos $x \in \tilde{U}$. Luego, existen $z \in \{0, 1\}^k$, $y_i \in \mathbb{R}^n$ para $i \in [k]$ tal que $(z, (y_i)_{i \in [k]}, x) \in U$. La primera restricción implica que existe un único $j \in [k]$ tal que $z_j = 1$ y $z_i = 0$ para todo $i \neq j$. En particular, de la cuarta restricción se desprende que $y_i = 0$ para todo $i \neq j$. Luego, la segunda restricción implica que $y_j = x$, y por lo tanto la tercera y cuarta restricción dicen que $A^j y_j = A^j x \leq b^j$ y $0 \leq y_j = x \leq u^j$. Es decir, $x \in P_j$. \square

5.1.3. Implicancias

Consideremos el problema de la mochila

$$\begin{aligned} & \text{máx} && \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \text{sujeto a:} &&& \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq C \\ &&& x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

y supongamos que queremos agregar las siguientes restricciones al problema:

1. Si llevo el ítem 1, debo llevar el ítem 2.
2. Si llevo el ítem 3 y 4, debo llevar el ítem 6.
3. Si llevo el ítem 5, debo llevar el ítem 7 u 8, o ambos.

¿Cómo podemos imponer esto? Veamos restricciones que imponen cada uno de estos requerimientos, y vayamos analizando como funcionan.

1. Para la primera restricción, basta imponer

$$x_1 \leq x_2.$$

Esto claramente impone lo que queremos y nada más: Si $x_1 = 1$ entonces se tendrá que $x_2 = 1$, y si $x_1 = 0$ no se impone nada.

2. Para la segunda, podemos usar la siguiente restricción:

$$x_3 + x_4 - 1 \leq x_6.$$

Veamos por qué cumple lo que queremos. Si $x_3 = x_4 = 1$ (es decir, llevamos 3 y 4), entonces se impone que $x_6 = 1$, lo cual es lo deseado. Pero además debemos verificar que no hay algún efecto no deseado: si $x_3 = 0$ o $x_4 = 0$, no se está imponiendo nada sobre x_6 .

3. Para el tercer requerimiento, usamos la restricción

$$x_5 \leq x_7 + x_8.$$

En este caso, si $x_5 = 1$, se impone que $x_7 = 1$ o $x_8 = 1$, o ambas. Y si $x_5 = 0$ no se impone nada.

Veamos como funciona esta receta en general. Supongamos ciertas decisiones “si/no” sobre eventos A_i $i = 1, \dots, n$ codificadas con variables binarias $x_i \in \{0, 1\}$, es decir:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se realiza } A_i, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

y similarmente, m decisiones sobre eventos B_j codificadas con variables $y_j \in \{0, 1\}$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si se realiza } B_j, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

- La implicancia “si todo A_i se cumple, entonces todo B_i se cumple” se puede modelar imponiendo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i - n + 1 &\leq y_1 \\ \sum_{i=1}^n x_i - n + 1 &\leq y_2 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i - n + 1 &\leq y_m \end{aligned}$$

El lado izquierdo será 1 solo cuando $\sum_{i=1}^n x_i = n$, es decir, solo cuando todos los x_i sean 1. De caso contrario, será ≤ 0 . Por lo tanto, cuando se cumplan todos los eventos A_i , se impondrá que $y_1 = 1, y_2 = 1, \dots, y_m = 1$.

- La implicancia “Si todo A_i se cumple, entonces algún B_i se cumple” se puede imponer con la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^n x_i - n + 1 \leq \sum_{j=1}^m y_j.$$

Al igual que antes, el lado izquierdo será ≤ 0 a menos que todos los $x_i = 1$. Cuando esto último pasa, se impondrá que $\sum_{j=1}^m y_j \geq 1$, en cuyo caso se está imponiendo que alguno de los y_j sea 1.

- Para imponer “si algún A_i se cumple, entonces algún B_i se cumple” podemos utilizar

$$\begin{aligned} x_1 &\leq \sum_{j=1}^m y_j \\ x_2 &\leq \sum_{j=1}^m y_j \\ &\vdots \\ x_n &\leq \sum_{j=1}^m y_j \end{aligned}$$

En este caso, basta que alguno de los x_i sea 1 para imponer que algún y_j sea 1.

- Por último, si se presenta una negación como: “si A_i se cumple entonces B_j no se cumple” basta imponer

$$x_i \leq 1 - y_j.$$

Esto último se puede combinar con los casos anteriores.

5.2 Dificultades al resolver un problema entero _____

En esta sección discutiremos algunos aspectos que hacen que un problema entero sea considerablemente más complejo que un PL.

5.2.1. Redondear no siempre funciona

Volvamos al Ejemplo 4 (chocolates). En este caso el modelo de optimización es

$$\text{máx } 8x_A + 7x_B \tag{5.1a}$$

$$\text{sujeto a: } 2x_A + 3x_B \leq 18, \tag{5.1b}$$

$$4x_A + 3x_B \leq 24 \tag{5.1c}$$

$$x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.1d}$$

Si resolvemos el problema de optimización ignorando la restricción de integralidad $x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+$ obtenemos la solución (3, 4) (ver Ejemplo 8). Como esta solución es entera, entonces también es una solución óptima de (5.1).

Sin embargo, si se tuviese un bombón pequeño menos ya no sería el caso. En este caso el modelo se transforma en

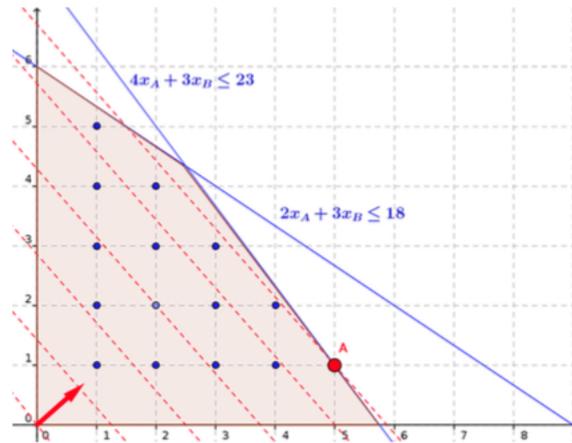
$$\text{máx } 8x_A + 7x_B \tag{5.2a}$$

$$\text{sujeto a: } 2x_A + 3x_B \leq 18, \tag{5.2b}$$

$$4x_A + 3x_B \leq 23 \tag{5.2c}$$

$$x_A, x_B \in \mathbb{Z}_+ \tag{5.2d}$$

El punto (3, 4) ya no es factible para (5.2). Más aún, el óptimo del problema ignorando las restricciones de integralidad (es decir, permitiendo $(x_A, x_B) \in \mathbb{R}_+^2$) es (5/2, 13/3), el cual no es entero. La siguiente figura muestra la región factible.



La región anaranjada muestra el poliedro dado por (5.2b), (5.2c) y $x \geq 0$. Los puntos azules corresponden a las soluciones *enteras* que están dentro del poliedro, es decir, los vectores factibles.

El óptimo para el problema con variables enteras se encuentra en (5, 1). Sin embargo, si redondeamos la solución (5/2, 13/3) \approx (2.5, 4.3) tenemos las siguientes opciones:

1. Redondear las dos componentes hacia arriba nos da (3, 5), que no es factible.
2. Redondear las dos componentes hacia abajo nos da (2, 4), que es factible pero no es óptima.
3. Redondear la primera componente hacia arriba y la segunda hacia abajo nos da (3, 4), que no es factible.

4. Redondear la primera componente hacia abajo y la segunda hacia arriba nos da (2, 5), que no es factible.

En ningún caso llegamos al óptimo (5, 1). En altas dimensiones esto se vuelve aún más complejo, por lo que es necesario tener distintas técnicas para resolver problemas enteros.

5.2.2. ¿Por qué no probar todas las combinaciones?

Es fácil pensar que con las capacidades de cómputo actuales, uno podría simplemente *enumerar* todas las soluciones posibles de un problema y después escoger la mejor, es decir "probar todas las combinaciones". Seguro que esto se puede hacer en un super-computador, ¿o no?

Consideremos el problema de asignación estudiado en la primera parte del curso. Recordemos que en el problema de asignación se tiene un conjunto de tareas J y un conjunto de trabajadores M , tal que $|J| = |M| = n$. El conjunto de soluciones factibles para este problema viene dado por el conjunto

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 \text{ para todo } i \in M, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1 \text{ para todo } j \in J, \\ x &\in \{0, 1\}^{M \times J}. \end{aligned}$$

¿Cuántas soluciones factibles tiene este problema? Si partimos asignando el trabajador 1, tenemos n opciones. Una vez asignado el primer trabajador, el segundo tiene $n - 1$ opciones. Repitiendo este argumento podemos ver que el número de soluciones factibles es

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 1 = n!$$

Para comprender el orden de magnitud de este número, cuando $n = 100$ se tiene que $n! \approx 9.3 \cdot 10^{157}$. De acuerdo a *WolframAlpha*¹, el número estimado de átomos en el universo es del orden de 10^{80} , que es, en ordenes de magnitud, algo así como la raíz del número de soluciones para el problema de asignación con $n = 100$ trabajadores.

Esto ilustra que incluso en el caso de un problema de tamaño mediano ($n = 100$), enumeración simplemente no es practicable. Esto motiva el diseño de algoritmos eficientes, que permitan encontrar soluciones en tiempo real. El problema de asignación para valores mucho más grandes que $n = 100$ hoy en día puede ser resuelto en segundos usando el *método húngaro* por ejemplo, que es un algoritmo eficiente para resolver este tipo de problemas. Otra manera de resolverlo es aprovechar el hecho de que el poliedro anterior es *entero*, es decir, los puntos extremos de la relajación lineal del problema son soluciones factibles para el problema entero, y por lo tanto se puede resolver usando algoritmos para programación lineal como Simplex.

Conjetura [P vs NP]. Desde un punto de vista computacional, programación entera forma parte de una clase de problemas conocidos como *NP-difíciles*. Una de las grandes preguntas abiertas² más famosas en matemática, conocida como P vs NP, o $P \neq NP$ ($P=NP$ para los más osados), y que hasta el día de hoy permanece abierta, involucra esta clase de problemas. En palabras simples P es la clase de problemas que se pueden resolver *en tiempo polinomial* (lo cual es típicamente considerado como *eficiente*). *Programación lineal* está en P . NP es la clase de problemas que se pueden resolver en

¹<https://www.wolframalpha.com/input/?i=number+of+atoms+in+universe>

²<http://www.scottaaronson.com/blog/?p=122>

tiempo polinomial con un algoritmo no-determinístico. La comunidad científica mayoritariamente cree que $P \neq NP$, pero todavía no ha sido probado. Asumir que la conjetura $P \neq NP$ es cierta, en particular, implica que los problemas lineales enteros son considerablemente más difíciles que los problemas lineales, y que no se puede encontrar un algoritmo eficiente que sea capaz de resolver todos los problemas lineales enteros.

Este problema y otros en la teoría de la computación durante los últimos 50 años han sido objeto de estudio de muchos matemáticos e informáticos teóricos, lo cual ha permitido un avance enorme en el entendimiento del modelo de computación de Turing, y en el diseño y análisis de algoritmos. Esto hoy en día permite, en la práctica, obtener soluciones a problemas que un par de décadas atrás eran considerados imposibles.

5.3 Métodos de resolución

Si bien, en el peor caso, no podemos esperar a resolver un problema entero eficientemente, existen diversas técnicas que pueden ser utilizadas y obtener resultados satisfactorios en la práctica.

5.3.1. Relaciones lineales y acotamiento

Supongamos que queremos resolver un problema lineal entero como

$$(PE) \quad \begin{aligned} &\text{mín } c^\top x \\ &\text{sujeto a: } Ax \leq b \\ & \quad x \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

La técnica que veremos en esta sección también sirve si alguna de las variables es continua, pero para simplificar la notación supondremos que todas son enteras. Llamemos $v^*(PE)$ el valor óptimo del problema PE .

Un problema más simple para resolver es lo que se conoce como *relajación lineal*, y se obtiene de ignorar las restricciones de integralidad del problema PE :

$$(PL) \quad \begin{aligned} &\text{mín } c^\top x \\ &\text{sujeto a: } Ax \leq b \end{aligned}$$

Lema 4. *Sea $v^*(PL)$ el valor óptimo del problema PL . Entonces se tiene*

$$v^*(PL) \leq v^*(PE)$$

Demostración. Como cualquier vector x que es factible para PE cumple que $Ax \leq b$, se tiene que x también es factible para PL . Por lo tanto el valor óptimo de PL debe ser menor. \square

Corolario 6. *Sea x^* una solución óptima de PL tal que $x^* \in \mathbb{Z}^n$, entonces x^* es óptima para PE .*

Demostración. Como x^* es óptima para PL se tiene que $c^\top x^* = v^*(PL)$. Además, como $x^* \in \mathbb{Z}^n$, entonces es factible para PE también, por lo que $v^*(PE) \leq c^\top x^* = v^*(PL)$. Del lema anterior concluimos que x^* es óptima para PE . \square

El corolario anterior nos dice que si resolvemos PL , y encontramos una solución entera entonces hemos resuelto PE . Sin embargo, esto pasa en muy pocas ocasiones. En la siguiente sección veremos como lidiar con esto.

5.3.2. Branch & Bound

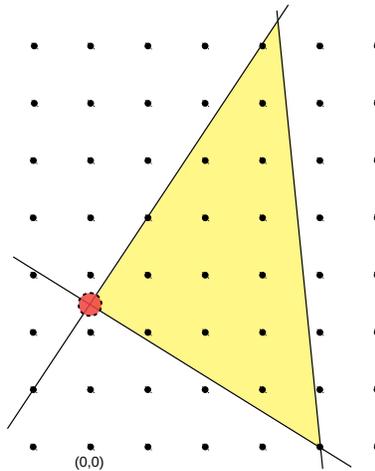
Una idea que ha resultado ser exitosa al momento de diseñar algoritmos es la de *dividir para conquistar*. La idea base es dividir un problema en una serie de problemas más pequeños, donde cada uno es resuelto por separado y se comparan las soluciones obtenidas en cada subproblema.

Ejemplo de ejecución de Branch & Bound

Para ilustrar el método consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}
 (PE) \quad & \text{mín} \quad 7x + y \\
 & -3x + 2y \leq 5 \\
 & 5x + 8y \geq 20 \\
 & 20x + y \leq 800 \\
 & x, y \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

La región factible y el óptimo de la relajación lineal (que llamaremos P_1) se pueden ver en la siguiente figura:



La solución óptima de P_1 es $(x, y) = (0, 2.5)$ y su valor es $v^*(P_1) = 2.5$. Esto nos dice que $v^*(PE) \geq 2.5$. Como sabemos que la solución de PE debe ser entera, entonces se debe tener que

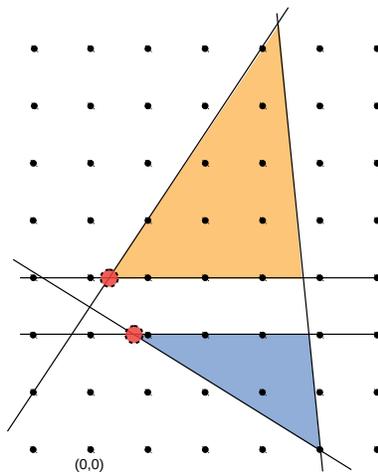
$$y \leq 2 \quad \vee \quad y \geq 3.$$

Esto se puede utilizar para definir el siguiente par de problemas

$$\begin{aligned}
 (P_2) \quad & \text{mín} \quad 7x + y \\
 & -3x + 2y \leq 5 \\
 & 5x + 8y \geq 20 \\
 & 20x + y \leq 800 \\
 & y \leq 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (P_3) \quad & \text{mín} \quad 7x + y \\
 & -3x + 2y \leq 5 \\
 & 5x + 8y \geq 20 \\
 & 20x + y \leq 800 \\
 & y \geq 3
 \end{aligned}$$

En la siguiente figura se muestra la región factible de P_2 en azul, y de P_3 en naranja, junto con la solución óptima de ambos.



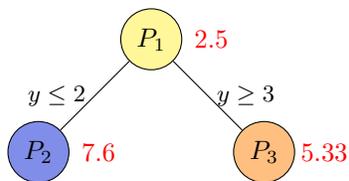
Los valores óptimos son $v^*(P_2) = 7.6$ y $v^*(P_3) = 5.33$. De esto podemos notar lo siguiente:

- Al considerar las restricciones $y \leq 2$ en un problema y $y \geq 3$ en el otro, estamos descartando la solución óptima de $P_1(x, y) = (0, 2.5)$.
- Sin embargo, no hemos perdido ninguna solución factible a PE , pues cualquier solución factible a PE debe cumplir $y \leq 2 \vee y \geq 3$.
- Por lo tanto, debemos tener que

$$v^*(PE) \geq \min\{7.6, 5.33\} = 5.33.$$

¿Por qué el mínimo? Pues no sabemos en cual de las dos regiones está el óptimo, por lo que debemos tomar el número más conservador. Sin embargo, notar que mejoramos la estimación desde 2.5 a 5.33!

El progreso que llevamos hasta ahora podemos resumirlo en el siguiente árbol:



Para continuar, nos enfocamos en P_3 . El óptimo de P_3 es el vector $(0.33, 3)$. Para descartar esta solución y poder progresar consideramos las restricciones

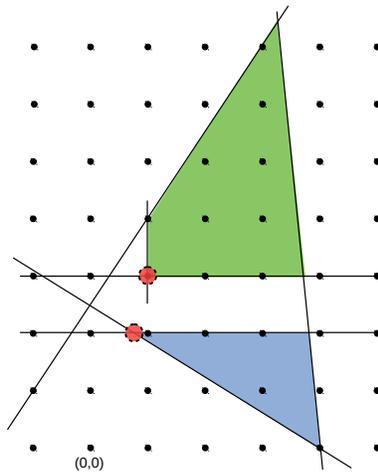
$$x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 1.$$

Estas restricciones son agregadas a P_3 y obtenemos los problemas:

$$\begin{aligned}
 (P_4) \quad & \text{mín} \quad 7x + y \\
 & -3x + 2y \leq 5 \\
 & 5x + 8y \geq 20 \\
 & 20x + y \leq 800 \\
 & y \leq 2 \\
 & x \geq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (P_5) \quad & \text{mín} \quad 7x + y \\
 & -3x + 2y \leq 5 \\
 & 5x + 8y \geq 20 \\
 & 20x + y \leq 800 \\
 & y \geq 3 \\
 & x \leq 0
 \end{aligned}$$

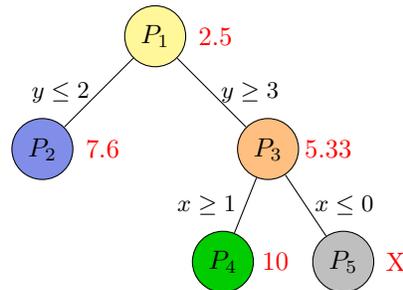
El problema P_5 resulta ser infactible. En la siguiente figura mostramos las regiones de P_4 en verde y P_2 en azul, junto las soluciones óptimas.



El valor óptimo de P_4 es $v^*(P_4) = 10$. Siguiendo con el razonamiento anterior, obtenemos una mejora en la cota inferior de PE :

$$v^*(PE) \geq \min\{7.6, 10\} = 7.6.$$

El árbol de búsqueda ahora es:

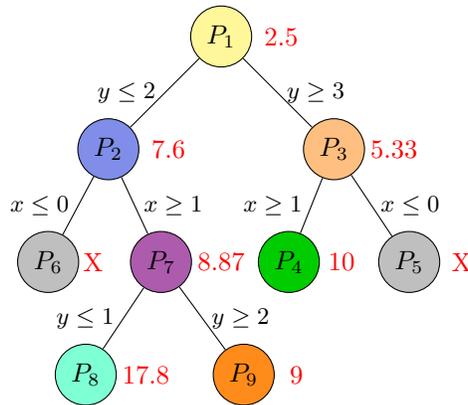


Además se tiene que el óptimo de P_4 es $(x, y) = (1, 3)$. Este vector es factible para PE , por lo que ahora obtuvimos una cota superior:

$$v^*(PE) \leq 10.$$

Los nodos correspondientes a P_4 y P_5 ya están completamente explorados: el problema P_5 es infactible, por lo que no tiene sentido seguir subdividiendo ese problema. El problema P_4 tiene un óptimo entero, por lo que subdividirlo más no conviene.

Si continuamos este procedimiento llegaremos al siguiente árbol:



Para ver como se define cada problema basta ver las restricciones que se agregaron desde P_1 , hasta llegar al problema que queremos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 (P_9) \quad & \text{mín} \quad 7x + y \\
 & -3x + 2y \leq 5 \\
 & 5x + 8y \geq 20 \\
 & 20x + y \leq 800 \\
 & y \leq 2 \\
 & x \geq 1 \\
 & y \geq 2.
 \end{aligned}$$

Analicemos la situación en este estado. Para encontrar la cota inferior a PE debemos ver el valor más conservador en los nodos que no están sub-divididos:

$$v^*(PE) \geq \text{mín}\{10, 17.8, 9\} = 9.$$

La solución óptima de P_9 es $(x, y) = (1, 2)$, por lo tanto es factible para PE . Hasta ahora tenemos dos soluciones factibles: el óptimo de P_4 y P_9 , por lo tanto

$$v^*(PE) \leq \text{mín}\{9, 10\} = 9.$$

Ahora debemos decidir si seguir explorando P_8 . Como $v^*(P_8) = 17.8$, y ya tenemos una solución factible con valor 9, entonces podemos no seguir explorando P_8 . Cualquier solución factible que encontremos explorando P_8 tendrá valor ≥ 17.8 .

Por estas razones, podemos parar la búsqueda y concluir que

$$v^*(PE) = 9.$$

La solución óptima es $(x, y) = (1, 2)$.

Análisis general

Llamemos $F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\} \cap \mathbb{Z}^n$. Esta región F es dividida en dos regiones disjuntas $F_1, F_2 \subseteq F$ tales que $F_1 \cup F_2 = F$. Luego, obtenemos dos subproblemas,

$$\text{mín} \{c^\top x : x \in F_1\} \quad \text{y} \quad \text{mín} \{c^\top x : x \in F_2\},$$

y resolviendo cada uno podemos recuperar la solución al problema original. Con el objetivo de hacer que el algoritmo sea eficiente, durante la ejecución se mantiene un valor U que representa el valor de la mejor solución *entera* encontrada hasta el momento. Por otro lado, asumimos que tenemos una cota inferior $b(F_i)$ en el valor del subproblema, este valor se obtiene normalmente resolviendo la relajación lineal del problema:

$$b(F_i) = \min \{c^\top x : x \in F_i\}.$$

Si $b(F_i) \geq U$ descartamos este subproblema, pues el valor del problema entero sobre F_i es al menos $b(F_i)$ y por lo tanto no mejora el valor de la mejor solución encontrada hasta ahora.

La manera en que el algoritmo se ejecuta queda descrita por un *árbol* de subproblemas. Si un subproblema no ha sido sub-dividido se dice que el problema está *activo*. Al descartar un subproblema estamos removiendo una rama completa de este árbol. Durante la ejecución, se mantendrá el valor U y aquellos nodos del árbol que son subproblemas activos. Además, se tiene como cota inferior L el valor mínimo entre las cotas de los subproblemas activos. Una iteración típica del algoritmo de Branch & Bound se ve como sigue:

- a) Se selecciona un subproblema F_i .
- b) Si el subproblema es infactible, se elimina. En otro caso, sea $b(F_i)$ la cota inferior obtenida.
- c) Si $b(F_i) \geq U$, también se elimina el subproblema. En otro caso, se resuelve el subproblema o bien se vuelve a dividir, y cada nuevo subproblema se agrega a lista de activos. Se actualiza L como la menor cota inferior a un problema activo.

En el caso particular de programación entera, si la cota inferior encontrada en el paso c) se alcanza en una solución entera, entonces no es necesario subdividir, pues ya se ha llegado al óptimo del problema entero en esa región. En este caso, se actualiza el valor de U .

5.3.3. Planos cortantes

Para lo que sigue asumamos que el problema es de la forma

$$\min \{c^\top x : Ax + Gy \leq b, y \in \mathbb{R}_+^p, x \in \mathbb{Z}_+^n\}.$$

En conjunto con Branch & Bound, una herramienta sumamente importante en la solución de problemas enteros ha sido el desarrollo de planos cortantes. Estos se usan para mejorar las relajaciones lineales de problemas enteros.

Definición 34 (Desigualdad válida). *Diremos que una desigualdad $\sum_{j=1}^n g_j x_j \leq r_j$ es válida para el problema entero si toda solución factible al problema entero satisface esta restricción.*

Usando este concepto, una estrategia útil para mejorar relajaciones lineales es:

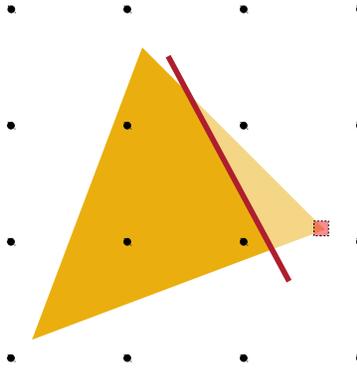
1. Inicializar $i = 0$ y sea $P_0 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : Ax + Gy \leq b\}$.
2. Repetir:
 - Resolver el problema $\min\{c^\top x : x \in P_i\}$ y sea (x_i^*, y_i^*) la solución óptima obtenida. Si $x_i^* \in \mathbb{Z}_+^n$ entonces (x_i^*, y_i^*) es el óptimo al problema entero y el algoritmo se detiene.
 - En caso contrario, sea $\alpha x + \gamma y \leq \beta$ una desigualdad válida para el problema entero tal que $\alpha x_i^* + \gamma y_i^* > \beta$. Actualizamos,

$$P_{i+1} = P_i \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : \alpha x + \gamma y \geq \beta\},$$

y volver al paso anterior.

Este enfoque, conocido como *planos cortantes*, resulta muy eficiente para resolver bastantes problemas enteros, o al menos permite obtener soluciones cuyo valor es bastante cercano al del óptimo. La idea clave tras el algoritmo es ir cortando aquellas soluciones que no sean enteras.

La siguiente figura muestra un ejemplo de un plano cortante que corta un vértice.



Ejemplo 21. Recordemos que el problema de la mochila se tiene un conjunto de items N y cada item $i \in N$ posee un volumen $w_i \geq 0$ y un beneficio $p_i \geq 0$. Se tiene una mochila de capacidad V , y el objetivo es empaquetar aquel subconjunto de items que maximiza el beneficio total sin violar la restricción de capacidad. Una formulación para este problema entero es

$$\begin{aligned} &\text{máx} && \sum_{i \in N} p_i x_i \\ &\text{sujeto a:} && \sum_{i \in N} w_i x_i \leq V, \\ &&& x \in \{0, 1\}^N. \end{aligned}$$

donde x_i indica si el item i se empaqueta en la mochila o no. Supongamos que se tiene la siguiente instancia del problema de la mochila,

item	1	2	3	4	5
p	21	11	51	26	30
w	37	12	500	50	41

Al relajar el problema entero y resolver el PL se obtiene que la solución óptima es $(0, 0, 0.98, 0, 0)$. Sin embargo, el item 3 posee volumen 51 y la capacidad de la mochila es 50, por lo que para toda solución factible entera se tiene $x_3 = 0$. Luego, introduciendo el corte $x_3 \leq 0$ se corta la solución al problema lineal anterior, y es una desigualdad válida para el problema entero.

Notemos que en el ejemplo anterior los items 4 y 5 tienen en total un volumen igual a 56, sin embargo, la capacidad de la mochila es 50. Luego, en toda solución al problema entero a lo más uno de estos objetos es empaquetado. Esto significa que la desigualdad $x_4 + x_5 \leq 1$ es válida para el problema entero. Decimos que $C \subseteq N$ es un *cubrimiento* si $\sum_{i \in C} w_i > V$, es decir, el volumen total de los objetos en C excede la capacidad de la mochila.

Lema 5. Sea C un cubrimiento. Entonces la desigualdad $\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$ es válida para el problema entero.

Demostración. Supongamos que existe una solución entera $x \in \{0, 1\}^N$ tal que $\sum_{i \in C} x_i \geq |C|$. Luego, $x_i = 1$ para todo $i \in C$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} w_i x_i &= \sum_{i \in C} w_i x_i + \sum_{i \in N \setminus C} w_i x_i \\ &= \sum_{i \in C} w_i + \sum_{i \in N \setminus C} w_i x_i > V, \end{aligned}$$

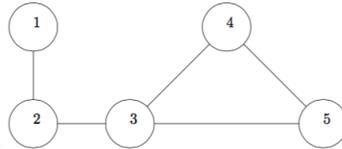
lo cual contradice la factibilidad de x en el problema entero. □

Por ejemplo, en la instancia anterior los conjuntos $\{1, 2, 4\}$ y $\{4, 5\}$ son cubrimientos.

Ejemplo 22. (*Conjunto independiente de peso máximo.*) Sea un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Decimos que $S \subseteq V$ es un conjunto independiente si para todo $\{i, j\} \in E$, $|\{i, j\} \cap S| \leq 1$. Es decir, no existe un par de vértices en S que estén unidos por una arista en E . Dado un vector de pesos $w : V \rightarrow \mathbb{R}_+$, el objetivo es encontrar un conjunto independiente de tamaño máximo en G . Este problema puede ser formulado como uno de programación entera,

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{i \in V} w_i x_i \\ \text{sujeto a:} \quad & x_i + x_j \leq 1, \text{ para todo } \{i, j\} \in E, \\ & x \in \{0, 1\}^V. \end{aligned}$$

Considere el grafo de la siguiente figura



y supongamos que $w_i = 1$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Es fácil chequear que el conjunto independiente de peso máximo es de tamaño igual a 2. Por ejemplo, el conjunto $\{1, 4\}$ es un independiente de peso máximo en este caso y la solución $(1, 0, 0, 1, 0)$ es óptima para el problema entero. Sin embargo, un óptimo para la relajación lineal es $x_i = 1/2$ para todo $i \in V$ y su valor objetivo es 2.5.

Consideremos el subconjunto de vértices $\{3, 4, 5\}$. Notemos que en este caso todos se conectan con todos, y por lo tanto es una solución factible entera no es posible tomar más que un vértice de ese subconjunto. Es decir, la desigualdad $x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$ es válida para el problema entero, y corta la solución fraccionaria obtenida anteriormente. Luego, podemos agregar esta restricción al PL y volver a resolver.

En general, dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que un subgrafo $S \subseteq V$ es un *clique* si $\{i, j\} \in E$ para todo $i, j \in S$. Es decir, todos los vértices en S se conectan con todos los otros vértices en S .

Lema 6. Sea $S \subseteq V$ un clique. Entonces la desigualdad $\sum_{i \in S} x_i \leq 1$ es válida para el problema de conjunto independiente de peso máximo.

Demostración. Supongamos que existe $x \in \{0, 1\}^V$ factible para el problema entero tal que $\sum_{i \in S} x_i > 1$. Luego, existen al menos dos vértices, $i, j \in S$ tales que $x_i = x_j = 1$ y $\{i, j\} \in S$, pues S es un clique. Esto contradice la factibilidad de x pues viola restricción dada por la arista $\{i, j\}$. □

Supongamos ahora que $C \subseteq V$ forma un ciclo en G . Por ejemplo, el mismo subconjunto de vértices $\{3, 4, 5\}$ forma un ciclo de largo 3. Para tomar un conjunto independiente la idea sería tomar un vértice por medio, pues de esa forma no aseguramos que no estén conectados en el ciclo. Esto no garantiza que igual puedan estar conectado en el grafo, pero entrega una cota superior.

Lema 7. Sea $C \subseteq V$ un ciclo de largo impar en G . Luego, $\sum_{i \in C} x_i \leq \lfloor |C|/2 \rfloor$.

Demostración. Sea $x \in \{0, 1\}^V$ factible para el problema entero, es decir, $x_i + x_j \leq 1$ para todo $\{i, j\} \in E$. Dado que C es un ciclo, tenemos que

$$|C| \geq \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i + x_j) = 2 \sum_{i \in C} x_i,$$

y luego $\sum_{i \in C} x_i \leq |C|/2$. Dado que el lado izquierdo es entero concluimos que $\sum_{i \in C} x_i \leq \lfloor |C|/2 \rfloor$. \square

5.3.4. Cortes de Gomory

El algoritmo de planos cortantes mostrado anteriormente es genérico, en el sentido que no depende de los planos cortantes considerados en cada iteración. En los ejemplos que vimos anteriormente los planos cortantes considerados dependían de la estructura del problema. En esta sección veremos como construir planos cortantes a partir de un problema general descrito en forma estándar,

$$\min \{ c^\top x : Ax = b, x \in \mathbb{Z}_+^n \}.$$

Resolvemos la relajación lineal del problema anterior, y sea B una base óptima. Si escribimos el diccionario asociado a la base B tenemos que

$$x_B^* = x_B + A_B^{-1} A_N x_N = x_B + \sum_{j \in N} A_B^{-1} A_j x_j,$$

donde $x_B^* = A_B^{-1} b$ es el valor de las variables básicas para la base óptima B . Sea $i \in B$ tal que $x_i^* \notin \mathbb{Z}$ (en otro caso x^* es entero y entonces estamos en el óptimo del problema entero), y denotemos por $\bar{a}_{i0} = x_i^*$, y para todo $j \in N$, $\bar{a}_{ij} = A_B^{-1} A_j e_i$, es decir, la entrada i del vector $A_B^{-1} A_j$. Luego, de la igualdad anterior para la entrada $i \in B$ se tiene que

$$\bar{a}_{i0} = x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j.$$

Los valores descritos pueden ser obtenidos desde la última iteración del algoritmo Simplex. En lo que sigue, nos restringimos a x factible para el problema entero. Como $x_j \geq 0$ para todo $j \in N$ tenemos que

$$\bar{a}_{i0} = x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \geq x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j,$$

y como el lado derecho de la desigualdad anterior es un valor entero tenemos que la siguiente desigualdad es válida para toda solución factible al problema entero,

$$\lfloor \bar{a}_{i0} \rfloor \geq x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j.$$

En particular, esta restricción es violada por el punto $(x_B^*, 0)$, pues $x_j = 0$ para todo $j \in N$ y $x_i^* = \bar{a}_{i0}$. Esto nos entrega una manera de implementar el algoritmo de planos cortantes de manera automática siempre que el problema esté descrito en forma estándar, y en donde en cada iteración la relajación lineal es resuelta con el algoritmo Simplex.

Ejemplo 23. Considere el problema en dos variables descrito en forma estándar dado por

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9, \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Una base óptima para la relajación lineal es $B = \{1, 2\}$ y $(x_1^*, x_2^*) = (15/10, 25/10)$. Luego, de premultiplicar por A_B^{-1} y considerar la ecuación obtenida para la entrada $2 \in B$ tenemos que

$$x_1 + \frac{1}{10}x_3 + \frac{4}{10}x_4 = \frac{25}{10}.$$

Luego, el corte de Gomory asociado es $x_2 \leq 2$. Esto corta la solución óptima obtenida anteriormente.

5.4 Ejercicios

P5.4.1. La Universidad de O'Higgins debe fijar el calendario de N exámenes en 25 bloques, y le pide a usted hacerse cargo de tal tarea. Como requerimiento mínimo, la universidad le pide asegurarse que ningún estudiante tenga 2 exámenes en un mismo bloque. Para esto, la universidad le entrega un grafo no-dirigido $G = (V, E)$ para representar los conflictos: $V = \{1, \dots, N\}$ es el conjunto de exámenes y $\{i, j\} \in E$ si hay un estudiante que deba rendir los exámenes i y j . Además, por capacidad de salas y trabajos de construcción, en un mismo bloque no pueden haber más de 20 exámenes rindiéndose en paralelo.

- a) Formule un modelo de optimización lineal entero que asigne los exámenes a bloques.
Indicación: En este problema no hay un objetivo a optimizar, por lo que puede considerar cualquier función objetivo.
- b) A la mayoría de estudiantes y docentes no les gustó el primer calendario de exámenes que propuso, por lo que bombardearon con requerimientos su correo. Los requerimientos son:
 - El examen 1 no puede ser en ninguno de los bloques 1, 2, 3, 4, 5.
 - Si el examen 7 es rendido en el bloque 1 o 2, entonces el examen 8 debe ser rendido en el bloque 4 o 5.
 - El examen 2 debe ser rendido al menos 5 bloques antes que el examen 4. Es decir, si el examen 2 se asigna al bloque k , entonces el examen 4 debe ser asignado al bloque $k + 5$, o después.
 - El bloque 13 (Miércoles al mediodía) debe seguir siendo protegido, es decir, no pueden haber exámenes en ese bloque.

Agregue estos requerimientos a su modelo de optimización.

P5.4.2. Un alquimista desea crear medallones de oro, plata y bronce para vender. Todos los medallones son creados con latas y polvos de hadas. El resumen de los materiales disponibles, requerimientos y precios de venta se presentan a continuación:

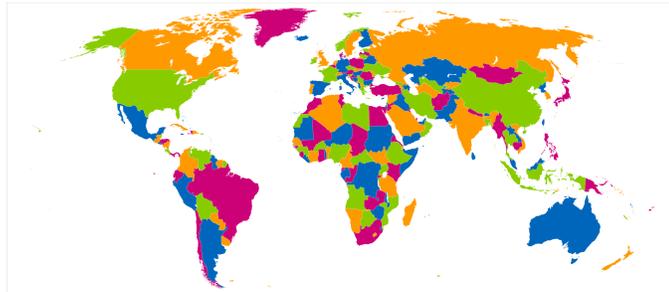
	Oro	Plata	Bronce	Disponible
Días de trabajo	2	4	5	100
Latas (kg)	1	1	1	30
Polvos de hadas (gr)	10	5	2	204
Precio de venta	52	30	20	

Para poder producir los medallones de cada tipo, el alquimista debe comprar equipamiento especial con los siguientes costos:

	Oro	Plata	Bronce
Costo de equipamiento	500	400	300

Formule un modelo de optimización lineal que determine qué medallones producir, tomando en cuenta el equipamiento especial que debe comprar el alquimista si desea producir algún medallón de cada tipo. El equipamiento sólo se paga una vez.

- P5.4.3.** Suponga que queremos colorear un mapa con la menor cantidad de colores posibles. El requerimiento mínimo de un mapa, eso si, es que países adyacentes tengan colores distintos.



Suponga que representamos la adyacencia de un mapa como un grafo no-dirigido $G = (V, E)$, donde los nodos $v \in V$ representan los países, y existe una arista $\{u, v\} \in E$ si y solo si los países u, v son adyacentes. Formule un problema de optimización lineal que determine el número mínimo de colores que se necesitan para colorear el mapa.

Indicación: Para este problema use que siempre se puede colorear con $|V|$ colores (uno por país). Con esto, puede definir las variables $x_{i,k} \in \{0, 1\}$ para $i \in V$ y $1 \leq k \leq |V|$ indicando si el país i se pinta con el color k . También le será útil definir variables y_k indicando si algún país se pinta con el color k .

Trivia: Este tipo de problemas de conocen como “problemas de coloreo”. Existe un teorema famoso de teoría de grafos que demuestra que cualquier mapa se puede colorear con 4 colores o menos, como el mapa de la imagen.

- P5.4.4.** (Planificación Minera). Para modelar una mina y tomar decisiones respecto a su extracción, ésta normalmente se modela como un conjunto de bloques ordenados en una grilla. Suponga que tiene una pequeña mina en 2 dimensiones como la siguiente:

b_1	b_2	b_3
b_4	b_5	b_6
b_7	b_8	b_9

Mediante sondeos, a cada uno de los bloques b_i se le asocia un peso q_i (toneladas) y un beneficio de extracción p_i (ambos asociados a la composición del bloque). Además, asumiremos que esta mina es a rajo abierto, es decir, se excava de arriba hacia abajo. Esto implica que, por ejemplo, para llegar al bloque b_5 se debe extraer el bloque b_2 también. A estas restricciones se les conoce como *restricciones de precedencia*.

Nos gustaría decidir qué bloques extraer en la mina, asumiendo que no podemos extraer más de Q toneladas.

- a) Formule este problema para la mina de 9 bloques ilustrada arriba. Es decir, formular un problema de optimización *lineal* que decida qué bloques extraer de manera de maximizar el beneficio respetando las restricciones de capacidad y precedencia.

- b) Se le ofrece la opción de comprar más maquinaria. Esto tendría un costo C , pero aumentaría su capacidad de extracción en Q' toneladas. Modifique el modelo anterior para incluir esta decisión.
- c) Generalice el modelo anterior a una mina que está representada por un grafo dirigido $G = (V, E)$, donde cada $i \in V$ representa un bloque, y existe un arco (i, j) si para extraer i se debe extraer también j (precedencias).

P5.4.5. Considere el siguiente problema lineal entero:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a} \quad & -4x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- a) Dibuje la región factible de la relajación lineal del problema e identifique cuáles son los puntos factibles del problema entero.
- b) Utilizando el dibujo, encuentre la solución óptima de la relajación lineal del problema.
- c) Si v_{LP}^* es el valor óptimo de la relajación lineal calculado en la parte anterior, ¿qué tipo de estimación puede dar sobre v^* (valor óptimo del problema entero)?
- d) Redondee la solución óptima que encontró para la relajación lineal de todas las maneras posibles (como son 2 dimensiones, hay a lo más 4 maneras). ¿Es alguno de los vectores que obtuvo factible para el problema entero?

P5.4.6. Considere el problema lineal entero

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

con c_1, c_2 constantes.

- a) Dibuje la región factible de la relajación lineal del problema e identifique cuáles son los puntos factibles del problema entero.
- b) Considere $(c_1, c_2) = (-1, 0)$. Utilizando el dibujo, encuentre la solución óptima de la relajación lineal del problema y la solución óptima del problema entero. ¿Cómo se comparan ambos valores óptimos?
- c) Considere $(c_1, c_2) = (0, -1)$. Utilizando el dibujo, encuentre la solución óptima de la relajación lineal del problema y la solución óptima del problema entero. ¿Cómo se comparan ambos valores óptimos?

P5.4.7. Una editorial necesita imprimir 400.000 páginas para una publicación. Las páginas pueden ser impresas en cualquiera de 4 máquinas disponibles. Cada una de estas máquinas tiene un costo por cada página impresa, un número máximo de páginas que puede imprimir, y un costo fijo de uso (es decir, un costo al que se incurre por usar la máquina). Estos parámetros se detallan a continuación.

Máquina	Costo por página	Número de páginas máximo	Costo fijo
1	\$5	200.000	\$200
2	\$4	300.000	\$300
3	\$2	250.000	\$250
4	\$1	150.000	\$400

- a) Formule el problema de determinar cuantas páginas imprimir en cada máquina de manera de minimizar los costos como un problema de optimización *lineal entero*. **No olvide explicar claramente qué representan sus variables, función objetivo y restricciones.**
- b) Justo antes de enviar a imprimir recuerda que las máquinas 1 y 2 no pueden usarse simultáneamente pues sobrecargan una parte de la instalación eléctrica. Pero hay una salida: para utilizar ambas podría ir a comprar un gran alargador por \$50. Incluya la decisión de comprar el alargador en su modelo.

P5.4.8. El gerente de una empresa está considerando ejecutar 10 proyectos. Cada proyecto $i = 1, \dots, 10$ tiene un beneficio esperado p_i y un costo de ejecución c_i . La empresa tiene un presupuesto limitado de Q para los proyectos, y usted debe ayudar al gerente a elegir cuál de los 10 proyectos ejecutar para maximizar el beneficio.

Aparte del presupuesto, y debido a la naturaleza de algunos proyectos, existen los siguientes requerimientos adicionales:

1. Los proyectos 3 y 4 son excluyentes, es decir, no se pueden ejecutar ambos.
2. Los proyectos 5 y 6 también son excluyentes.
3. Ni el proyecto 5 ni el proyecto 6 se pueden ejecutar a menos que el proyecto 3 o 4 se ejecute.
4. Al menos dos y a lo más cuatro de los proyectos $\{1,2,7,8,9,10\}$ se pueden ejecutar.
5. Si el proyecto 8 o el proyecto 9 se ejecuta, entonces se debe ejecutar el proyecto 1 y no se debe ejecutar el proyecto 4.

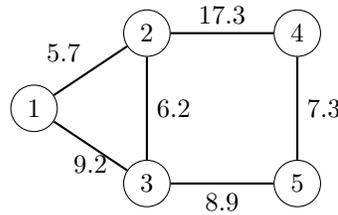
Utilizando $Q = 30$ y los datos de la siguiente tabla, formule el problema de optimización que debe resolver el gerente para elegir los proyectos que maximicen el beneficio esperado. Debe justificar cómo impone cada uno de los requerimientos. Resuelva el modelo en AMPL y reporte sus resultados.

Proyecto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Beneficio	9	4	6	5	6	7	12	9	8	6
Costo	7	3	4	2	5	5	10	8	3	5

¿Cambia su respuesta si no incluye el requerimiento 5?

P5.4.9. El siguiente problema es una simplificación de un problema de flujo de potencia. Este problema es similar a los problemas de flujo vistos en clases: poseemos una red de transmisión eléctrica (grafo no-dirigido) con nodos y líneas (aristas), y el flujo se transmite por líneas. Para efectos de este problema, utilizaremos notación y nomenclatura vista en este curso; se hará referencia al lenguaje de ingeniería eléctrica, pero no es necesario conocerla para resolver el problema.

Considere un grafo $G = (V, E)$ como el siguiente:



Donde las etiquetas en una arista $\{i, j\}$ son denotadas $X_{i,j}$ (estas representan las *reactancias*). En un problema de flujo de potencia, el flujo en una arista $\{i, j\}$ tiene un comportamiento particular: en cada nodo i hay un ángulo de fase θ_i , y el flujo de i a j , denotado por $f_{i,j}$ está dado por

$$f_{i,j} = \frac{\theta_i - \theta_j}{X_{i,j}}.$$

Notar que $f_{i,j} = -f_{j,i}$. Si $f_{i,j} > 0$ el flujo va desde i a j , y si $f_{i,j} < 0$ el flujo va desde j hasta i . Con esto, la inyección de potencia de un nodo i es

$$P_i = \sum_{\{i,j\} \in E} f_{i,j}.$$

Si $P_i < 0$, entonces el nodo está *consumiendo* flujo, y si $P_i > 0$ el nodo está *generando* flujo.

En el grafo anterior, el nodo 4 puede generar entre 40 y 90 unidades de flujo, a un costo de 20 por unidad de flujo. El nodo 5 puede generar entre 30 y 50 unidades de flujo, a un costo de 15 por unidad. Por otro lado, el nodo 1 consume exactamente 90 unidades de flujo. El resto de los nodos tiene una inyección de potencia 0. Además, cada arista puede tener un flujo máximo de 54 unidades en cualquier dirección, es decir

$$-54 \leq f_{i,j} \leq 54.$$

- a) Formule un modelo de optimización lineal que determine el costo mínimo de generar flujo en los nodos 4 y 5 para satisfacer la demanda del nodo 1. Notar que solo los valores de $X_{i,j}$ y la demanda en el nodo 1 son valores conocidos. Resuelva su modelo en AMPL y reporte sus resultados.
- b) Está evaluando dejar de generar flujo en el nodo 5. Usted estima que se ahorraría 500 si apaga el generador en el nodo 5. Utilizando variable(s) binaria(s), modifique su modelo anterior para incorporar la opción de no generar flujo en el nodo 5. Notar que en este contexto el nodo 5 tiene 2 opciones: no generar flujo o generar entre 30 y 50. Resuelva su modelo en AMPL y reporte sus resultados.

Optimización No-Lineal

En este capítulo estudiaremos problemas del tipo

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ \text{sujeto a:} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

donde \mathcal{D} es el *dominio* de las variables x , y asumiremos que alguna de las funciones, ya sea la función objetivo f o bien alguna de las restricciones, es una *función no-lineal*. Caracterizar los óptimos de tal problema, o desarrollar algoritmos capaz de resolverlo, es mucho más complejo que en el caso lineal. En algunos podremos garantizar obtener el óptimo del problema, pero no en todos.

6.1 Conceptos matemáticos básicos

Antes de comenzar, revisaremos ciertos conceptos matemáticos claves para este capítulo.

6.1.1. Nociones topológicas

La noción de distancia entre puntos en \mathbb{R}^n es formalizada a través de una *norma*, la cual definiremos a continuación y presentamos algunas de sus propiedades.

Definición 35. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos la norma euclídeana de x como,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Proposición 4. Considere $x, y \in \mathbb{R}^n$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego, lo siguiente se cumple:

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Ejercicio 16. Pruebe la validez de la proposición anterior.

La siguiente definición será útil cuando hablemos de *vecindades*, es decir, los puntos que estén cerca entre si de acuerdo a la norma que se esté utilizando.

Definición 36. Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Definimos la bola de radio ε centrada en \bar{x} como,

$$B(\bar{x}, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}.$$

Cabe destacar que el conjunto de puntos que pertenecen a una bola será distinto si se considera una norma diferente, pero para los efectos de lo que viene consideraremos la norma euclídeana.

Definición 37. Considere una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de vectores en \mathbb{R}^n . Decimos que esta sucesión converge a \bar{x} , y que denotamos por $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon \text{ tal que si } k > k_\varepsilon \Rightarrow x_k \in B(\bar{x}, \varepsilon)$$

Usando la definición de *bola de radio* ε podemos definir qué significa que un conjunto sea *abierto*. Intuitivamente, un conjunto es abierto cuando no tiene *bordes*.

Definición 38. Considere un conjunto $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que Q es **abierto**, si para todo $x \in Q$ se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq Q$.

Es decir, un conjunto es abierto si para todo punto en el conjunto podemos encontrar una bola de radio no nulo centrada en este punto y que queda completamente contenida dentro del conjunto original. Esto a su vez motiva la siguiente definición.

Definición 39. Considere un conjunto $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que Q es **cerrado** si es complemento de un conjunto abierto.

Decimos que una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ está contenida en un conjunto Q si $x_i \in Q \forall i \in \mathbb{N}$. La siguiente proposición permite caracterizar los conjuntos cerrados a través de las sucesiones que están completamente contenidas en el conjunto.

Proposición 5. Un conjunto Q es cerrado si y solo si toda sucesiones convergente que está contenida en Q tiene su límite también en Q .

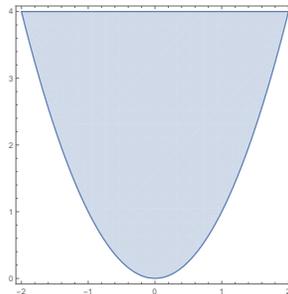
Naturalmente, una norma permite también describir aquellos conjuntos de puntos cuya distancia al origen no excede cierto valor.

Definición 40. Un conjunto $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice acotado si existe alguna bola que le contiene. Es decir, si existe \bar{x} y $\varepsilon > 0$ tal que $Q \subseteq B(\bar{x}, \varepsilon)$.

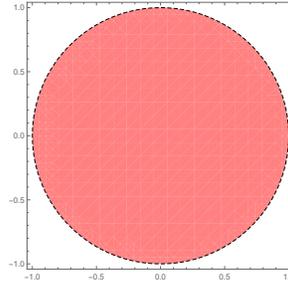
En particular, cuando $Q \subseteq B(\bar{x}, \varepsilon)$ sabemos que la norma de cada vector en Q está acotada superiormente por ε . En general, el que un conjunto sea acotado no garantiza una mayor estructura, sin embargo, cuando el conjunto además es cerrado, se tiene una serie de propiedades útiles al momento de trabajar con ellos, y en particular tiene consecuencias importantes al momento de optimizar. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 41. Un conjunto $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice compacto si es cerrado y acotado.

Ejemplo 24. El conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 \leq x_2\}$ es un conjunto cerrado y no-acotado.



Ejemplo 25. El conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ es un conjunto abierto y acotado. En esta figura el borde no es parte del conjunto.



Ejercicio 17. Considere el conjunto $Q = B(0, 1)$, es decir, la bola centrada en el origen y de radio uno. ¿Este conjunto es cerrado o abierto? ¿es acotado? ¿es compacto?

6.1.2. Continuidad y diferenciabilidad

A continuación revisaremos conceptos relacionados con la regularidad de funciones en \mathbb{R}^n . Cabe destacar que la noción de óptimo está fuertemente ligada al comportamiento que exhiba la función en términos de su crecimiento, y por lo tanto en lo que viene recordamos las nociones de diferenciabilidad y continuidad que nos ayudarán a desarrollar las técnicas necesarias.

Definición 42. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice *continua en el punto* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in B(\bar{x}, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(\bar{x}), \varepsilon)$$

Es decir, una función es continua si la imagen de cierto punto está arbitrariamente cerca de las imágenes de su vecindad, cuando esta es suficientemente pequeña.

Proposición 6. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. La función f es continua en \bar{x} si y solo si para toda sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a \bar{x} se tiene que la sucesión $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente a $f(\bar{x})$.

Las funciones continuas, intuitivamente, son funciones que no poseen saltos. Más allá de continuidad, una función es *diferenciable* en un punto cuando es posible calcular una tangente al grafo¹ de función en ese punto. A la hora de definir derivadas en \mathbb{R}^n , necesitamos considerar una dirección.

Definición 43. Considere $d \in \mathbb{R}^n$ y una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Llamamos **derivada direccional** de f en el punto \bar{x} en dirección d al límite,

$$Df(\bar{x}; d) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \alpha d) - f(\bar{x})}{\alpha}.$$

En caso que dicho límite no exista, decimos que f no es diferenciable en esa dirección en ese punto. Si la dirección d es canónica (es decir, $d = e_i$ para algún $i = 1, \dots, n$), notamos

$$Df(\bar{x}; e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}).$$

En este caso, a las derivadas direccionales también se le llaman **derivadas parciales**.

En un caso general, de funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m se define el diferencial de la siguiente manera.

¹No confundir el grafo de una función con el concepto de grafo dirigido y no-dirigido. El grafo de una función f es el conjunto $\{(x, y) : y = f(x)\}$. Cuando la función es univariada, sería el conjunto de puntos que obtenemos al dibujar la función en papel.

Definición 44. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Definimos el **diferencial** o **matriz Jacobiana** de f en \bar{x} como la matriz,

$$Df(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

Definición 45. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es diferenciable en \bar{x} si la matriz $Df(\bar{x})$ está bien definida y además se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\|f(x) - f(\bar{x}) - [Df(\bar{x})](x - \bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|} = 0.$$

Observemos que la definición anterior coincide con la noción clásica de diferenciabilidad cuando $n = m = 1$. A través de la noción de diferencial o Jacobiano es posible extender estas ideas al caso multi-dimensional.

Proposición 7. Si f admite derivadas parciales en todas las direcciones canónicas en \bar{x} , y además son continuas, entonces f es diferenciable en \bar{x} .

Cuando $m = 1$, resulta más cómodo trabajar con el traspuesto del diferencial. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 46. Si una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, definimos el **gradiente** de f en \bar{x} como el vector,

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right).$$

Observemos que en este caso el gradiente es simplemente el traspuesto del Jacobiano. Cuando f es una función diferenciable, la definición de gradiente permite calcular las derivadas en cualquier dirección.

Ejercicio 18. Calcule el gradiente de la función $f(x, y) = e^{x+y^2} + \sin(x^2 + 3y) - \log(yx + 1)$ en el punto $(2, 2)$.

Proposición 8. Si f es diferenciable en \bar{x} , entonces para todo $d \in \mathbb{R}^n$ se tiene que,

$$Df(\bar{x}; d) = d^\top \nabla f(\bar{x}).$$

Al igual que para las funciones de \mathbb{R} a \mathbb{R} , las derivadas de funciones multidimensionales cumplen propiedades como la regla de la cadena y otras que nos permiten operar al momento de obtener diferenciales de funciones más complejas.

Proposición 9 (Suma y Producto). Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciables en \bar{x} . Entonces, lo siguiente se cumple:

1. La función $h = f + g$ es diferenciable en \bar{x} y $Dh(\bar{x}) = Df(\bar{x}) + Dg(\bar{x})$.
2. La función $h = fg$ es diferenciable en \bar{x} y $Dh(\bar{x}) = g(\bar{x})Df(\bar{x}) + f(\bar{x})Dg(\bar{x})$.

Proposición 10 (Regla de la Cadena). Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciables. Entonces, la composición $h = f \circ g$ es diferenciable en \bar{x} , y el diferencial es igual a

$$Dh(\bar{x}) = Df(g(\bar{x}))Dg(\bar{x}).$$

Por último, notar que cuando una función f es diferenciable, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ también es función con dominio en \mathbb{R}^n e imagen en \mathbb{R} . Por lo tanto también podemos derivar esta función, y obtenemos una derivada de *segundo orden*. Notaremos la derivada parcial de esta última función en la dirección e_j por,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Si esta derivada parcial existe para cada par de direcciones e_i y e_j decimos que la función f es *dos veces diferenciable*. En el caso multidimensional, también hay una estructura que permite agrupar la información respecto a las derivadas de segundo orden.

Definición 47. *Considere una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que es dos veces diferenciable en el punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Definimos el hessiano de f como la matriz,*

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) \right)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$$

Proposición 11. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en \bar{x} . Se tiene que para cada par $i, j \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}).$$

De esto sigue que la matriz hessiana asociada a f es simétrica.

Ejercicio 19. Calcule el hessiano de la función $f(x, y) = e^{x+y^2} + \sin(x^2 + 3y) - \log(yx + 1)$ en el punto $(2, 2)$.

6.1.3. Aproximaciones de Taylor

En esta sección recordaremos las aproximaciones de Taylor, que nos servirán más adelante para encontrar condiciones que deben cumplir los máximos y mínimos de funciones. Recordemos que la aproximación de Taylor otorga una manera de aproximar una función compleja en términos de polinomios, siempre y cuando la función sea lo suficientemente regular. Veremos como extender esta idea al caso multidimensional usando las nociones de diferenciabilidad introducidas anteriormente. Partiremos por introducir notación que indica la regularidad de funciones unidimensionales.

Definición 48. *Decimos que una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es n -veces continuamente diferenciable en un punto \bar{x} si su n -ésima derivada existe y es continua en ese punto. Para simplificar la notación, en estos casos diremos que $g \in C^n(\bar{x})$. Si g está en $C^n(x)$ para todo $x \in A$ decimos que $g \in C^n(A)$. Por último, notamos $C^n(\mathbb{R})$ simplemente como C^n .*

El siguiente teorema corresponde a la versión unidimensional de las aproximaciones de Taylor. Cabe destacar que hay varias versiones disponibles, dependiendo de la regularidad que tenga la función y del tipo de aplicación que se tenga en mente. Para nosotros la versión siguiente será suficiente.

Teorema 12. *(Aproximaciones de Taylor de primer y segundo orden) Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función en C^2 , y sea $a \in \mathbb{R}$. Se tiene que,*

$$g(t) = g(a) + (t - a)g'(a) + E_1(g, t, a),$$

donde $E_1(g, t, a) = \frac{(t-a)^2}{2}g''(\xi^1)$, y donde ξ^1 está en el intervalo cerrado que une a con t . Adicionalmente, si $g \in C^3$, entonces,

$$g(t) = g(a) + (t - a)g'(a) + \frac{(t - a)^2}{2}g''(t) + E_2(g, t, a)$$

donde $E_2(g, t, a) = \frac{(t-a)^3}{6}g'''(\xi^2)$, y donde ξ^2 está en el intervalo cerrado que une a con t .

La siguiente proposición permite determinar más precisamente cómo se comporta el error de una aproximación de Taylor.

Proposición 12. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{E_1(g, a, t)}{|t - a|} = 0.$$

Si adicionalmente se tiene que g está en C^3 , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{E_2(g, a, t)}{|t - a|^2} = 0.$$

Para desarrollar una aproximación de Taylor para funciones multidimensionales, tomaremos la versión unidimensional junto con una parametrización apropiada. Esto nos permitirá extender sin mayor problema el resultado del teorema anterior al caso multidimensional.

Corolario 7. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función en C^2 , y sean \bar{x} y $d \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$f(\bar{x} + \lambda d) = f(\bar{x}) + \lambda d^\top \nabla f(\bar{x}) + o_1(\lambda)$$

donde $o_1(\lambda)$ es una función que satisface $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{o_1(\lambda)}{\lambda} = 0$.

Si adicionalmente se tiene que f es C^3 entonces,

$$f(\bar{x} + \lambda d) = f(\bar{x}) + \lambda d^\top \nabla f(\bar{x}) + \frac{\lambda^2}{2} d^\top \nabla^2 f(\bar{x}) d + o_2(\lambda)$$

donde $o_2(\lambda)$ es una función que satisface $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{o_2(\lambda)}{\lambda^2} = 0$.

Demostración. Definamos $g(t) = f(\bar{x} + td)$, y aproximemos g en torno al valor $a = 0$. Si $f \in C^2$ es fácil ver que $g \in C^2$. Por regla de la cadena sabemos que $g'(t) = d^\top \nabla f(\bar{x} + td)$. Por otro lado, si $f \in C^3$ también es claro que $g \in C^3$. Luego, por regla de la cadena tenemos que $g''(t) = \frac{1}{2} d^\top \nabla^2 f(\bar{x} + td) d$. Remplazando en las expresiones anteriores, el resultado sigue. \square

Ejercicio 20. Calcule la aproximación de Taylor de primer orden para la función $f(x, y) = e^{x+y^2} + \sin(x^2 + 3y) - \log(yx + 1)$ en el punto $\bar{x} = (2, 2)$.

6.2 Optimización sin restricciones

Comenzaremos el estudio de modelos no-lineales con el caso más simple: sin restricciones. Es decir, estudiaremos cómo resolver el problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

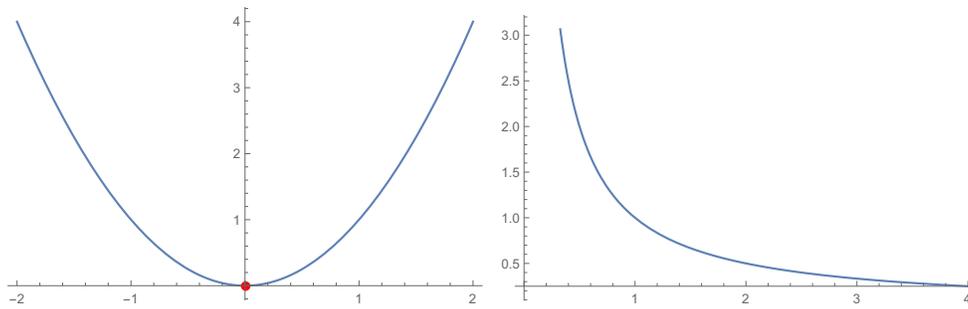
Por lo tanto, nos enfocaremos directamente en el estudio de f , la existencia de máximos y mínimos, y cómo encontrarlos.

Definición 49. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

1. Decimos que f es acotada superiormente si existe alguna constante $U \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq U$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Decimos que f es acotada inferiormente si existe alguna constante $L \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq L$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Decimos que U es supremo de f si U es cota superior de f , y además, si no existe otra cota superior que sea más pequeña.
4. Decimos que L es ínfimo de f si L es cota inferior de f , y además, si no existe otra cota inferior que sea más grande.
5. Decimos que \bar{x} es máximo global de f si $f(x) \leq f(\bar{x})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
6. Decimos que \bar{x} es mínimo global de f si $f(x) \geq f(\bar{x})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
7. Decimos que \bar{x} es máximo local de f si existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(\bar{x})$ para todo $x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$.
8. Decimos que \bar{x} es mínimo local de f si existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(\bar{x})$ para todo $x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$.

Ejemplo 26. En los siguientes gráficos mostramos las funciones $f_1(x) = x^2$ (izquierda) y $f_2(x) = 1/x$ para $x > 0$ (derecha).



En el caso de la función $f_1(x)$, cualquier número $L \leq 0$ es una cota inferior pues $f_1(x) \geq 0$. El ínfimo de f_1 es 0, y $\bar{x} = 0$ es el único mínimo global (y local). La función $f_2(x)$ posee algunas características similares: cualquier número $L \leq 0$ es una cota inferior pues $f_2(x) > 0$ para $x > 0$. El ínfimo de f_2 es 0, pero sin embargo no posee un mínimo local ni global. Ningún valor de x satisface $f_2(x) = 0$.

La existencia de máximos y mínimos no siempre está garantizada, sin embargo, el siguiente teorema otorga una condición suficiente para que esto ocurra.

Teorema 13. Sea Q un conjunto compacto y sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en Q . Entonces, la función f admite un máximo global en Q .

En general un máximo global podría no existir, o puede ser complejo de encontrar. Por lo tanto, partiremos con un objetivo más modesto: entender y caracterizar los mínimos locales de una función.

6.2.1. Mínimos locales: condiciones necesarias

Para obtener condiciones que deben cumplir los mínimos locales, partimos por definir qué es una dirección de descenso. Intuitivamente, es una dirección en la cual la función decrece en su valor.

Definición 50. Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y vectores $d, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que d es **dirección de descenso** para f en \bar{x} si existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que,

$$f(\bar{x} + \varepsilon d) < f(\bar{x}) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}.$$

El siguiente resultado nos da una condición suficiente, fácil de verificar, para obtener una dirección de descenso.

Proposición 13. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $d \in \mathbb{R}^n$ satisface $d^\top \nabla f(\bar{x}) < 0$, entonces d es dirección de descenso.

Demostración. Recordemos que,

$$f(\bar{x} + \lambda d) = f(\bar{x}) + \lambda d^\top \nabla f(\bar{x}) + o_1(\lambda)$$

donde $o_1(\lambda)$ es una función que satisface $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{o_1(\lambda)}{\lambda} = 0$. Supongamos que $d^\top \nabla f(\bar{x}) < 0$. Puesto que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{o_1(\lambda)}{\lambda} = 0$ existe $\bar{\lambda}$ tal que,

$$d^\top \nabla f(\bar{x}) + \frac{o_1(\lambda)}{\lambda} < 0 \quad \forall 0 < \lambda < \bar{\lambda}.$$

Luego, para $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ tenemos que,

$$\lambda d^\top \nabla f(\bar{x}) + o_1(\lambda) < 0.$$

De esto sigue que,

$$f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x}) \quad \forall 0 < \lambda < \bar{\lambda},$$

y por lo tanto d es dirección de descenso. □

Estamos preparados para obtener el primer criterio que deben cumplir los mínimos locales.

Teorema 14. Sea x^* un mínimo local de la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y asuma que f es una función continuamente diferenciable. Entonces,

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{6.1}$$

Si además f es dos veces continuamente diferenciable, entonces

$$\nabla^2 f(x^*) \text{ es semi-definida positiva.} \tag{6.2}$$

Demostración. Si x^* fuera tal que $\nabla f(x^*) \neq 0$, tendríamos que $d = -\nabla f(x^*)$ sería dirección de descenso. Luego x^* no podría ser mínimo local.

Por otro lado, recordemos que:

$$f(x^* + \alpha d) = f(x^*) + \alpha d^\top \nabla f(x^*) + \frac{1}{2} \alpha^2 d^\top \nabla^2 f(x^*) d + o(\alpha^2)$$

donde $o(\cdot)$ es una función que satisface $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t^2} = 0$. Utilizando el hecho que $\nabla f(x^*) = 0$, y además, la optimalidad local de $f(x^*)$, obtenemos

$$0 \leq \frac{f(x^* + \alpha d) - f(x^*)}{\alpha^2} = \frac{1}{2} d^\top \nabla^2 f(x^*) d + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2}$$

Tomando límite $\alpha \rightarrow 0$ obtenemos que $d^\top \nabla^2 f(x^*) d \geq 0$. Como la dirección d fue elegida arbitrariamente, concluimos (6.2). □

Este criterio es solamente *necesario*, es decir, si un mínimo local existe, entonces debe cumplir el criterio. Sin embargo, pueden haber puntos x que cumplan $\nabla f(x) = 0$ sin ser mínimos locales. Los criterios necesarios solo nos dan un *filtro* para obtener *candidatos* a mínimos locales, pero no nos aseguran que efectivamente sean mínimos.

Ejemplo 27. Considere $f(x) = -x^4$. Esta función cumple que

$$f'(x) = 0, \quad \nabla^2 f(0) = f''(0) = 0.$$

Es decir, $\nabla^2 f(0)$, que en este caso es una matriz de 1×1 , es semi-definida positiva. Sin embargo, $x = 0$ no es un mínimo local de f

Para obtener condiciones suficientes, es decir, para asegurar que un punto es un mínimo, necesitamos condiciones más fuertes.

Ejercicio 21. Considere la función $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$. Verifique que el punto $(1, 1)$ no es un mínimo local de f .

6.2.2. Mínimos locales: condiciones suficientes

Teorema 15. (Condiciones de optimalidad suficientes de segundo orden). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces continuamente diferenciable. Suponga que $x^* \in \mathbb{R}^n$ satisface las siguientes condiciones,

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 f(x^*) \text{ es definida positiva.}$$

Entonces, x^* es un mínimo local estricto de f . En particular, existen escalares $\nu > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que,

$$f(x) \geq f(x^*) + \frac{\nu}{2} \|x - x^*\|^2, \quad \forall x \text{ tal que } \|x - x^*\| < \varepsilon$$

Demostración. Sea λ el valor propio más pequeño de $\nabla^2 f(x^*)$. Dado que $\nabla^2 f(x^*)$ es definida positiva, $\lambda > 0$. Más aún, sabemos que $d^\top \nabla^2 f(x^*) d \geq \lambda \|d\|^2$ para todo $d \in \mathbb{R}^n$. Usando esta relación, la hipótesis de que $\nabla f(x^*) = 0$, y expansión de segundo orden de Taylor, sabemos que para todo d ,

$$\begin{aligned} f(x^* + d) - f(x^*) &= \nabla f(x^*)^\top d + \frac{1}{2} d^\top \nabla^2 f(x^*) d + o(\|d\|^2) \\ &\geq \frac{\lambda}{2} \|d\|^2 + o(\|d\|^2) \\ &= \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{o(\|d\|^2)}{\|d\|^2} \right) \|d\|^2 \end{aligned}$$

Se puede ver que la condición se satisface para cualquier $\varepsilon > 0$ y $\nu > 0$ tal que,

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{o(\|d\|^2)}{\|d\|^2} \geq \nu, \quad \forall d \text{ con } \|d\| < \varepsilon.$$

□

Ejercicio 22. Considere la función $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$. Verifique que el punto $(0, 0)$ es un mínimo local de f .

Ejercicio 23. Considere la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Calcule cuáles son los candidatos a mínimos locales usando las condiciones necesarias, y determine si son mínimos locales usando las condiciones suficientes.

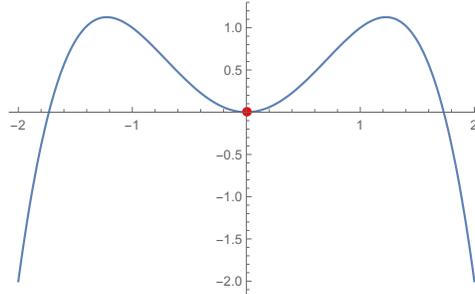
6.2.3. Mínimos globales y funciones convexas

Los criterios anteriores nos permiten determinar los mínimos locales de una función. Sin embargo, buscar mínimos globales es una tarea más compleja.

Si se sabe de antemano que un mínimo global existe, entonces uno puede usar los argumentos anteriores para encontrar uno: un mínimo global debe ser, en particular, un mínimo local, por lo que bastaría con encontrar los candidatos a mínimos locales y comparar sus valores. Dependiendo de la función, esto puede ser una tarea manejable o no.

Ejercicio 24. Considere la función $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2 + 3$ y asuma que esta función tiene un mínimo global. Usando las condiciones necesarias, encuentre los candidatos a mínimos locales, evalúe el valor de f en estos candidatos y encuentre un mínimo global.

Lamentablemente, puede pasar que una función tenga mínimos locales pero no tenga mínimos globales. Por ejemplo, la siguiente función tiene un único mínimo local, pero no posee ningún mínimo global.



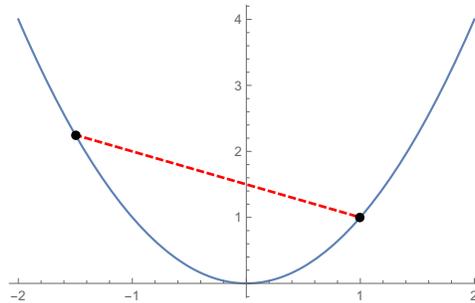
Sin embargo, en algunos casos podremos asegurar que un mínimo local sea un mínimo global: para esto necesitamos introducir el concepto de *convexidad* de una función.

Definición 51. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa si,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1]$$

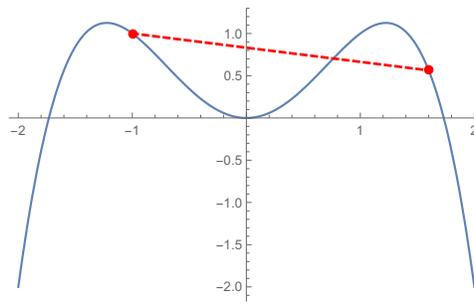
Decimos que f es estrictamente convexa si la desigualdad anterior es estricta para $\lambda \in (0, 1)$.

Veamos gráficamente qué significa la definición anterior. El término $f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ corresponde a la función f evaluada en un punto que este *entre* x y y . Por el otro lado, el término $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ es un valor obtenido *entre* $f(x)$ y $f(y)$. Por lo tanto, en una función convexa: *la evaluación de la función entre dos puntos x e y está **por debajo** de la línea que une a $f(x)$ y $f(y)$* . Esto se ilustra en la siguiente figura de una función convexa,



donde la línea azul representa a $f(x) = x^2$ y la línea punteada roja representa el término $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

La siguiente figura representa la función no-convexa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 (x^2 - 3)$:



De este último gráfico podemos ver cómo falla la condición que deben cumplir las funciones convexas: la línea punteada roja en algunas regiones se encuentra por debajo la función.

La siguiente caracterización nos permitirá manipular las funciones convexas más directamente.

Teorema 16. (*Caracterización de primer orden de funciones convexas*). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

1. La función f es convexa si y solo si,

$$f(x) \geq f(y) + (x - y)^\top \nabla f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{6.3}$$

2. Si la desigualdad (6.4) es estricta para todo $x \neq y$, entonces f es estrictamente convexa.

Demostración. Supongamos que f es convexa y sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Derivando $g(\lambda) = f(y + \lambda(x - y))$ tenemos,

$$g'(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda} = (x - y)^\top \nabla f(y)$$

Observemos que $\lambda x + (1 - \lambda)y = y + \lambda(x - y)$. Luego, si tomamos $\lambda \in [0, 1]$, utilizando la convexidad de f , tenemos que,

$$f(y + \lambda(x - y)) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Luego,

$$\frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda} \leq \frac{\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - f(y)}{\lambda} = f(x) - f(y)$$

Con lo cual concluimos que,

$$f(x) - f(y) \geq (x - y)^\top \nabla f(y)$$

y la condición (6.4) sigue.

Veamos ahora que el converso también se tiene: supongamos que la desigualdad (6.4) se cumple. Ahora fijemos $x, y \in \mathbb{R}^n$ y definamos $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Utilizando (6.4) dos veces, tenemos que

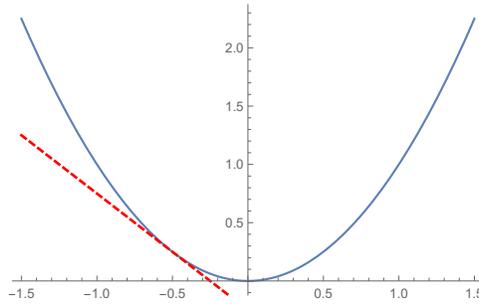
$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(z) + (x - z)^\top \nabla f(z) \\ f(y) &\geq f(z) + (y - z)^\top \nabla f(z) \end{aligned}$$

Multiplicando la primera desigualdad por λ y la segunda por $1 - \lambda$ y sumando, obtenemos

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(z) + (\lambda x + (1 - \lambda)y - z)^\top \nabla f(z) = f(z)$$

Puesto que $f(z) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ concluimos que f es convexa. El caso en que las desigualdades son estrictas es análogo. \square

El resultado anterior nos dice que una función convexa está siempre *por arriba* de sus aproximaciones de Taylor de primer orden. Veamos esto en la función anterior:



En este caso, la línea punteada roja corresponde a la aproximación de Taylor de primer orden (lineal) en el punto $x = 0.5$. Notar que lo mismo se obtiene independiente de dónde se haga la aproximación.

Cuando la función es 2 veces diferenciable, convexidad se puede determinar a través del hessiano.

Teorema 17. (Caracterización de segundo orden de funciones convexas). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos-veces continuamente diferenciable. Entonces,

$$f \text{ es convexa} \iff \nabla^2 f(x) \text{ es semi-definida positiva } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Ejercicio 25. Verifique que la función $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ es convexa. ¿Qué puede decir que la función $g(x, y) = 2x^2 - 3y^2$? ¿es convexa?

Ejercicio 26. Considere la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Muestre que esta función es convexa.

Como anticipamos, convexidad nos permite asegurar que un mínimo local es un mínimo global.

Proposición 14. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, y sea x^* un mínimo local de f . Entonces, x^* es mínimo global de f . Adicionalmente, si f es estrictamente convexa, entonces f tiene un único mínimo global.

Demostración. Suponga que x es mínimo local, pero no mínimo global. Debe existir $y \neq x$ tal que $f(y) < f(x)$. Utilizando el resultado anterior, tenemos que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) < f(y) \quad \forall \lambda \in [0, 1)$$

Sin embargo, esto contradice la minimalidad local de x .

Suponga ahora que f es estrictamente convexa y que existen dos mínimos globales distintos, x e y en \mathbb{R}^n . Dado que f es estrictamente convexa, el promedio de estas soluciones debe ser estrictamente menor en valor. Esto es contradictorio con la minimalidad global. \square

Los resultados anteriores nos permiten llegar al siguiente teorema, que caracteriza completamente los mínimos globales para las funciones convexas.

Teorema 18. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función convexa. Si f es además continuamente diferenciable en \mathbb{R}^n , entonces una condición suficiente y necesaria para que x^* sea mínimo global de f es que $\nabla f(x^*) = 0$.

Demostración. Ya sabemos que si x^* es mínimo local, entonces $\nabla f(x^*) = 0$. Por otro lado, del resultado anterior tenemos que,

$$f(x) \geq f(x^*) + (x - x^*)^\top \nabla f(x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Luego, es claro que si $\nabla f(x^*) = 0$, entonces $f(x^*)$ es mínimo global. \square

Ejercicio 27. Encuentre un mínimo local para la función $f(x, y) = x^4 + 2x + y^2$ y determine si también es un mínimo global.

6.2.4. Algoritmos de descenso

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Nos interesa resolver el problema:

$$\min \left\{ f(x) : x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Apuntaremos a encontrar un punto x tal que $\nabla f(x) = 0$. Esto último implica resolver un sistema de n ecuaciones en n variables, sin embargo, solo en ciertos casos especiales es posible realizar esto de manera analítica. Por esto optamos por un método iterativo.

Una clase importante de métodos para resolver este problema son los *algoritmos de descenso*. Estos buscan una secuencia de puntos $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $f(x_k) < f(x_{k-1})$, y terminan cuando han encontrado un mínimo local. Más específicamente, los algoritmos de descenso generan una secuencia basados en la siguiente relación:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k,$$

donde d_k es una *dirección de descenso*, y $\lambda_k \geq 0$ es el *largo del paso*. El método sigue hasta que no poder encontrar una dirección de descenso, es decir, hasta llegar a un punto x que satisfaga $\nabla f(x) = 0$. Un método de descenso necesita de un parámetro $\varepsilon > 0$, que indica cuando parar, y en general se itera de la siguiente manera:

1. Seleccionar un punto de partida $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y definir $k = 0$.
2. Si $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$, entonces TERMINAR.
3. Seleccionar una dirección de descenso d_k . Es decir, una dirección d_k tal que

$$d_k^\top \cdot \nabla f(x_k) < 0$$

4. Seleccionar $\lambda_k > 0$ tal que $f(x_k + \lambda_k d_k) < f(x_k)$.
5. Definir $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$, y volver al Paso 2.

Notar que este método garantizará obtener un mínimo global cuando f es una función convexa. De lo contrario, solo se garantiza un mínimo local. En la práctica, hay varias decisiones que tomar para implementar estos métodos. A continuación introducimos algunas de estas decisiones, así como algunos criterios que se pueden utilizar.

- ¿Cómo seleccionar el punto de partida $x_o \in \mathbb{R}^n$?
Esto depende muchísimo de la aplicación. Una solución posible, llamada el *método de Monte-Carlo*, consiste en samplear aleatoriamente varios puntos de partida x_o y elegir de entre ellos el con menor valor objetivo. Luego, partir de este punto. Otro método puede consistir en construir una solución heurística. Por último, si uno tiene algún conocimiento del problema, quizás hay una solución natural desde la cual uno debiera partir buscando.
- ¿Cómo definir el parámetro $\varepsilon > 0$? También depende mucho de la aplicación y de qué tolerancias se está dispuesto a aceptar.
- ¿Cómo seleccionar una dirección de descenso? Hay muchísimos criterios posibles. Veremos algunos importantes a continuación.
- ¿Cómo seleccionar λ_k ? También hay muchos y veremos los más importantes.

Elección de dirección de descenso

El método del gradiente (también conocido como el método de descenso más pronunciado o *steepest descent*) consiste en seleccionar $d_k = -\nabla f(x_k)$ en cada iteración. Esta elección hace que el algoritmo sea rápido, e intuitivamente es la que más debiera ayudar a movernos localmente. Sin embargo, la convergencia de este método puede ser muy lenta.

El método de Newton es más sofisticado, y consiste en seleccionar

$$d_k = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$$

(asumiendo que la inversa existe). Es fácil verificar que cuando el Hessiano es definido positivo, d_k es efectivamente una dirección de descenso.

¿Cuál es la lógica detrás del método de Newton?

Recordemos que podemos aproximar una función $f \in C^2$ en una vecindad de x_k :

$$f(x) \approx q(x) = f(x_k) + (x - x_k)^\top \nabla f(x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)^\top \nabla^2 f(x_k) (x - x_k)$$

Si $\nabla^2 f(x_k)$ es semi-definida positiva, sabemos que $q(x)$ es función convexa. Luego, una condición suficiente y necesaria de optimalidad para \bar{x} es que $\nabla q(\bar{x}) = 0$. Imponiendo esto obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla q(\bar{x}) = 0 &\Leftrightarrow \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(\bar{x} - x_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \nabla^2 f(x_k)(\bar{x} - x_k) = -\nabla f(x_k) \\ &\Leftrightarrow \bar{x} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \end{aligned}$$

Es decir, para obtener el óptimo de $q(x)$ a partir de x_k , basta avanzar en la dirección $-[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$. Como $q(x)$ es parecido a $f(x)$, es razonable suponer que esta dirección de descenso es buena para f también.

El método de Newton típicamente converge en menos pasos. Sin embargo, es más lento en la práctica puesto que es necesario computar e invertir la matriz $\nabla^2 f(x_k)$ en cada iteración.

Métodos alternativos Es fácil verificar que uno puede utilizar direcciones de la forma $d_k = -B^k \nabla f(x_k)$, donde B^k es una matriz definida positiva, para obtener una dirección de descenso. En efecto, si $\nabla f(x_k) \neq 0$:

$$d_k^\top \nabla f(x_k) = [-B^k \nabla f(x_k)]^\top \nabla f(x_k) = -\nabla f(x_k)^\top (B^k)^\top \nabla f(x_k) < 0.$$

Los llamados métodos de *Quasi-Newton* buscan construir matrices B^k que sean parecidas a la matriz $[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}$, pero que sean más rápidas de computar. Por ejemplo, podemos calcular $[\nabla^2 f(x_o)]^{-1}$ y reutilizar esta matriz por varias iteraciones. Otra opción es aproximar $[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}$ usando una aproximación de las segundas derivadas via diferencias finitas.

Elección del paso λ_k

Esto también es una elección crucial, pues puede afectar directamente la convergencia del método. Intuitivamente, un paso muy grande puede hacer que el método explore zonas muy lejanas, y un paso muy pequeño puede hacer que el método no avance lo suficiente. Para escoger λ_k , muchos métodos definen una función $g(\lambda) = f(x_k + \lambda d_k)$, y estudian qué λ puede aproximar el problema

$$\text{mín} \{g(\lambda) : \lambda \geq 0\}.$$

Este último problema es un problema de optimización en 1 variables solamente (la variables λ), por lo que debería ser más fácil de optimizar que $f(x)$.

Pasos de largo fijo. En vez de resolver este último problema de optimización, tomar un largo de paso fijo en cada iteración. Esta regla es muy simple, pero determinar un valor adecuado (para que el método converja) es muy difícil. Sin embargo, en algunos casos un paso fijo es suficiente:

Teorema 19. *Sea f una función convexa y diferenciable, cuyo gradiente es Lipschitz-continuo, es decir, existe L tal que*

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2$$

para todo x, y . Entonces, si ejecutamos el método del gradiente por k iteraciones con un paso fijo de tamaño $\lambda \leq 1/L$, la solución x_k satisface

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\|x_0 - x^*\|}{2\lambda k}$$

donde x^* es una solución óptima. Esto significa que el método converge con tasa $O(1/k)$.

Regla de minimización. Esta regla resuelve el problema

$$\min \{g(\lambda) : \lambda \geq 0\}$$

directamente. Este método busca elegir el paso optimizando un problema de una variable. Esto es más simple de resolver que el problema original, y da el mejor paso posible en esa dirección, pero puede ser muy costoso de calcular.

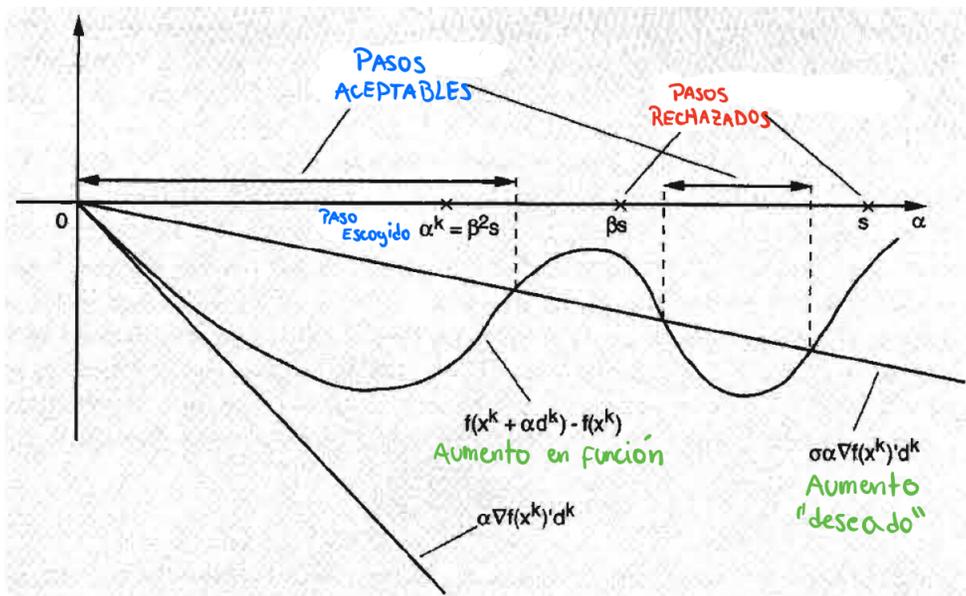
Regla de Armijo. Para evitar resolver un problema de optimización, pero no caer en un paso fijo, muchas reglas intentan adaptar el paso en cada iteración. Por ejemplo, si un paso no lleva a una reducción de valor en f , conviene reducir el paso. Una de estas reglas es la de Armijo, que reduce el paso de ser necesario, pero lo hace de manera de obtener garantías de convergencia. Esta regla funciona con 3 parámetros s, β, σ con $\beta, \sigma \in (0, 1)$. Luego, el paso λ_k se elige como

$$\lambda_k = \beta^{m_k} s$$

donde m_k es el entero más pequeño tal que

$$f(x_k) - f(x_k + \beta^m s d_k) \geq -\sigma \beta^m s \nabla f(x_k)^\top d_k$$

La siguiente figura ilustra la regla de Armijo.



La regla de Armijo apunta a una “reducción deseada” $\sigma\beta^m s \nabla f(x_k)^\top d_k$ (en la figura $\alpha = \beta^m s$). Cuando $m = 0$ y $m = 1$, el paso es rechazado pues no satisfacen la reducción deseada. En cambio, con $m = 2$, el paso si es aceptado. A la regla de Armijo también se le conoce como *backtracking*, pues se parte con un paso grande, y si el paso no lleva a la reducción deseada se retrocede con cuidado hasta obtener un paso beneficioso. Esta regla tiene garantías cuando el método converge:

Proposición 15. Si la secuencia de puntos generada por un método de descenso converge a un punto \bar{x} , y los pasos son elegidos con la regla de Armijo o la regla de minimización, entonces $\nabla f(\bar{x}) = 0$ (esto supone una condición técnica en las direcciones usadas).

Ejercicio 28. Ejecute una iteración del método del gradiente con la regla de minimización para la función $f(x, y) = e^{x+y^2} + \sin(x^2 + 3y) - \log(yx + 1)$, partiendo en el punto $x_0 = (2, 2)$.

6.2.5. Tasas de convergencia

Para algunas de las elecciones de direcciones de la sección anterior, se puede analizar con detalle qué tan rápido converge un algoritmo de descenso.

Método del gradiente

Como discutimos anteriormente, en el método del gradiente se escoge la dirección $d_k = -\nabla f(x_k)$. Un supuesto extra que haremos en esta sección sobre la función f es que existe $m > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$z^\top \nabla^2 f(x) z \geq m.$$

Este tipo de funciones se conocen como *m-fuertemente convexas*. Al conjunto de soluciones factibles cuyo valor es menor que el inicial lo denotamos por $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$.

Lema 8. Sea f una función *m-fuertemente convexa* con x^* mínimo global. Si S es cerrado, entonces existe $M > 0$ tal que para todo $x, y \in S$,

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) + \frac{M}{2} \|y - x\|^2.$$

Además, para todo $x \in S$ se tiene que $\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2m(f(x) - f(x^*))$.

En particular, si f es continua entonces S es cerrado. El siguiente teorema muestra una cota superior en el número de pasos que se requieren para obtener una solución ε -aproximada en este caso.

Teorema 20. *Consideremos el algoritmo de descenso para minimizar f usando la dirección del gradiente y la regla de minimización. Luego, existe $c < 1$ tal que si $k \geq \frac{1}{\log(1/c)} \log\left(\frac{f(x_0) - f(x^*)}{\varepsilon}\right)$ entonces $f(x_k) - f(x^*) \leq \varepsilon$.*

Demostración. Sea $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(t) = f(x - t\nabla f(x))$, es decir, el valor que toma f como función del largo del paso. Usando el lema anterior con $y = x - t\nabla f(x)$ tenemos que

$$g(t) \leq f(x) - t\|\nabla f(x)\|^2 + \frac{1}{2}Mt^2\|\nabla f(x)\|^2.$$

Sea $t_{\text{ex}} \in \operatorname{argmin}\{f(x - s\nabla f(x)) : s \geq 0\} = \operatorname{argmin}\{g(s) : s \geq 0\}$, es decir, el valor del largo de paso exacto en la dirección del gradiente. Luego,

$$\begin{aligned} g(t_{\text{ex}}) &\leq f(x) - t\|\nabla f(x)\|^2 + \frac{1}{2}Mt^2\|\nabla f(x)\|^2 \\ &\leq f(x) + \|\nabla f(x)\|^2 \min_{t \geq 0} \left\{ -t + \frac{1}{2}Mt^2 \right\}. \end{aligned}$$

La función cuadrática en t dentro del mínimo alcanza su menor valor en $1/M$, y por lo tanto

$$f(x - t_{\text{ex}}\nabla f(x)) = g(t_{\text{ex}}) \leq f(x) - \frac{1}{2M}\|\nabla f(x)\|^2.$$

Usando la segunda parte del lema anterior concluimos que

$$\begin{aligned} f(x - t_{\text{ex}}\nabla f(x)) - f(x^*) &\leq f(x) - f(x^*) - \frac{1}{2M}\|\nabla f(x)\|^2 \\ &\leq \left(1 - \frac{m}{M}\right) (f(x) - f(x^*)) \end{aligned}$$

Luego, para el algoritmo de descenso en la iteración k tendremos que

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \left(1 - \frac{m}{M}\right)^k (f(x) - f(x^*)).$$

Tomando $c = 1 - m/M$ se concluye el teorema. □

Método de Newton

La velocidad del método de Newton tiene una justificación teórica potente: se puede probar que converge cuadráticamente rápido. En lo que sigue probamos que converge super-linealmente (un poco más débil). Tomemos f una función dos veces diferenciable, y supongamos que el método converge a un punto x^* tal que $\nabla f(x^*) = 0$. Tomando una expansión de Taylor de $\nabla f(x)$ en torno a x^k tenemos

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) &= \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)(x^* - x^k) + o(\|x^k - x^*\|) \\ \implies 0 &= (\nabla^2 f(x^k))^{-1}\nabla f(x^k) + (x^* - x^k) + o(\|x^k - x^*\|) \\ \implies x^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1}\nabla f(x^k) &= x^* + o(\|x^k - x^*\|) \\ \implies x^{k+1} - x^* &= o(\|x^k - x^*\|) \end{aligned}$$

Esto quiere decir que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} = 0$$

lo que prueba que hay convergencia super-lineal (incluso con un paso fijo).

6.3 Optimización con restricciones

En esta sección introduciremos restricciones a los problemas de optimización. Es decir, estudiaremos problemas del tipo

$$\begin{aligned} & \text{mín} && f(x) \\ & \text{sujeto a:} && x \in \Omega. \end{aligned}$$

Para cierto conjunto Ω . Como anticipamos, en este caso el análisis es bastante más complejo: la presencia de las restricciones hace que las condiciones de optimalidad cambien y que algoritmos como los de descenso no puedan ser aplicados directamente.

6.3.1. Definiciones básicas

Partimos con la definición análoga a la Definición 49, pero considerando adicionalmente un conjunto. Esto nos servirá para introducir las restricciones.

Definición 52. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y considere un conjunto $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

1. Decimos que f es acotada superiormente en Q si existe alguna constante $U \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq U$ para todo $x \in Q$.
2. Decimos que f es acotada inferiormente en Q si existe alguna constante $L \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq L$ para todo $x \in Q$.
3. Decimos que U es supremo de f en Q si U es cota superior de f en Q , y además, si no existe otra cota superior que sea más pequeña.
4. Decimos que L es ínfimo de f en Q si L es cota inferior de f en Q , y además, si no existe otra cota inferior que sea más grande.
5. Decimos que \bar{x} es máximo global de f en Q si $\bar{x} \in Q$ y $f(x) \leq f(\bar{x})$ para todo $x \in Q$.
6. Decimos que \bar{x} es mínimo global de f en Q si $\bar{x} \in Q$ y $f(x) \geq f(\bar{x})$ para todo $x \in Q$.
7. Decimos que \bar{x} es máximo local de f en Q si $\bar{x} \in Q$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(\bar{x})$ para todo $x \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap Q$.
8. Decimos que \bar{x} es mínimo local de f en Q si $\bar{x} \in Q$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(\bar{x})$ para todo $x \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap Q$.

Debido a la presencia de restricciones, los métodos y criterios que hemos visto hasta ahora no funcionan directamente, ni siquiera cuando la función objetivo es convexa. El siguiente simple ejemplo ilustra esto.

Ejemplo 28. Considere el problema de optimización

$$\begin{aligned} & \text{mín} && x^2 \\ & \text{sujeto a:} && x \geq 2 \end{aligned}$$

En este caso, el óptimo global en el conjunto factible es $x^* = 2$, sin embargo $\nabla f(x^*) \neq 0$. Más aún, el único punto donde $\nabla f(x) = 0$ no es factible (no cumple la restricción $x \geq 2$).

El siguiente lema muestra que si “tenemos suerte” y un mínimo local de la función es factible, entonces es un mínimo local en la región factible.

Lema 9. Sea $x^* \in \Omega$ tal que $\nabla f(x^*) = 0$, entonces x^* es un mínimo local en Ω .

Demostración. La demostración de ésto es directa y queda como ejercicio. □

Si bien este lema nos da ciertas esperanzas, en general los problemas de optimización tienen muchas restricciones complejas. Esto tiene como consecuencia que ciertos mínimos locales de la función objetivo no pertenezcan a Ω , y que hayan mínimos locales de la función en Ω que no sean mínimos locales de la función. Para lo que sigue, necesitaremos analizar con más detalles el conjunto Ω . Similarmente al caso sin restricciones, algunos Ω nos entregarán ciertas garantías.

6.3.2. Conjuntos Convexos

Los conjuntos convexos ya fueron definidos en el capítulo de programación lineal (ver la sección 3.2.1), pero recordamos su definición acá.

Definición 53. Decimos que un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1]$$

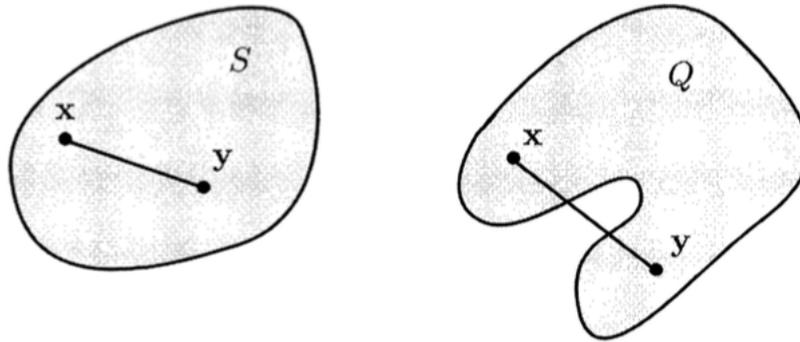


Figura 6.1: Ejemplo de conjunto convexo S y no-convexo Q

Veamos algunos ejemplos de conjuntos convexos. Algunas de estas definiciones ya las hemos visto anteriormente.

1. **Hiperplanos.** Un hiperplano es un conjunto del tipo

$$H_{\alpha, \beta} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha^\top x = \beta\}$$

Por ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - x_3 = 1\}$ es un hiperplano en 3 dimensiones.

Veamos que un hiperplano siempre es un conjunto convexo. Sea $x, y \in H_{\alpha, \beta}$ y $\lambda \in [0, 1]$. Definamos

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

y veamos que $z \in H_{\alpha, \beta}$.

$$\begin{aligned} \alpha^\top z &= \alpha^\top (\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &= \lambda \alpha^\top x + (1 - \lambda) \alpha^\top y \\ &= \lambda \beta + (1 - \lambda) \beta && \text{(pues } x, y \in H_{\alpha, \beta} \text{)} \\ &= \beta \end{aligned}$$

Con esto concluimos que $z \in H_{\alpha, \beta}$ y como consecuencia $H_{\alpha, \beta}$ es convexo.

2. **Semiespacios.** Un semiespacio es un conjunto del tipo

$$S_{\alpha,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha^\top x \leq \beta\}$$

Veamos que un semiespacio es un conjunto convexo. Sea $x, y \in S_{\alpha,\beta}$ y $\lambda \in [0, 1]$. Como antes, definimos

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

y veremos que $z \in S_{\alpha,\beta}$.

$$\begin{aligned} \alpha^\top z &= \alpha^\top (\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &= \lambda \alpha^\top x + (1 - \lambda) \alpha^\top y \\ &\leq \lambda \beta + (1 - \lambda) \beta && \text{(pues } x, y \in S_{\alpha,\beta} \text{ y } \lambda \in [0, 1]) \\ &= \beta. \end{aligned}$$

Con esto concluimos que $z \in S_{\alpha,\beta}$ y como consecuencia $S_{\alpha,\beta}$ es convexo.

3. **Bolas.** Recordemos que una bola de centro x^* y radio R se define como

$$B(x^*, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| \leq R\}$$

y también son conjuntos convexos. Sea $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ con $x, y \in B(x^*, R)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Para demostrar que $B(x^*, R)$ es convexo basta mostrar que $\|z - x^*\| \leq R$:

$$\begin{aligned} \|z - x^*\| &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y - x^*\| \\ &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y - (\lambda x^* + (1 - \lambda)x^*)\| \\ &= \|\lambda(x - x^*) + (1 - \lambda)(y - x^*)\| \\ &\leq \|\lambda(x - x^*)\| + \|(1 - \lambda)(y - x^*)\| && \text{(desigualdad triangular)} \\ &= \lambda\|(x - x^*)\| + (1 - \lambda)\|(y - x^*)\| && (\lambda \geq 0, 1 - \lambda \geq 0) \\ &\leq \lambda R + (1 - \lambda)R && \text{(pues } x, y \in B(x^*, R) \text{ y } \lambda \in [0, 1]) \\ &= R \end{aligned}$$

Concluimos que $\|z - x^*\| \leq R$ y por ende $B(x^*, R)$ es convexo.

Antes de seguir con más ejemplos, probaremos la siguiente proposición, que nos permitirá usar multiples restricciones que definan conjuntos convexos.

Proposición 16. Sea $\{C_i : i \in I\}$ una colección de conjuntos convexos. Entonces, $\bigcap_{i \in I} C_i$ es conjunto convexo.

Demostración. Sea $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ con $x, y \in \bigcap_{i \in I} C_i$ y $\lambda \in [0, 1]$. Para mostrar que $z \in \bigcap_{i \in I} C_i$ basta mostrar que

$$z \in C_i \quad \forall i \in I.$$

Sin embargo, esto es directo ya que $x, y \in C_i$ para cada $i \in I$. Y como cada C_i es convexo, se obtiene $z \in C_i$. \square

Con este último resultado podemos dar una demostración alternativa a la convexidad de los poliedros:

4. **Poliedros.** Un poliedro se define como la intersección de semiespacios:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \alpha_i^\top x \leq \beta_i, i = 1, \dots, m \right\}$$

Por ejemplo, $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1, -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0\}$ es un poliedro. Como todo poliedro es una intersección de conjuntos convexos (semiespacios), usando la proposición anterior vemos que todo poliedro es un conjunto convexo.

El último punto que veremos vincula las funciones convexas con los conjuntos convexos. Es común asumir que el conjunto factible Ω está dado por un conjunto de condiciones del tipo

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \right\}$$

para ciertas funciones g_i . En el caso que cada g_i es una función convexa, tenemos que Ω es un conjunto convexo. En efecto, si $x, y \in \Omega$ entonces

$$\begin{aligned} g_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq \lambda g_i(x) + (1 - \lambda)g_i(y) && (g_i \text{ convexa}) \\ &\leq 0 && (g_i(x) \leq 0 \text{ y } g_i(y) \leq 0) \end{aligned}$$

Esto implica que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega$ y por lo tanto Ω es un conjunto convexo. En general, diremos que el problema

$$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &\text{sujeto a: } x \in \Omega \end{aligned}$$

es *convexo* si f es una función convexa y Ω es un conjunto convexo.

6.3.3. Funciones convexas sobre un conjunto convexo

Todos los conceptos que definimos respecto a funciones convexas se pueden adaptar a casos donde una función está definida sobre un *conjunto* convexo genérico (en vez de \mathbb{R}^n):

Definición 54. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Una función $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa en C si,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1]$$

Decimos que f es estrictamente convexa si la desigualdad anterior es estricta para $\lambda \in (0, 1)$.

Ejemplo 29. La función $f(x) = 1/x$ no es convexa en \mathbb{R} , pero si lo es en $(0, \infty)$.

Teorema 21. (Caracterización de primer orden de funciones convexas). Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, y sea $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en C .

1. La función f es convexa en C si y solo si,

$$f(x) \geq f(y) + (x - y)^\top \nabla f(y) \quad \forall x, y \in C \tag{6.4}$$

2. Si la desigualdad (6.4) es estricta para todo $x \neq y$, entonces f es estrictamente convexa en C .

Demostración. Análogo al caso $C = \mathbb{R}^n$. □

En el caso de la caracterización de segundo orden, el resultado cambia ligeramente:

Teorema 22. (Caracterización de segundo orden de funciones convexas). Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, y sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos-veces continuamente diferenciable en C . Entonces,

1. Si $\nabla^2 f(x)$ es semi-definida positiva para todo $x \in C$, entonces f es convexa.
2. Si $\nabla^2 f(x)$ es definida positiva para todo $x \in C$, entonces f es estrictamente convexa en C .
3. Si C tiene interior no vacío y f es convexa en C , entonces $\nabla^2 f(x)$ es semi-definida positiva para todo $x \in C$.

Demostración. Ver Bertsekas (Proposición B.4). □

Al igual que en el caso sin restricciones, optimalidad local es lo mismo que optimalidad global en el caso convexo.

Lema 10. Sea x un óptimo local de un problema convexo $\min\{f(x) : x \in \Omega\}$. Entonces x es un óptimo global en Ω .

Demostración. Supongamos que x no es un óptimo global, y sea x_g un óptimo global del problema. En particular, $f(x_g) < f(x)$. Al ser x un óptimo local, sea $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(y)$ para todo $y \in B(x, r) \cap \Omega$, y sea $\lambda < r/\|x - x_g\|$ tal que $x^\lambda = \lambda x_g + (1 - \lambda)x$. Luego, $\|x - x^\lambda\| = \lambda\|x - x_g\| < r$, y por lo tanto $x^\lambda \in B(x, r) \cap \Omega$, pues Ω es convexo. Gracias a la convexidad de f tenemos que

$$\begin{aligned} f(x^\lambda) &= f(\lambda x_g + (1 - \lambda)x) \\ &\leq \lambda f(x_g) + (1 - \lambda)f(x) \\ &< \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

lo cual contradice que x sea un mínimo local. □

Ejercicio 29. Muestre que la función $f(x, y) = x^3 + y^2 + 6xy$ no es convexa en todo \mathbb{R}^2 , pero que si lo es en el conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 3\}$.

Ejercicio 30. Argumente por qué las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = \ln(x)$ son convexas en el conjunto $\{x : x > 0\}$.

6.3.4. Condiciones de optimalidad en optimización con restricciones.

El siguiente criterio de primer orden es una generalización de la condición $\nabla f(x) = 0$:

Proposición 17. Sea f una función convexa en Ω con Ω convexo. Entonces x^* es óptimo si y solo si $x \in \Omega$ y

$$\nabla f(x^*)^\top (y - x^*) \geq 0 \quad \forall y \in \Omega$$

Demostración. Sabemos que siempre se cumple que

$$f(y) \geq f(x^*) + (y - x^*)^\top \nabla f(x^*) \quad \forall y \in \Omega$$

por lo que si $\nabla f(x^*)^\top (y - x^*) \geq 0$, entonces claramente $f(y) \geq f(x^*)$ para todo $y \in \Omega$. Esto prueba que x^* es óptimo.

Para la otra dirección supongamos por contradicción que x^* es óptimo, pero que

$$\nabla f(x^*)^\top (y - x^*) < 0$$

para algún $y \in \Omega$. Esto implica que $(y - x^*)$ es una dirección de descenso estricta, es decir, existe un $\epsilon > 0$ pequeño tal que

$$f(x^* + \epsilon(y - x^*)) < f(x^*).$$

Adicionalmente,

$$x^* + \epsilon(y - x^*) = (1 - \epsilon)x^* + \epsilon y$$

y como $x^*, y \in \Omega$ y Ω es convexo, tenemos que $x^* + \epsilon(y - x^*) \in \Omega$. Esto contradice la optimalidad de x^* . Notar que esto implica que si $\nabla f(x^*) \neq 0$, entonces $\nabla f(x^*)$ define un hiperplano tangente a Ω en x^* . \square

Ejemplo 30. Volvamos al Ejemplo 28 dado por

$$\begin{aligned} &\text{mín } x^2 \\ &\text{sujeto a: } x \geq 2 \end{aligned}$$

Si bien $\nabla f(2) \neq 0$, podemos verificar que $\nabla f(2)(y - 2) \geq 0$ para todo $y \geq 2$ lo que implica la optimalidad de $x = 2$. En efecto

$$\nabla f(2)(y - 2) = 4(y - 2) \geq 0.$$

Otro punto importante es lo que pasa cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$, es decir, en el caso sin restricciones. Es ese caso, la condición de optimalidad es

$$\nabla f(x^*)^\top (y - x^*) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

En este caso siempre podemos tomar $y = x^* - \nabla f(x^*)$ (pues no hay restricciones sobre y), lo que implica

$$0 \leq \nabla f(x^*)^\top (y - x^*) = -\|\nabla f(x^*)\| \leq 0.$$

Esto a su vez implica que $\nabla f(x^*) = 0$. De este modo verificamos que la condición de optimalidad de la proposición anterior es efectivamente una generalización de la condición $\nabla f(x^*) = 0$ del caso sin restricciones.

6.3.5. Algoritmos de descenso en el caso con restricciones

De la sección anterior podemos ver que las condiciones de optimalidad en el caso con restricciones no son simples de verificar, incluso para problemas convexos. Por lo tanto, adaptar los métodos de descenso que vimos para que se basen en las condiciones de optimalidad, está lejos de ser directo.

Los problemas principales de los métodos de descenso en presencia de restricciones nacen pues uno debe garantizar que

- La dirección sea válida para el conjunto de restricciones.
- El paso elegido no sea muy grande como para salir del conjunto, o, en caso de salir del conjunto factible, poder volver a él.
- En cada punto se debe verificar si las condiciones de optimalidad se cumplen.

Algunos algoritmos que son capaces de hacer lo mencionado son los algoritmos de *punto interior* y métodos de *gradiente proyectado*, entre otros. Lamentablemente estos métodos requieren un desarrollo extra, y no los cubriremos en este curso. En el siguiente capítulo veremos una alternativa para encontrar óptimos en problemas no-lineales basada en el desarrollo de *dualidad*.

6.4 Ejercicios

P6.4.1. Considere la función $f(x) = cx_1^3 + 3x_1^2 + 2x_2^2 + (c + b)x_1x_2$, donde $c, b \in \mathbb{R}$ son constantes, es decir, no dependen de x .

- Determine todos los valores de $c, b \in \mathbb{R}$ que hacen que f sea una función convexa.
- Escoja algún valor de c, b como en la parte (a), y calcule un mínimo global de f usando los valores de c, b que escogió. **Debe justificar por qué el valor que encuentre es un mínimo global.**
- Para $c = 1$ y $b = 0$, muestre que $x = (0, 1)$ no es un mínimo local y encuentre dos direcciones de descenso distintas.

P6.4.2. Considere la función

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2 + 4xy + 6$$

- Muestre que el punto $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1)$ no es un mínimo local.
- ¿Qué condiciones sobre $d = (d_1, d_2)^\top$ aseguran que sea una dirección de descenso en $(0, 1)$? Usando estas condiciones, de un ejemplo de una dirección de descenso en $(0, 1)$.
- Calcule algún mínimo local de la función, argumentando por qué es efectivamente un mínimo local.

P6.4.3. Dados $v^1, \dots, v^m \in \mathbb{R}^n$, considere el problema de buscar el punto $x \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia (al cuadrado) promedio a los vectores v^i es la menor. Es decir, buscamos resolver

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x - v^i\|^2$$

- Calcule el gradiente de $f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x - v^i\|^2$.
- Muestre que la función $f(x)$ es convexa.
- Calcule un mínimo global de la función f . ¿Es este mínimo único?

P6.4.4. Considere la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2 + z^2) - zx + zy$$

y el punto $\bar{x} = (1, 1, 1)$. Responda las siguientes preguntas:

- El punto \bar{x} , ¿es mínimo local de f ?
- Considere una dirección $d = (d_1, d_2, d_3)$. Suponga que $d_3 = 6$. ¿Qué condición sobre d_1 y d_2 aseguran que d sea dirección de descenso en \bar{x} ?
- Calcule la dirección del método del gradiente y del método de Newton en \bar{x} .

P6.4.5. Considere la función $f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}$. ¿Qué condiciones sobre $d = (d_1, d_2, d_3)$ aseguran que sea una dirección de descenso en el punto $(1, 1, 0)$?

P6.4.6. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas. Pruebe que $f_1 + f_2$ también es una función convexa. ¿Es $f_1 - f_2$ convexa? Si cree que sí, demuéstrela. Si no, de un contraejemplo.

P6.4.7. Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Se define $f(x) = e^{g(x)}$. Muestre que f es convexa.

Indicación: este problema puede resolverlo usando la definición de función convexa, junto con el hecho que la función e^x es convexa y creciente².

²Esto significa que, si $x \leq y$ entonces $e^x \leq e^y$

P6.4.8. Considere la función f definida como

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1} + cx_2^2 + 4x_1x_2 - x_1 + 9$$

donde c es una constante. Determine todos los valores de c que hacen que f sea una función convexa.

P6.4.9. Considere la función g definida como

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 + 10x_2$$

- Determine si g es convexa.
- Muestre que $(1, 1)$ no es un mínimo local y calcule la dirección de Newton en $(1, 1)$. ¿Puede asegurar que es una dirección de descenso?
- Encuentre (si existen) los mínimos locales de esta función argumentando si es que son también globales.

P6.4.10. Usando condiciones necesarias de primer y segundo orden, encuentre todos los candidatos a mínimo local de la función

$$2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2.$$

Argumente si alguno de estos es mínimo global.

P6.4.11. Para la función $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x \cos y$, encuentre todos los candidatos a mínimos locales usando las condiciones necesarias. ¿Cuáles de estos puede asegurar que son mínimos locales?

P6.4.12. Considere la función $f(x, y) = x^2e^{-y} + y^2 + 2y$.

- Muestre que para cualquier punto (x, y) con $x \neq 0$, la dirección $d_x = (-x, 0)$ es una dirección de descenso para f en (x, y) .
- Utilizando condiciones necesarias de primer orden, calcule todos los candidatos a mínimo local.
- ¿Para cuál(es) de estos candidatos puede determinar si es un mínimo local o no? Justifique su respuesta.

P6.4.13. a) Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, y considere una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$. Muestre que la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(Ax + b)$$

es convexa.

- Considere la función $g(x) = \|Cx + d\|^2$ donde $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz, $d \in \mathbb{R}^n$ es un vector y $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$. Muestre que la función g es convexa.
- Considere la función $h(x, y) = cx^3 + y^2 + dxy$, donde $c, d \in \mathbb{R}$ son constantes. Determine si existen valores para c, d que hagan a h una función convexa. Si los hay, calcularlos todos.

P6.4.14. Un conjunto C es un *cono* si satisface las siguientes condiciones:

- $x \in C, t \geq 0 \Rightarrow tx \in C$
- $x, y \in C \Rightarrow x + y \in C$

Muestre que un cono es un conjunto convexo.

P6.4.15. Considere una región factible en 2 dimensiones definida por

$$1 - x^2 \leq 0$$

$$-x + y \leq 0$$

$$-x - y \leq 0$$

Muestre que las funciones que definen la región no son convexas, pero que la región si es un conjunto convexo. Un dibujo le puede ser útil para guiar la demostración.

P6.4.16. Muestre que la función $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy$ no es convexa en todo \mathbb{R}^2 , pero que si lo es en el conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\}$. Con esto muestre que el conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \leq 0, (x, y) \in C\}$$

es convexo.

Dualidad Lagrangeana

Al igual que en el capítulo anterior, consideramos problemas donde la función objetivo como las restricciones podrían ser no-lineales. Estos problemas los podemos escribir como

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{sujeto a: } g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad \quad x \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

donde \mathcal{D} es el *dominio*, que la mayoría de las veces es simplemente \mathbb{R}^n . Este tipo de problemas suelen ser altamente complejos, sin embargo, bajo ciertos supuestos se tienen algunas garantías similares a los que tenemos para programación lineal. Algunas de estas garantías están fuertemente relacionadas con la convexidad de la región factible, la cual está asegurada en ciertos casos. Por ejemplo, cuando las funciones g_i son convexas.

En lo que sigue será conveniente incluir restricciones de igualdad explícitamente, es decir, restricciones del tipo

$$\ell(x) = 0,$$

para cierta función ℓ . Desde un punto de vista de modelamiento, sabemos que incluir una restricción de este tipo es lo mismo que imponer

$$\ell(x) \leq 0, \quad -\ell(x) \leq 0,$$

por lo cual, hasta ahora, no tiene significancia aparente hacer tal diferencia. Sin embargo, cuando hablemos de convexidad, hacer esto tendrá consecuencias. Si ℓ es convexa, entonces $-\ell(x)$ podría no serlo. Más aún, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \ell(x) = 0\}$ podría no ser convexo incluso si ℓ es una función convexa. Por esto motivos, en este capítulo distinguiremos las restricciones de igualdad asumiendo que los problemas de optimización tendrán la forma

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) && (7.1a) \\ & \text{sujeto a: } g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m && (7.1b) \\ & \quad \quad \quad \ell_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p && (7.1c) \\ & \quad \quad \quad x \in \mathcal{D} && (7.1d) \end{aligned}$$

donde ℓ_i es una función *lineal afín*. También asumiremos que la región factible Ω del problema (7.1) es no-vacía.

Ejercicio 31. Probar que si ℓ es una función lineal afín, entonces ℓ y $-\ell$ son funciones convexas.

7.1 Dual Lagrangeano

Para poder lidiar con las restricciones en el problema (7.1), una idea es *penalizarlas* y moverlas al objetivo. Para esto definimos el *lagrangeano* del problema (7.1) como la función $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j \ell_j(x)$$

Las variables (λ, μ) son llamadas *variables duales* o *multiplicadores de Lagrange* asociados al problema. El por qué restringimos λ a ser un vector no-negativo quedará claro más abajo, y está relacionado con que las funciones g_i aparecen en desigualdades en (7.1).

Optimizar $L(x, \lambda, \mu)$ sobre $x \in \mathcal{D}$ es un problema más simple que (7.1) pues todas las restricciones desaparecieron, pero el valor de ambos problemas pueden ser muy distintos. La dependencia en (λ, μ) induce una función $h : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \mu).$$

Acá usamos *inf* pues podría no existir un mínimo. A h la llamamos *función dual*, y podemos probar lo siguiente.

Lema 11. Sea $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p$ y p^* el valor óptimo de (7.1). Luego, $h(\lambda, \mu) \leq p^*$.

Demostración. Sea $\tilde{x} \in \Omega$. Como $\lambda \geq 0$ tenemos que

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^p \mu_i \ell_i(\tilde{x}) \leq 0.$$

De esta forma,

$$h(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \mu) \leq L(\tilde{x}, \lambda, \mu) \leq f(\tilde{x}).$$

Como la desigualdad vale para todo $\tilde{x} \in \Omega$ se concluye que $h(\lambda, \mu) \leq p^*$. □

El lema anterior garantiza que es posible encontrar una cota inferior al valor de p^* con $h(\lambda, \mu)$ utilizando cualquier vector de multiplicadores (λ, μ) con $\lambda \geq 0$. Nótese que no necesitamos imponer restricciones sobre los multiplicadores μ .

Ejemplo 31. En el ejemplo 28 tenemos que $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2 - x$. Por lo tanto el Lagrangeano para este problema es

$$L(x, \lambda) = x^2 + \lambda(2 - x)$$

No es difícil ver que esta función es siempre convexa, por lo que su mínimo x^* está dado por imponer

$$\nabla_x L(x, \lambda) = 2x - \lambda = 0 \Rightarrow x^* = \lambda/2$$

La función dual está dada por:

$$h(\lambda) = L\left(\frac{\lambda}{2}, \lambda\right) = \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\left(2 - \frac{\lambda}{2}\right) = -\frac{\lambda^2}{4} + 2\lambda$$

Esto quiere decir que si usamos $\lambda = 2$, el valor de la función dual es igual a 3. Si usamos $\lambda = 3$ obtenemos 3.75. Y si $\lambda = 4$ obtenemos el valor óptimo real 4.

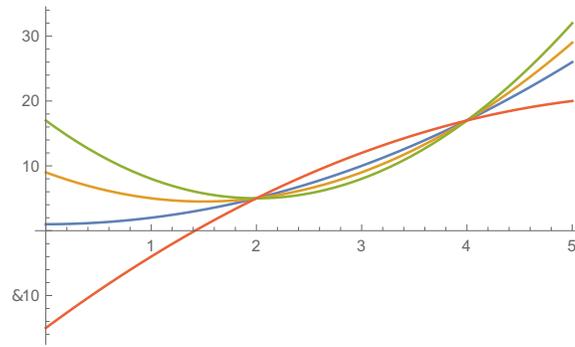


Figura 7.1: $L(x, 0)$ en azul, $L(x, 1)$ en naranja, $L(x, 2)$ en verde y $L(x, -2)$ en rojo para $L(x, \lambda)$ definido en ejemplo 32.

Esto lo podríamos haber calculado directamente. Como cualquier $\lambda \geq 0$ nos da una cota inferior a p^* , para encontrar la mejor cota posible podemos resolver

$$\max_{\lambda \geq 0} \left\{ -\frac{\lambda^2}{4} + 2\lambda \right\}$$

La función $h(\lambda)$ es cóncava, así que basta calcular su gradiente para calcular el máximo

$$\nabla_{\lambda} h(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} + 2 = 0$$

Esto resulta en $\lambda^* = 4$, y como cumple la restricción $\lambda \geq 0$, esto implica que $\lambda^* = 4$ nos da la cota inferior más alta.

Con el ejemplo anterior como motivación, y como nos gustaría tener la mejor estimación posible a p^* , definimos el siguiente problema dual,

$$\max \left\{ h(\lambda, \mu) : \lambda \geq 0 \right\}.$$

Llamemos d^* al valor del problema dual. Por el lema anterior, tenemos entonces que siempre se cumple

$$d^* \leq p^*.$$

Esto se conoce como *dualidad débil*, y es el mismo principio que vimos para programación lineal, pero en un contexto general. La gran diferencia es que en un caso general, no necesariamente se tiene que $d^* = p^*$. El valor $p^* - d^* \geq 0$ lo llamamos *gap de dualidad*, y cuando este valor es igual a cero diremos que el par primal-dual satisface *dualidad fuerte*.

Ejemplo 32. Consideremos ahora el siguiente ejemplo

$$\begin{aligned} &\text{mín } x^2 + 1 \\ &\text{sujeto a: } (x - 2)(x - 4) \leq 0 \end{aligned}$$

Podemos verificar que el conjunto factible es el intervalo $[2, 4]$, y el óptimo es $x^* = 2$, con valor óptimo $p^* = 5$. El lagrangeano es

$$L(x, \lambda) = (1 + \lambda)x^2 - 6\lambda x + (1 + 8\lambda)$$

En la Figura 7.1 plotamos la función $L(x, \lambda)$ para $\lambda = -2, 0, 1, 2$. Notar que $L(x, 0) = f(x)$.

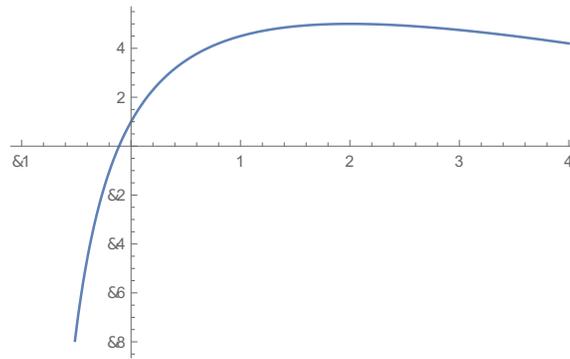


Figura 7.2: Función $h(\lambda)$ para el ejemplo 32.

En la figura vemos algo muy importante del Lagrangeano: no siempre está por debajo de la función $f(x)$, pero su valor mínimo siempre está por debajo de $f(2) = 5$. Notar que para $\lambda \leq -1$ la función $L(x, \lambda)$ no tiene un mínimo, pero solo nos interesa cuando $\lambda \geq 0$. En esta última región para λ la función $L(x, \lambda)$ es convexa y podemos calcular su mínimo:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = 2(1 + \lambda)x - 6\lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{3\lambda}{1 + \lambda}$$

$$h(\lambda) = (1 + \lambda) \left(\frac{3\lambda}{1 + \lambda} \right)^2 - 6\lambda \left(\frac{3\lambda}{1 + \lambda} \right) + (1 + 8\lambda) = \frac{-9\lambda^2}{1 + \lambda} + 8\lambda + 1$$

Esta función está planteada en la Figura 7.2. No es difícil verificar que $h(2) = 5$, por lo tanto el valor del problema dual es igual al problema primal, es decir, el gap de dualidad es 0.

7.2 Dualidad Fuerte

7.2.1. Condiciones de Slater

Cuando un problema satisface dualidad fuerte se cumple que $d^* = p^*$, es decir, existen ciertos multiplicadores (λ, μ) tales que $h(\lambda, \mu) = p^*$. Esto implica que en estos casos, resolver el problema con restricciones es equivalente a resolver un problema sin restricciones, obtenido de penalizar las restricciones. En esta sección veremos condiciones que garanticen que esto se cumpla.

Definición 55 (Punto de Slater). Diremos que $x \in \Omega$ es un punto de Slater si $g_j(x) < 0$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.

Un punto de Slater es un punto factible para el problema (7.1), y que se encuentra en el interior de la región definida por $\{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$. El siguiente teorema garantiza que si el problema es convexo, entonces la existencia de un punto de Slater implica dualidad fuerte para el par primal-dual.

Teorema 23 (Dualidad fuerte). Supongamos que f, g_1, \dots, g_m son funciones convexas, que ℓ_1, \dots, ℓ_p son funciones lineales afines y que existe un punto de Slater en Ω . Luego, $p^* = d^*$.

En el siguiente ejemplo ilustramos cómo se puede utilizar este teorema.

Ejemplo 33. Consideremos el mismo problema que en el ejemplo 32:

$$\begin{aligned} &\text{mín } x^2 + 1 \\ &\text{suje } a: (x - 2)(x - 4) \leq 0. \end{aligned}$$

y supongamos que no conocemos el valor óptimo. Este problema es convexo (verifíquelo!) y tiene un punto de Slater (por ejemplo, el punto $x = 3$) por lo que sabemos que dualidad fuerte se cumple. Para calcular el valor óptimo, entonces, procedemos a calcular el Lagrangiano y la función dual. Esto cálculos ya los hicimos en el ejemplo 32 y probamos que la función dual está dada por

$$h(\lambda) = \frac{-9\lambda^2}{1 + \lambda} + 8\lambda + 1.$$

Ahora calculemos el máximo de $h(\lambda)$. Como esta función es cóncava, el óptimo se puede calcular imponiendo $h'(\lambda) = 0$.

$$h'(\lambda) = \frac{-\lambda^2 + 2x - 8}{(1 + \lambda)^2} = 0$$

Resolviendo una ecuación cuadrática para λ podemos ver que $h'(\lambda) = 0$ para $\lambda = 2$ y $\lambda = -4$. Como buscamos $\lambda \geq 0$ concluimos que $\lambda = 2$ es el óptimo. Como $h(2) = 5$, concluimos que el valor óptimo del problema es 5.

La condición de Slater es sumamente importante, y si no se cumple dualidad fuerte podría fallar. Ilustramos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 34. En este ejemplo veremos un problema convexo donde dualidad fuerte falla. Consideremos

$$\begin{aligned} &\text{mín } e^{-x} \\ &\text{sujeto a: } x^2/y \leq 0 \\ &\quad (x, y) \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{D} = \{(x, y) : y > 0\}$. La función e^{-x} es convexa en todo \mathbb{R} , y la función x^2/y es convexa en \mathcal{D} (se deja como ejercicio verificarlo). El valor óptimo es igual a uno, dado que el único valor factible para x es cero. La función dual es

$$h(\lambda) = \inf_{(x,y) \in \mathcal{D}} \left\{ e^{-x} + \lambda \frac{x^2}{y} \right\}$$

Cuando $\lambda \geq 0$ claramente $h(\lambda) \geq 0$. Además podemos tomar, por ejemplo, $x = M$ para algún M e $y = M^3$ y obtener

$$e^{-M} + \lambda \frac{M^2}{M^3} = e^{-M} + \frac{\lambda}{M} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

por lo tanto, $h(\lambda) = 0$ para $\lambda \geq 0$ y en consecuencia $d^* = \max_{\lambda \geq 0} h(\lambda) = 0$. Esto implica que el gap de dualidad es uno. En particular, en este caso las condiciones de Slater no se cumplen.

7.2.2. Interpretación de los multiplicadores y del problema dual

Antes de seguir con resultados técnicos, veamos una interpretación intuitiva que se le podemos dar a dualidad fuerte y a las componentes del problema dual.

Supongamos que un agente tiene una función de costos dada por $f(x)$, donde $x \in \mathcal{D}$ es una decisión a tomar; por ejemplo, cuánto producir en una empresa. Por otro lado, suponga que existe una restricción $g(x) \leq 0$ que el agente debería cumplir; $g(x)$ podría indicar, por ejemplo, si cierto nivel de emisiones de contaminante asociadas a la producción x está por debajo de las regulaciones locales.

Al agente se le podría forzar a cumplir $g(x) \leq 0$ estrictamente, es decir, que sus contaminantes no sobrepasen cierto nivel. Otra opción sería no forzarlo estrictamente, si no que desincentivar: se permite que una decisión x viole la restricción, pero se le cobrará $\lambda g(x)$ al agente si $g(x) > 0$ para algún

$\lambda \geq 0$. Esto se puede ver como una multa por contaminar. Más aún, supongamos que si una decisión x satisface $g(x) < 0$ entonces se le paga al agente $-\lambda g(x)$; se premia que las emisiones sean bajas.

Si al agente solo le importa minimizar sus costos, entonces debe resolver el siguiente problema de optimización

$$\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) + \lambda g(x),$$

el cual es exactamente $h(\lambda)$. Una solución óptima podría o no cumplir que $g(x) \leq 0$: si λ es pequeño, por ejemplo, al agente podría convenirle contaminar y pagar las multas para obtener los menores costos posibles (lo que suena tristemente familiar).

Vamos ahora al problema dual. El problema dual maximiza $h(\lambda)$, lo cual equivale a encontrar el precio λ que haga que el costo óptimo del agente sea lo más alto posible! Esto se puede ver como un adversario al agente, que simplemente quiere fijar un precio para que el agente gaste lo más posible, asumiendo que el agente siempre buscará minimizar sus costos.

Entonces, ¿qué significa dualidad fuerte? Cuando hay dualidad fuerte existe un λ^* tal que

$$\max_{\lambda \geq 0} h(\lambda) = h(\lambda^*) = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x) + \lambda^* g(x) = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x) \text{ sujeto a } g(x) \leq 0.$$

Es decir, el precio λ^* que hace que el agente *tenga los costos más altos* tiene el mismo efecto que *forzar* a que el agente cumpla la restricción $g(x) \leq 0$. En nuestra interpretación con emisiones de una empresa, esto significa que hay un precio a cobrarle a la empresa por contaminar que indirectamente fuerza a que la empresa no contamine más de lo permitido.

7.3 Condiciones de KKT

7.3.1. Holgura complementaria

Recordemos que en programación lineal se cumple holgura complementaria entre el par primal-dual. Además, dualidad fuerte siempre se cumple. En general los problemas no-lineales podrían no cumplir dualidad fuerte, sin embargo, cuando se cumple, entonces holgura complementaria también se satisface. Sea x^* un óptimo para el primal y (λ^*, μ^*) un óptimo para el dual. Si dualidad fuerte se cumple tenemos que

$$f(x^*) = p^* = d^* = h(\lambda^*, \mu^*) = \min_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda^*, \mu^*)$$

Esto implica

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda^*, \mu^*) \tag{7.2a}$$

$$\leq L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \tag{7.2b} \text{ por definición de mínimo}$$

$$= f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \ell_j(x^*) \tag{7.2c}$$

$$\leq f(x^*) \tag{7.2d} \text{ pues } \ell_j(x^*) = 0 \text{ y } g_j(x^*) \leq 0$$

Luego, tenemos que

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j(x^*) = 0$$

y como todos los $\lambda_j^* g_j(x^*)$ tienen el mismo signo, entonces concluimos que

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Esto último es *holgura complementaria* en un caso general. Similarmente al caso lineal, esto tiene como consecuencia que

$$g_j(x^*) < 0 \Rightarrow \lambda_j^* = 0$$

Es decir, si para una solución óptima la restricción $g_j(x) \leq 0$ se satisface con holgura, entonces el multiplicador dual óptimo (“precio” asociado a la restricción) debe ser 0. Estas condiciones nos permitirán encontrar candidatos a óptimo en el caso no-lineal con restricciones.

7.3.2. Condiciones de KKT necesarias

Otra consecuencia de (7.2) es que

$$\min_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda^*, \mu^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$$

Es decir, x^* es un mínimo *global* de la función $L(x, \lambda^*, \mu^*)$. Bajo supuestos de diferenciablez, tenemos que se deben cumplir las siguientes condiciones necesarias

$$0 = \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla \ell_j(x^*)$$

Recolectando todas las condiciones que hemos obtenido sobre x^* y (λ^*, μ^*) :

$$g_i(x^*) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (7.3a)$$

$$\ell_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (7.3b)$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (7.3c)$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (7.3d)$$

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla \ell_j(x^*) = 0 \quad (7.3e)$$

Estas condiciones se conocen como las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, o KKT. Resumimos el desarrollo anterior en el siguiente resultado.

Lema 12. *Supongamos que f, g_1, \dots, g_m y ℓ_1, \dots, ℓ_p son diferenciables, y que se tiene dualidad fuerte, $p^* = d^*$. Sea (x^*, λ^*, μ^*) un par primal-dual óptimo. Entonces (x^*, λ^*, μ^*) satisface las condiciones de KKT.*

No olvidar que acá hablamos solo de condiciones *necesarias*, y que solo se pueden asegurar cuando se cumple dualidad fuerte. En particular, si el problema es *convexo* y se satisfacen las condiciones de *Slater*, entonces un par de óptimos primal-dual debe satisfacer las condiciones de KKT. Sin embargo, en el caso no-convexo también hay casos donde KKT se satisface.

Teorema 24. *(Karush-Kuhn-Tucker) Consideremos las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, m$ y $\ell_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $j = 1, \dots, p$ continuamente diferenciables. Sea x^* factible e $I = \{i = 1, \dots, m : g_i(x^*) = 0\}$ el conjunto de restricciones activas en x^* . Supongamos que*

$$\left\{ \nabla g_i(x^*) : i \in I \right\} \cup \left\{ \nabla \ell_j(x^*) : j = 1, \dots, p \right\} \text{ son vectores linealmente independientes} \quad (7.4)$$

Entonces, si x^ es mínimo local del problema, existen $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ y $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$ tales que x^* y (λ, μ) satisfacen las condiciones de KKT.*

En general, a condiciones que aseguran que los mínimos locales cumplan las condiciones de KKT se les conoce como *condiciones de regularidad* o *condiciones de calificación de restricciones*. A las condiciones de regularidad (7.4) se les conoce como LICQ (*linear independence constraint qualification*).

Hasta ahora hemos visto que cualquiera de las siguientes condiciones {convexidad + Slater, LICQ} implica que un mínimo local debe satisfacer KKT. En lo que sigue veremos el converso, es decir, cuando un punto que satisface KKT es mínimo.

7.3.3. Condiciones suficientes

El caso convexo, como es usual, es un caso donde obtenemos un buen comportamiento del problema. Aquí se puede probar que las condiciones de KKT son suficientes para que un punto sea óptimo.

Lema 13. *Supongamos que f, g_1, \dots, g_m son diferenciables y convexas, y ℓ_1, \dots, ℓ_p lineales afines. Supongamos que existe (x^*, λ^*, μ^*) tal que satisface las condiciones de KKT. Entonces (x^*, λ^*, μ^*) es un par primal-dual óptimo y $p^* = d^*$, es decir, se tiene dualidad fuerte.*

Demostración. De las dos primeras condiciones en KKT tenemos que x^* es primal factible. Como $\lambda^* \geq 0$, tenemos que $L(x, \lambda^*, \mu^*)$ es una función convexa en x . Esto se tiene gracias a que las restricciones de igualdad son afines. Al ser L diferenciable y convexa, la última condición de KKT implica que $x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda^*, \mu^*)$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x^*) &= f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i^* \ell_i(x^*) \\ &= L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda^*, \mu^*) = h(\lambda^*, \mu^*). \end{aligned}$$

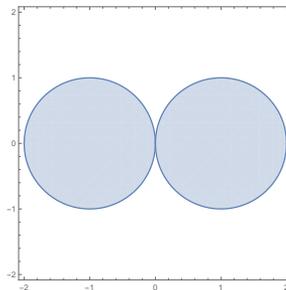
Es decir, se tiene dualidad fuerte y (x^*, λ^*, μ^*) es un par primal-dual óptimo. □

Es muy importante notar que esto no necesariamente implica que baste con resolver KKT para encontrar el óptimo. Lo que dice el Lema anterior es solo que *si existe tal punto* entonces es óptimo. Puede pasar que un problema convexo no tenga ningún punto que satisfaga KKT, como ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 35. *Considere el siguiente problema de optimización:*

$$\begin{aligned} &\text{mín } x_2 \\ &\text{sujeto a: } (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1 \\ &\quad (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Tanto la función objetivo como las funciones que definen las restricciones son funciones convexas, por lo que el problema es convexo. La región factible es la intersección de 2 círculos, como se ve en la siguiente figura:



De esta figura, vemos que el único punto factible es $(0, 0)$, por lo tanto es el óptimo. El Lagrangeano está dado por

$$L(x, \lambda) = x_2 + \lambda_1((x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2((x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1),$$

y su gradiente está dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x, \lambda) &= 2\lambda_1(x_1 - 1) + 2\lambda_2(x_1 + 1), \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x, \lambda) &= 1 + 2\lambda_1x_2 + 2\lambda_2x_2. \end{aligned}$$

Esto evaluado en el único punto factible da

$$\nabla_x L(0, \lambda) = [-2\lambda_1 + 2\lambda_2, 1]^T$$

Como la segunda componente es distinta de cero, vemos que no existe un par (x, λ) que cumpla las condiciones de KKT. Veamos cómo fallaron las condiciones de regularidad. Como la región factible es un único punto, donde ambas restricciones son activas, las condiciones de Slater no se cumplen. Las condiciones LICQ también fallan: ambas restricciones son activas en el óptimo, y sus gradientes evaluados en $(0, 0)$ son iguales.

Al incluir las condiciones de Slater se puede obtener algo más fuerte.

Teorema 25. Supongamos que f, g_1, \dots, g_m son diferenciables y convexas, y ℓ_1, \dots, ℓ_p son afines. Si existe un punto de Slater, entonces (x^*, λ^*, μ^*) es un par primal-dual óptimo si y solo si satisface las condiciones de KKT.

Demostración. Gracias al Teorema 23, la existencia de un punto de Slater implica dualidad fuerte. Luego, del Lema 12 se concluye que todo par primal-dual óptimo satisface KKT. La recíproca queda garantizada por el Lema 13. \square

En el caso no-convexo también podemos obtener condiciones suficientes, pero debemos asumir que las funciones son dos veces diferenciables:

Teorema 26. Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, m$ y $\ell_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, p$ son funciones continuamente diferenciables. Sea $x^* \in \mathbb{R}^n$ un punto que satisface KKT con los multiplicadores $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ y $\mu \in \mathbb{R}^p$ y Ω la región factible del problema original. Entonces,

1. Si $\nabla_x^2 L(x, \lambda^*, \mu^*)$ es definida positiva para todo $x \in \Omega$, entonces x^* es mínimo global de f en Ω .
2. Si $\nabla_x^2 L(x, \lambda^*, \mu^*)$ es semi-definida positiva en una vecindad de x^* entonces x^* es mínimo local de f en Ω .
3. Si $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ es definida positiva, entonces x^* es mínimo local de f en Ω .

Demostración. Como tenemos un punto que satisface KKT, entonces $L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = f(x^*)$ y $L(x, \lambda^*, \mu^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Si $\nabla_x^2 L(x, \lambda^*, \mu^*)$ es definida positiva para todo $x \in \Omega$, puesto que $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$, sabemos que x^* es mínimo global de L en Ω . Luego, $f(x^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \leq L(x, \lambda^*, \mu^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega$. Con esto concluimos que x^* es mínimo global de f en Ω . Los otros casos son análogos. \square

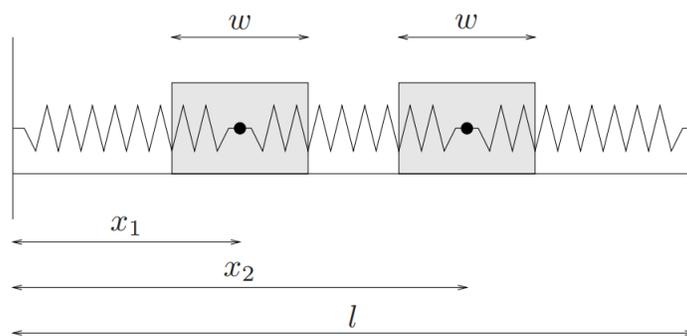


Figura 7.3: Sistema de resortes y bloques

7.3.4. Interpretación mecánica para los multiplicadores de Lagrange

Considere el sistema de resortes de la Figura 7.3. Cuando los bloques se encuentran en las posiciones x_1 y x_2 , la energía potencial de los resortes está dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(l - x_2)^2$$

donde los k_i son las constantes de elasticidad de los resortes. Para encontrar el estado de equilibrio del sistema debemos encontrar la configuración de menor energía. Esto se puede encontrar resolviendo

$$\begin{aligned} \text{mín } & \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(l - x_2)^2 \\ \text{sujeto a: } & w/2 - x_1 \leq 0 \\ & w + x_1 - x_2 \leq 0 \\ & w/2 - l + x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Las restricciones del problema simplemente imponen que los bloques no pueden traspasar las paredes ni se pueden traspasar entre ellos. Si llamamos λ_i $i = 1, \dots, 3$ a los multiplicadores de las restricciones, el gradiente del Lagrangeano está dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x, \lambda) &= k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) - \lambda_1 + \lambda_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x, \lambda) &= k_2(x_2 - x_1) - k_3(l - x_2) - \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}$$

Por lo que las condiciones de KKT implican que

$$\lambda_1(w/2 - x_1) = 0 \tag{7.5a}$$

$$\lambda_2(w + x_1 - x_2) = 0 \tag{7.5b}$$

$$\lambda_3(w/2 - l + x_2) = 0 \tag{7.5c}$$

$$k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \tag{7.5d}$$

$$k_2(x_2 - x_1) - k_3(l - x_2) - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \tag{7.5e}$$

Notar que las expresiones k_1x_1 , $k_2(x_2 - x_1)$ y $k_3(l - x_2)$ corresponden a las fuerzas aplicadas por los resortes en los bloques. Por esto, las condiciones (7.5d) y (7.5e) se pueden interpretar como un balance de fuerzas (lo cual es esperable que pase en equilibrio) donde los λ_i son fuerzas de contacto. Más específicamente, λ_1 y λ_3 pueden ser interpretados como la fuerza que ejerce la pared izquierda sobre el bloque izquierdo y la fuerza que ejerce la pared derecha sobre el bloque derecho, respectivamente. Mientras que λ_2 es la fuerza de contacto entre los bloques. La Figura 7.4 muestra un

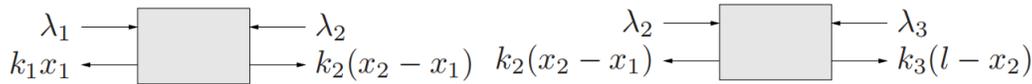


Figura 7.4: Diagrama de fuerzas para el sistema

diagrama de fuerzas con estas interpretaciones de los multiplicadores duales.

Con esta interpretación veamos qué significan las condiciones de holgura complementaria (7.5a), (7.5b) y (7.5c). Por ejemplo, si $x_1 > w/2$, (7.5a) implica que $\lambda_1 = 0$. Esto se traduce a que si el bloque de la izquierda no está pegado a la pared izquierda, entonces la pared no ejerce fuerza sobre el bloque. El mismo tipo de análisis se puede realizar para las otras fuerzas de contacto.

7.4 Análisis de Sensibilidad

Estamos considerando un problema de optimización del tipo

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ \text{sujeto a: } & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \ell_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Supongamos que un óptimo es x^* y que además tenemos dualidad fuerte, es decir, existen multiplicadores (λ^*, μ^*) tales que

$$f(x^*) = p^* = d^* = h(\lambda^*, \mu^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$$

Anteriormente vimos que las condiciones de holgura complementaria sugieren que los multiplicadores λ^*, μ^* miden, de cierta manera, la importancia o *precio* de una restricción. Formalizaremos esa noción. Supongamos que perturbamos el problema original de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ \text{sujeto a: } & g_i(x) \leq u_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \ell_i(x) = v_i \quad i = 1, \dots, p \\ & x \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

con u, v vectores. Llamemos $p^*(u, v)$ el valor óptimo del problema perturbado. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} p^* &= p^*(0, 0) \\ &= h(\lambda^*, \mu^*) \\ &= f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \ell_j(x^*) \\ &= \text{mín}_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda^*, \mu^*) \\ &\leq f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \ell_j(x) \end{aligned}$$

Para todo x . Tomando x en el problema perturbado tenemos que

$$p^*(0, 0) \leq f(x) + u^\top \lambda^* + v^\top \mu^*$$

Esto implica que

$$p^*(u, v) \geq p^*(0, 0) - u^\top \lambda^* - v^\top \mu^*$$

Las interpretaciones de esta desigualdad son las siguientes:

- Si un valor de λ_i^* es grande, y escogemos un valor de $u_i < 0$ (es decir, hacemos la restricción más restrictiva), entonces el valor de $p^*(u, v)$ está garantizado a subir mucho.
- Si un valor de λ_i^* es pequeño, y escogemos un valor de $u_i > 0$ (es decir, hacemos la restricción menos restrictiva), entonces el valor de $p^*(u, v)$ no bajará mucho.
- Si un valor de μ_i^* es grande (positivo), y escogemos un valor de $v_i < 0$, entonces el valor de $p^*(u, v)$ está garantizado a subir mucho. Lo mismo si los signos se cambian.
- Si un valor de μ_i^* es pequeño y positivo, y escogemos un valor de $v_i > 0$, entonces el valor de $p^*(u, v)$ no bajará mucho. Lo mismo si los signos se cambian.

Notar que en el caso de las restricciones de igualdad, no solo importa la magnitud del multiplicador, si no que también el signo. Esto indica que el multiplicador está además dando una dirección para donde *no* conviene modificar una restricción.

Es importante destacar que estos casos no son completamente simétricos, dado que solo tenemos una desigualdad. Esto se traduce en que no contamos con ningún caso que garantice que $p^*(u, v)$ bajará mucho con respecto a $p^*(0, 0)$. Sin embargo, existe un caso donde podemos decir esto: si $p^*(u, v)$ es una función diferenciable, entonces se puede mostrar que

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i}, \quad \mu_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial v_i}$$

Es decir, en este caso los multiplicadores de Lagrange son *exactamente* la sensibilidad local del valor óptimo con respecto a las restricciones.

7.5 Ejercicios

P7.5.1. Asuma sin demostrar que el óptimo del siguiente problema cumple las condiciones de KKT, y encuentre su óptimo global.

$$\begin{aligned} \text{mín } & -xy \\ \text{s.a. } & x + y^2 \leq 2 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

P7.5.2. Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \text{mín } & (x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 \\ \text{s.a. } & x + 4y \leq 3 \\ & -x + y \leq 0. \end{aligned}$$

Muestre que este problema es convexo y que tiene un punto de Slater. Luego, encuentre el óptimo usando las condiciones de KKT.

P7.5.3. (a) Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, A una matriz de $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$, y considere el problema de minimizar $\frac{1}{2}\|x - x_0\|^2$, sujeto a las restricciones $Ax \leq b$.

Muestre que los multiplicadores de KKT $\lambda \in \mathbb{R}^m$ deben satisfacer

$$\lambda^T A A^T \lambda = \lambda^T (A x_0 - b), \quad \lambda \geq 0$$

(b) Usando la parte anterior, resuelva

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \\ \text{s.t} \quad & x - 2y + z \leq -1 \end{aligned}$$

No olvide argumentar por qué imponer las condiciones de KKT bastan para encontrar el óptimo.

P7.5.4. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_2 \\ \text{s.a.} \quad & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq 1 \end{aligned}$$

El objetivo de este problema es dar un ejemplo donde una solución óptima no satisface las condiciones de KKT, incluso en el caso convexo.

- Argumente por qué este problema es convexo.
- Dibuje los conjuntos definidos por $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1$ y por $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leq 1$ y encuentre su intersección.
- En base a la pregunta anterior, calcule una solución óptima (x_1^*, x_2^*) del problema.
- Muestre que (x_1^*, x_2^*) no cumple las condiciones de KKT. Es decir, que no existen multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tales que $(x_1^*, x_2^*, \lambda_1, \lambda_2)$ satisfacen el sistema de KKT.
- ¿Cuál de las condiciones necesarias para KKT vistas en clases falló?

P7.5.5. Considere el siguiente problema,

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1^2 + x_2 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

Puede asumir sin demostración que este problema tiene un mínimo global.

- Argumente por qué este problema no es convexo.
- Sea $g_1(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2$ y $g_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 6$ las funciones que definen las restricciones. Calcule los gradientes de g_1 y g_2 , y luego muestre que los puntos (\bar{x}_1, \bar{x}_2) donde $\nabla g_1(\bar{x})$ y $\nabla g_2(\bar{x})$ son linealmente *dependientes* no satisfacen ambas restricciones con igualdad simultáneamente.
- De la parte anterior, concluya que el mínimo global debe cumplir las condiciones LICQ.
- Escriba las condiciones de KKT y calcule todos los puntos que las satisfacen. De estos puntos, calcule el óptimo del problema.
Advertencia: Esta parte requiere analizar varios casos respecto a los distintos valores que pueden tomar las variables primales y duales. Así que paciencia!

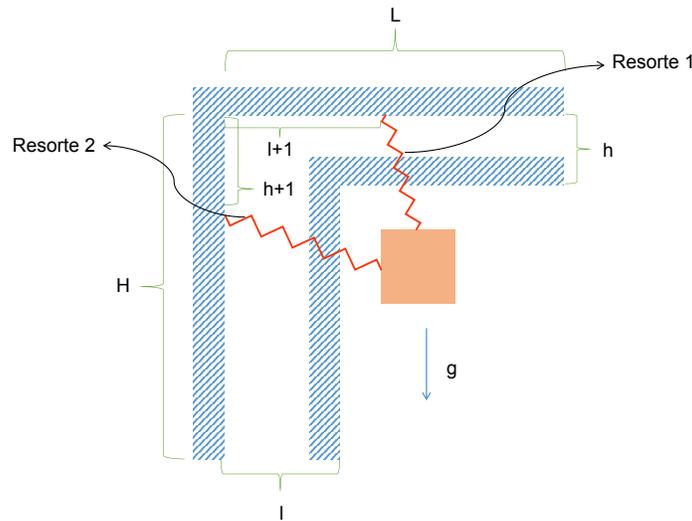


Figura 7.5: Sistema de resortes para P5

P7.5.6. Considere el sistema de resortes de la Figura 7.5. En este sistema se muestra un bloque de masa m y dimensiones 2×2 conectado a dos resortes. El resorte 1 está conectado a la pared exterior superior, cuyo alto es H , a una distancia $l + 1$ de la pared exterior izquierda y tiene una constante de elasticidad k_1 . Si posicionamos el origen en la esquina inferior izquierda, esto implica que el resorte 1 está conectado en las coordenadas $(l + 1, H)$ (ignorar el grosor de las paredes). Similarmente, el resorte 2 está conectado a la pared exterior izquierda a una altura $H - h - 1$, es decir, está conectado en las coordenadas $(0, H - h - 1)$. El resorte 2 tiene una constante de elasticidad k_2 . El bloque está además siendo afectado por la gravedad.

Además, existen 2 paredes interiores que el bloque no puede atravesar, pero los resortes sí¹. La pared interior izquierda está a distancia l de la pared exterior izquierda, y la pared interior superior está a distancia h de la pared exterior superior.

- Dada una posición (x, y) del centro de masa del bloque, escriba las 3 energías potenciales del sistema: potencial elástica de ambos resortes y potencial gravitatoria.
- Formule un problema de optimización que calcula el equilibrio del sistema, es decir, la posición del bloque que minimiza la energía potencial total, sujeto a que el bloque no pueda atravesar las paredes internas. ¿Es este problema convexo? ¿Cumple alguna de las condiciones de regularidad? No es necesario resolver el problema.
- Considere la configuración de la Figura 7.6, donde la posición del centro de masa del bloque es exactamente $(l + 1, H - h - 1)$. Intuitivamente, ¿qué debería cumplir k_1 para que esta posición sea un equilibrio?
- Usando las condiciones de KKT del problema formulado en (b), encuentre las condiciones que debe cumplir k_1 para que la posición $(l + 1, H - h - 1)$ del bloque sea un equilibrio.

¹Esto suena raro, pero (1) en 3 dimensiones sí puede pasar haciendo una ranura en la pared y (2) es solo un ejercicio ilustrativo :)

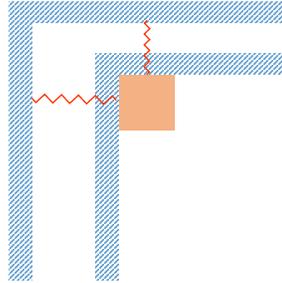


Figura 7.6: Configuración de equilibrio para P5

P7.5.7. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 9 \end{aligned}$$

- ¿Es este problema convexo? Argumente.
- Calcule un punto de Slater.
- Determine las condiciones de KKT para este problema y calcule todos los puntos que las satisfagan.
- ¿Se puede determinar el mínimo global desde los puntos calculados en la parte anterior? Argumente. Si se puede, muestre un mínimo.

P7.5.8. Considere el problema de optimización no-lineal

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 1)^2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

- Muestre que este problema es convexo y que satisface las condiciones de Slater.
- Muestre que el Lagrangeano $L(x, \lambda)$ es una función convexa para todo λ .
- Calcule la función dual $h(\lambda)$.
- Muestre que el multiplicador $\lambda = 0$ no es un máximo local de la función dual.
Indicación: Un máximo local de $h(\lambda)$ es un mínimo local de $-h(\lambda)$.
- Usando condiciones necesarias, calcule los candidatos a máximos locales de $h(\lambda)$. ¿Puede afirmar que alguno sea un máximo global? ¿Qué estimaciones puede obtener del valor del problema de optimización original?

P7.5.9. Considere el siguiente problema de optimización no-lineal

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & (x_1 - 1)^2 + x_2 - 2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \\ & -x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

- a) Muestre que este problema es convexo y que tiene un punto de Slater.
- b) Calcule todos los puntos que satisfacen las condiciones de KKT.
- c) ¿Puede asegurar si es que alguno de los puntos que encontró en la parte anterior es el óptimo global? Si es así, argumente su respuesta y muestre el óptimo.

P7.5.10. Considere el problema de optimización

$$\begin{aligned} &\text{mín } x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 \\ &\text{s.a. } x + 2y - z \leq 3 \end{aligned}$$

Argumente por qué el Lagrangeano es una función convexa en las variables (x, y, z) , y calcule la función dual del problema.