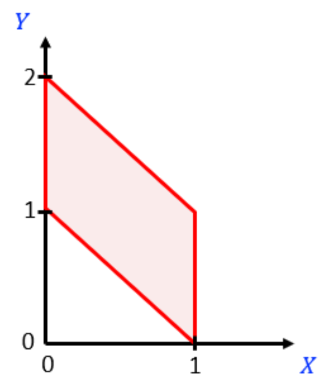
Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Probabilidades - IN3141
Profesor: Felipe Del Solar, Charles Thraves
Aux's: Josefa Mardones, Josefa Torres,
Iván Vidal, Isidora Zenteno, Amal Zgheib

Auxiliar #8

Distribución Multivariada & Estadísticos de Orden

Pregunta 1

Sean las VA X e Y con densidad uniforme en el área descrita en la figura.



(a) Calcular la PDF conjunta

(b) Calcule la PDF de X condicional en Y. Además, si dicha distribución calza con alguna de las vista en clases, mencione su nombre y parámetros.

Pregunta 2

(a) Sean X e Y dos variables aleatorias continuas conjuntamente, con función de densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2}y, & \text{si } -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Encuentre y responda:

(i) La función de densidad condicional de X dado Y.

(ii) ¿Son X e Y independientes? Justifique su respuesta.

(b) En una carrera, compiten dos corredores: uno del equipo A y otro del equipo B. El tiempo (en segundos) que cada competidor tarda en llegar a la meta es una variable aleatoria Exponencial. Para el corredor del equipo A, el tiempo sigue una distribución Exponencial con parámetro de tasa λ, mientras que para el corredor del equipo B, el tiempo sigue una distribución Exponencial con parámetro de tasa μ. Ambas variables aleatorias son independientes entre sí.

  (i) Calcule la probabilidad de que el ganador de la carrera llegue a la meta en menos de t segundos. Además, indique si este tiempo sigue alguna de las distribuciones estudiadas en clase.

  (ii) ¿Cúal es el tiempo esperado en que el corredor perdedor termina la carrera?

c) Considere un satélite que se manda a órbita, el cual consta de una pieza clave que es necesaria para el correcto funcionamiento del satélite. Dada la importancia de esta pieza, el satélite cuenta n unidades en total de esta pieza, que operan en paralelo, de modo que el satélite sigue operativo hasta que todas las piezas fallan. Suponga que los tiempo de funcionamiento de las piezas son variables aleatorios iid de distribución exponencial con tasa μ [1/años]. Cuando todas las piezas fallan el satélite deja de funcionar de forma permanente. ¿Cuál es la duración promedio del satélite? ¿Cuál es la probabilidad que el satélite se mantenga funcional por al menos t años?

Pregunta 3 (propuesto)

Durante una maratón (42 kms), se observa que los corredores se detienen a descansar debido al agotamiento físico. Para cada corredor, la distancia que recorre entre descansos es una variable aleatoria exponencial con parámetro λ (1/kms), independiente de los descansos anteriores y los otros corredores.

a) Suponga que un corredor se detuvo exactamente n veces antes de completar la maratón de 42 km. Para esto, considere que condicionadas a haber ocurrido n detenciones, las distancias recorridas hasta cada una de ellas se distribuyen de forma uniforme en el intervalo $(0, 42)$. ¿cuál es el valor esperado del promedio de las distancias que le faltaban por recorrer al momento de cada descanso?

b) Suponga que ud. corre junto a $(k-1)$ amigos, y que todos descansan cuando alguien del grupo lo necesita. Cual es la probabilidad de que terminen la maratón deteniéndose exactamente 3 veces? **Hint:** La suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro λ tiene distribución Gamma con parámetros n y λ.

c) Suponga ahora que cada corredor descansa de acuerdo a su propia tasa. Esto es, el corredor i, descansa de acuerdo a una tasa λ_i (1/kms). Además en el punto de partida, usted (corredor 1) y sus amigos (corredores 2 al k) deciden apostar acerca de quien puede correr la mayor distancia sin detenerse, y están dispuestos a correr más de los 42 kms de ser necesario. ¿Cual es la probabilidad que usted sea el último en detenerse? Cuanta distancia recorre en promedio la ultima persona en detenerse?

   Hint 1:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) = \sum_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} \prod_{i\in S} x_i$$

   Hint 2: Sea X una variable aleatoria no negativa, entonces

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, dx$$