Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Probabilidades - IN3141
Profesor: Charles Thraves & Felipe Del Solar
Aux's: Josefa Mardones, Josefa Torres,
Iván Vidal, Isidora Zenteno & Amal Zgheib

Ejercicios C2

Pregunta 1

En un pueblo aislado viven m habitantes con una gran afición por su equipo local, el cual se juega la posibilidad de clasificar al campeonato nacional en los próximos días. Las posibilidades de clasificar no son muchas, por lo cual la decisión del precio q a cobrar por cada entrada al espectáculo no es evidente: si se cobra un precio muy alto, poca gente podrá acudir al evento. Según estimaciones realizadas con antecedentes históricos, se sabe que si se cobra un precio q por la entrada, entonces cada habitante del pueblo asiste, independiente de los demás, con probabilidad e^{-q} al estadio. Suponga además que el estadio tiene capacidad m, es decir, todas las personas del pueblo podrían asistir.

a) ¿Qué pasa si la entrada es gratuita? ¿Y si el precio es muy alto?

b) Si se cobra q, ¿cuál es el valor esperado y la varianza del ingreso monetario?

c) ¿Qué precio se debe cobrar si se desea maximizar los ingresos esperados?

Pregunta 2

Los auxiliares de un ramo instalan un nuevo sistema para decidir la nota final de los alumnos: guardan en una caja siete pelotas numeradas desde el 1 hasta el 7, y para cada alumno sacan una pelota al azar, le ponen como nota el número que indica la pelota, y luego la devuelven a la caja. Suponga que la sección tiene 50 personas (ordenadas según su número de lista) y que la nota de aprobación es 4.

a) Calcule la probabilidad de que el alumno 4 pase el ramo.

b) Calcule la probabilidad de que al menos una persona pase el ramo.

c) Calcule la probabilidad de que más de 45 personas pasen el ramo.

d) Calcule el número esperado de estudiantes que pasan el ramo.

e) Calcule la probabilidad de que el alumno 7 sea el tercero en pasar el ramo.

f) Sea M el número de lista de la primera persona en obtener nota 7. Calcule el valor esperado y la varianza de M.

Suponga que ahora tienen 10 pelotas con cada una de las notas, es decir, tienen 70 pelotas (10 pelotas con un 1, 10 pelotas con un 2, etc), y que ya no se devuelven a la caja las pelotas extraídas.

g) Repita los cálculos desde a) hasta e) en este nuevo contexto.

h) Sea M el número de lista de la primera persona en obtener nota 7. Calcule la probabilidad de que M sea menor o igual a 3.

Pregunta 3

Su artista favorita sacará una nueva canción. El gusto de usted por la nueva canción se puede representar por una variable aleatoria continua X, donde $X = 1$ representa que le gusta mucho y $X = -1$ representa que usted la detesta. La PDF de X está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \frac{4}{3}x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verifique que f_X es una función de densidad bien definida.

b) Diremos que usted *tolera* la canción (pero no le encanta), si es que $0 \leq X \leq 0.3$ Calcule la probabilidad de que usted *tolere* la canción.

c) El efecto que provoca la canción en usted (ya sea gusto o disgusto) se representa por la variable $Y = |X|$. Ocupe el TCV para calcular la PDF de Y.

d) Calcule el valor esperado de Y.

e) Diremos que la canción no tiene un efecto relevante en su vida si es que Y es menor o igual a 0.5. Calcule la probabilidad de que la canción sí tenga un efecto relevante en su vida.

Pregunta 4

En Economía se dice que un agente, con función de utilidad U, frente a una v.a. X es:

- **Averso al Riesgo** ssi $U(\mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(U(X))$.
- **Favorable al Riesgo** ssi $U(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(U(X))$.
- **Neutral al Riesgo** ssi $U(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(U(X))$.

Si $X \sim Uniforme(0, 1)$, indique el tipo de agente las siguientes funciones de utilidad:

a) $U(t) = t^2$.

b) $U(t) = ln(t)$.

c) $U(t) = a + bt$

Pregunta 5

Usted administra una granja de gallinas felices y está considerando comprar por adelantado alimento para la siguiente temporada, ya que el precio actual es relativamente bajo y se quiere proteger contra futuras alzas. Ha calculado que para la siguiente temporada necesita 10.000 kilos de alimento. Si compra ahora, el costo por kilo es de \$3.000 (suponga que no hay costo extra por almacenar el alimento hasta la siguiente temporada). De acuerdo a su conocimiento del mercado, pronostica que hay tres escenarios posibles para el valor del alimento en la siguiente temporada: (i) el bueno, en que el precio es \$1.000 por kilo, (ii) el intermedio, con \$4.000 por kilo, y (iii) el malo, con \$8.000 por kilo. Estos escenarios ocurren con probabilidad 3/4, 1/8 y 1/8, respectivamente.

a) Llame X al costo por kilo en la siguiente temporada. Calcule el rango, la PMF, la CDF, el valor esperado y la varianza de X.

b) Suponga que si termina pagando más de \$50.000.000 la granja se va a la quiebra. Calcule (i) la probabilidad de que la granja quiebre si no compra nada ahora, y (ii) la probabilidad de que la granja quiebre si compra los 10.000 kilos ahora.

c) Llame Y_z al costo total que terminaría pagando si compra $0 \leq z \leq 10.000$ kilos ahora, es decir, el costo de z kilos al precio de hoy, más el costo de $(10.000 - z)$ kilos al precio de la siguiente temporada. Calcule el rango y el valor esperado de Y_z (exprese estas respuestas en función de z). ¿Qué cantidad z le conviene comprar ahora si su objetivo es minimizar $\mathbb{E}[Y_z]$?

d) Calcule la probabilidad de quebrar en términos de z. ¿Qué cantidad z le conviene comprar ahora si su objetivo es minimizar $\mathbb{E}[Y_z]$, pero evitando a toda costa la quiebra (es decir, sujeto a que la probabilidad de quiebra es 0)?

Pregunta 6

Investigaciones del Metro han revelado que el tiempo de espera en minutos, hasta que pase un tren por una estación, es una v.a. T con función de distribución (acumulada) F_T definida por: $F_T(t) = 0$ para $t < 0$; $F_T(t) = t/2$ para $0 \leq t \leq 1$; $F_T(t) = 1/2$ para $1 < t < 2$; $F_T(t) = t/4$ para $2 \leq t \leq 4$; $F(t) = 1$ para $t > 4$.

a) Grafique la función de distribución F_T, determine si es continua y calcule su densidad de ser posible.

b) Calcule la probabilidad de que una persona tenga que esperar más de 3 minutos; menos de 3 minutos; entre 1 y 3 minutos.

c) Calcule la probabilidad de que la persona espere: más de 3 minutos, sabiendo que ya lleva 1 minuto esperando; menos de 3 minutos, dado que lleva 1 minuto esperando.

d) Calcule la esperanza y varianza de T.

Pregunta 7

La adivina Solanda Yultana quiere demostrar su poder predictivo proponiendo el siguiente juego a las personas que tienen exactamente dos hijos (de cualquier sexo). Ella les hace la pregunta “Dime el nombre de una hija tuya”. Si la persona responde “No tengo hijas” entonces no hay nada que adivinar y se acaba el juego sin un ganador. En cambio, si responde un nombre, Solanda intenta adivinar el sexo del otro hijo o hija. Si acierta, la persona le da \$1000 a Solanda y si no acierta, Solanda entrega \$1000 a la persona. Si Solanda en realidad siempre dice “tu otro hijo es un hombre” ¿Cuál es la ganancia esperada de la adivina en cada adivinanza? ¿Y su varianza? (Suponga que para todas las personas con dos hijos la probabilidad de que cada hijo sea de sexo masculino es 1/2 independiente del sexo del otro hijo).

Pregunta 8

Sean X, Y V.A’s independientes de distribución Geom(p), es decir $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = p(1-p)^{n-1}$.

a) Calcule la función de probabilidad de $Z = X + Y$

b) Calcule $\mathbb{P}(X = Y)$ y $\mathbb{P}(X < Y)$.

Pregunta 9

(i) Suponga que una persona da un paso a la derecha con probabilidad $p \in [0,1]$ y un paso a la izquierda con probabilidad $1-p$. Para modelar la trayectoria que sigue esta persona, supondremos que se posiciona sobre un número entero, comenzando en el origen, y usaremos la variable aleatoria X que denota la posición final del personaje. Encuentre la probabilidad de que caiga en la posición $k \in \mathbb{Z}$ luego de $n \in \mathbb{N}$ saltos. Deduzca la función de probabilidad de la posición del borrachin y su rango. ¿Cómo calcularía la esperanza y varianza?

(ii) En un club desconocido de Santiago, n personas dejan sus abrigos en un guardarropas. Al cerrar el club, estas personas sacan un abrigo de manera aleatoria y se lo llevan. ¿Cuál es el valor esperado de abrigos que fueron devueltos de manera correcta? Considere que la probabilidad de que una persona obtenga su abrigo es uniforme.

Pregunta 10

Un cultivo de bacterias de un cierto tipo puede proliferar o bien extinguirse, lo que ocurre con probabilidad p y probabilidad $1-p$ respectivamente. Para realizar un estudio, usted genera n de estos cultivos de manera independiente.

(a) Indique la función p_X de la variable X correspondiente al número de cultivos que proliferan.

(b) Debido a un corte de luz, el sistema de refrigeración de los cultivos deja de funcionar por unas horas, lo cual significa que cada cultivo que proliferó inicialmente se mantendrá vivo o se extinguirá con probabilidad q y $1-q$ respectivamente, independiente del resto. ¿Cuál es la distribución de la variable aleatoria Y correspondiente a los cultivos que quedan vivos?

Pregunta 11

Sea p un número escogido al azar en $[0,1]$. Se lanza una moneda con probabilidad de cara igual a p, n veces independientemente. Se define Y como la variable aleatoria igual al número de caras en los lanzamientos.

(a) Averigüe si Y es una variable aleatoria discreta o continua.

(b) Calcule $\mathbb{E}[Y]$ y $\mathrm{Var}(Y)$.

Pregunta 12

(i) El tiempo que se mantiene funcionando el internet desde cierto inicio inicial se modela según una variable $T \sim \mathbb{P}(\lambda)$ cuya densidad es $f(z) = \lambda e^{-\lambda z}$ para $z \in [0, \infty)$.

  (a) Calcule la probabilidad de que el internet dure menos que un tiempo $a > 0$.

  (b) La duración del cable, desde el mismo tiempo inicial, se puede modelar con otra variable $S \sim \mathbb{P}(\lambda t)$ que asumimos independiente a T. Calcule la probabilidad de que al menos uno de los dos servicios deje de funcionar en un tiempo $a > 0$.

  (c) La producción de su trabajo online distribuye según S^2, calcule la densidad y esperanza de su producción.

(ii) Suponga que X tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$, para $c > 0$ demuestre que $Y = \frac{X}{c}$ sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = c$.

(iii) Hay un teorema (visto en clases) que indica que si $X \sim \mathrm{Normal}(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable aleatoria $Y = aX + b$ también distribuye Normal. Demuestre dicho teorema, y además determine la esperanza y varianza de Y.

Pregunta 13

Considere el siguiente método para dibujar una cuerda al azar en una circunferencia de radio R. Sobre un radio se escoge un punto al azar, de acuerdo con la distribución Uniforme en $[0, R]$, y luego, en dicho punto, se traza una perpendicular al radio, obteniendo así una cuerda. Sea L la variable aleatoria que designa el largo de la cuerda obtenida.

(a) Obtener la densidad de probabilidad de L.

(b) Calcular la esperanza de L y del área del triángulo formado uniendo los extremos de la cuerda con el centro de la circunferencia.

Pregunta 14

Los profesores auxiliares (muchos nombres...) están preocupados debido a que las notas del primer control se distribuyeron de manera normal con una media de 3.7 y una desviación estándar de 1. Después de analizar los resultados, se ha decidido que cualquier alumno con una nota inferior a 4 necesitará apoyo urgente.

Justo después de tomar esta decisión, las profesoras auxiliares reciben un correo electrónico de un estudiante preocupado por un ejercicio.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que este alumno en particular necesite ser ayudado de manera urgente?

Los estudiantes se preparan intensamente para el próximo control, pero suelen recibir, en promedio, dos tareas por semana. Conscientes de este desafío, los auxiliares han elaborado una guía de estudios diseñada para ser completada en tres días, esto es, considerando, que los estudiantes no dedican todo su tiempo exclusivamente al estudio, ya que también deben atender otras obligaciones académicas y personales.

Dado lo anterior, se evalúa la probabilidad de que los estudiantes no reciban ninguna tarea durante los tres días previos al control. Esto les permitiría dedicar tiempo completo a resolver la guía de estudios y así mejorar su preparación para el examen.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que no se asignen tareas en esos tres días críticos?

Lamentablemente justo durante los tres días previos al control, deben entregar una tarea importante que aún no han comenzado. Este contratiempo significa que no podrán dedicar el tiempo necesario a estudiar la guía de estudios diseñada específicamente para esos días. A pesar de esto, los estudiantes son conocidos por su excelencia académica, lo cual les permite tener una alta probabilidad de resolver correctamente las preguntas de la guía incluso sin la totalidad de estos días.

Dado que la probabilidad de que un estudiante resuelva correctamente una pregunta bajo estas circunstancias es de 0.7, y considerando que la guía consta de 14 preguntas.

(c) ¿Cúal la probabilidad de que resuelvan al menos la mitad de las preguntas de la guía?

La nota final del control 2 es una V.A Aleatoria Y tal que si resuelven menos de 3 preguntas de la guía de estudio, su nota se mantiene en 1. Mientras que por cada dos preguntas adicionales resueltas correctamente, su nota sube un punto, hasta un máximo de 7.

(d) Indique la PMF de la nota final del control.

Pregunta 15

Sean X e Y dos variables aleatorias con la siguiente PMF conjunta:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y^2) \text{ si x} \in \{1,2,4\} \text{ e y} \in \{1,3\} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el valor de c?

b) ¿Cuánto es $\mathbb{P}$(Y<X)?

c) ¿Cuánto es $\mathbb{P}$(Y>X)?

d) ¿Cuánto es $\mathbb{P}$(Y=X)?

e) ¿Cuánto es $\mathbb{P}$(Y=3)?

f) Encuentre la PMF marginal de X e Y.

g) ¿Cuánto es $\mathbb{P}(X=-Y)$?

h) ¿Son X e Y variables independientes?

Pregunta 16

Un grupo de inversionistas realizó un estudio en el cual se dieron cuenta que la mayoría de la comida que se vende alrededor de la facultad corresponde a productos salados. Con esta información encontraron una oportunidad de negocio, por lo que decidieron instalar un local que vendiera productos dulces llamado *Pastelería la Mona*. En esta pastelería se venden diversos postres, dentro de los cuales su producto estrella son los alfajores.

La pastelería fue un éxito en sus primeros meses de operación. En el reporte trimestral se presentaron los siguientes datos: a la pastelería llegan X personas por día, esta cantidad sigue una distribución Poisson de tasa 10 [clientes/día]. De los clientes que llegan a la tienda, cada uno compra un único postre independiente de lo que vayan a comprar los demás, en particular, cada cliente que llega a la tienda va a comprar un alfajor con probabilidad 0,3, y con probabilidad complementaria compra uno de los otros postres.

1. Identifique y calcule la distribución conjunta de la cantidad de personas que llega a la tienda en un día y la cantidad de personas que compra alfajores (en el mismo día).

2. Calcule la distribución de la cantidad de personas que va a comprar alfajores a la pastelería.

3. Si en un día llegan 4 personas a comprar alfajores a la tienda, ¿Cuál es la probabilidad de que ese mismo día hayan ido entre 5 y 10 personas a la tienda?

Pregunta 17

Se sabe que una caja de 5 transistores contiene 2 que están defectuosos. (Los transistores están separados en la caja, no hay conexiones). Los transistores deben ser probados, uno a la vez, hasta que se identifiquen las unidades defectuosas. Se define N_1 como el número de pruebas realizadas hasta que el primer transistor defectuoso se identifica, y por N_2 el número ensayos adicionales hasta que se identifique el segundo transistor defectuoso. Por ejemplo, si es que el primer transistor revisado está bueno, el segundo está malo, y luego el tercero está malo, entonces $N_1 = 2$ y $N_2 = 1$.

Para todas las partes, puede usar las respuestas de las partes anteriores como una variable (aunque no haya resuelto las partes anteriores). En dicho caso, explique claramente la variable que está usando para representar la respuesta de alguna parte anterior.

Para las partes b), c), y d), escriba como **parte** de su desarrollo la probabilidad solicitada en función de las variables aleatorias N_1 y N_2.

(a) Argumente la veracidad de la siguiente afirmación: "N_1 sigue una distribución Geométrica". Tanto si cree que es verdadera o falsa, justifique su respuesta.

(b) Determine la probabilidad de que en la segunda prueba realizada, se encuentra el primer transistor defectuoso.

(c) Se sabe que en la segunda prueba realizada se detectó el primer transistor defectuoso. Calcule la probabilidad de que la prueba siguiente (es decir, en la tercera prueba) también se detecte un transistor defectuoso.

(d) Encontrar la probabilidad de que: "N_1 valga 2 y N_2 valga 1". (Notar que se pide una sola probabilidad).

Pregunta 18

Todos los domingos Don Casimiro prepara su desayuno favorito: huevos con tocino. En la preparación del tocino, este es cortado en 20 trozos pequeños de igual tamaño, donde cada trozo posee dos lados. Luego, Don Casimiro hecha un poco de aceite a la sartén, y luego de bajar el fuego al mínimo, hecha todos los trozos de tocino a la sartén. Cada trozo queda con uno de sus lados tocando hacia abajo (en contacto directo con la sartén) y otro lado hacia arriba. Al cabo de un rato, Don Casimiro revuelve la sartén, de tal forma que cada trozo de tocino, independiente de los otros trozos, se *da vuelta*[1] con probabilidad 0,3, y con probabilidad complementaria no se da vuelta. Considere que Don Casimiro revuelve la sartén un total de 4 veces.

Para que un trozo de tocino quede *bien cocinado*, se requiere que haya sido cocinado por ambos lados hacia abajo en algún instante.

Nota: Si prefiere, puede considerar que los ingredientes son "not-huevos" y "not-tocino".

(a) Determine la probabilidad de que un trozo de tocino quede *bien cocinado*.

(b) Determine la distribución de probabilidad del número de trozos de tocino que quedan *bien cocinados*. En caso de ser una de las distribuciones con nombre vista en clases, entregue su nombre y el valor de sus parámetros; en caso contrario, entregue su PMF. **Hint:** Si estima que el valor de la respuesta de la parte (a) le sirve para contestar esta pregunta, puede denotar dicho valor por una letra y dejar así su respuesta en función de esta.

(c) Considere que para esta parte Don Casimiro no trozará el tocino, sino que lo cocinara en un solo "trozo". Específicamente, Don Casimiro hecha el tocino (entero) a la sartén, de tal forma que el trozo queda con uno de sus dos lados hacia abajo, y el otro hacia arriba. Con probabilidad un tercio, Don Casimiro revolverá la sartén una vez, y con probabilidad complementaria lo hará dos veces. Cada vez que se revuelve la sartén, hay una probabilidad de 0,3 que el tocino se de vuelta, y con probabilidad complementaria no se da vuelta. El tocino queda bien cocinado si es que ambos lados estuvieron hacia abajo (es decir, en contacto directo con la sartén). Considere una variable aleatoria para el número de veces que se da vuelta el tocino, y otra variable aleatoria para el número de trozos cocinados (dado que es un solo trozo, dicha variable aleatoria puede solo tomar el valor 0 o 1). Si es que se sabe que el tocino **no quedó** bien cocinado, compute la probabilidad de que Don Casimiro haya revuelto la sartén una sola vez. Defina claramente las variables aleatorias que use.

    Hint: le podría ser de utilidad computar la probabilidad de que el tocino **no quede** bien cocido dado el número de veces que se revuelve la sartén, para los diferentes valores que puede tomar revolver la sartén.

[1] Que un trozo de *de vuelta*, nos referimos a que el lado del trozo que estaba hacia abajo queda hacia arriba, y el lado que estaba hacia arriba queda hacia abajo.

Pregunta 19

(a) Considere las variables aleatorias X e Y con PMF conjunta como muestra la tabla.

	$Y=1$	$Y=2$
$X=1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
$X=2$	$\frac{1}{6}$	0
$X=4$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

Sea $Z = X - 2Y$. Calcule $\mathbb{P}(Z|X=2)$

(b) Pedrito disfruta hacer castillos de arena en la playa cerca de donde llegan las olas del mar. Pedrito construye castillos con una velocidad de 20 [cm/ 5 minutos]. Los castillos reciben olas cada 5 minutos, es decir, la primera ola la recibe en el minuto 5, la siguiente ola en el minuto 10, y así sucesivamente. Al recibir una ola el castillo, este se derrumba si es que dicha ola pose una altura mayor o igual a la del castillo en ese momento; en el caso que la ola posea una altura menor al castillo, el castillo queda intacto. Considere que la altura de una ola sigue una distribución Exponencial de parámetro 1/30 [cm^{-1}]. El tamaño de las olas son independientes entre sí.

Pedrito construye un castillo nuevo cada 5 minutos. Cada vez que llega una ola al castillo, Pedrito se toma una foto con su castillo en caso de que dicha ola no haya derribado el castillo. Luego, inmediatamente después, Pedrito inicia la construcción de un nuevo castillo en los siguientes 5 minutos. Considere que el tiempo que le toma a Pedrito tomarse la foto es despreciable. Pedrito ha jugado 60 minutos en la playa. Determine la distribución de probabilidad del número de fotos que Pedrito se ha tomado durante este período (incluyendo la posible foto con el castillo que se termina en el minuto 60 luego de que llega la ola en este instante). Si la distribución es conocida, es decir, vista en clases, entregue el nombre y valor de sus parámetros, en caso contrario, entregue su PMF. Justifique su respuesta.