



## Control 2 IN2201 Primavera 2020

**P1.** Constanza quiere ir del piso 5 al piso 6 de la Escuela. Puede ir por ascensor, lo cual le demora un tiempo  $T_A$ , o por la escalera, lo cual le demora un tiempo  $T_E$ , con  $T_A < T_E$ .

En el ascensor va subiendo un número  $N$  de personas, quienes también van al sexto piso. Si Constanza toma el ascensor, esas personas se demoran un tiempo adicional  $T_D$  en llegar al sexto piso.

El único costo en este problema es el tiempo que las personas se demoran en subir.

1. (2 ptos.) Indique si Constanza decide subir por las escaleras o por el ascensor, y explique porqué su decisión tiene externalidades.
2. (2 ptos.) Determine cuál es la decisión óptima de Constanza si considera también los costos de quienes van en el ascensor. Dé su respuesta en función de  $N$  e interprete este resultado.
3. (2 ptos.) Muestre que si el óptimo social es que Constanza no tome el ascensor, entonces las personas que van en el ascensor pueden acordar pagar a Constanza una cantidad  $c > 0$  cada una, de modo que ella acepte no parar el ascensor.

### Pauta Pregunta 1

1. Constanza decide subir por el ascensor porque  $T_A < T_E$ . Su decisión tiene externalidades porque afecta a otras personas, pero a ella no le afectan estas consecuencias y por lo tanto no las considera a la hora de decidir.

*0,5p por responder que Constanza decide ir por el ascensor, 0,5p por justificar esta decisión y 1p por explicar la existencia de externalidades.*

2. No es óptimo subir en ascensor si es que  $T_A + N \cdot T_D > T_E$ . Si  $N = 0$  esta relación no se cumple, si  $N$  muy grande, sí se cumple. Luego, existe un  $N^*$  en que esta relación se da con igualdad. Para  $N < N^*$ , es óptimo que tome el ascensor porque el “costo” social de usarlo es menor al de ir por la escalera, mientras que para  $N > N^*$  es óptimo que tome las escaleras. Por lo tanto,  $N$  es una medida del costo de la externalidad.

*1p por hallar la relación en función de  $N$  y 1p por explicar los escenarios e interpretar  $N$ .*

3. Si la decisión socialmente óptima es no tomar el ascensor, entonces  $T_A + N \cdot T_D > T_E$ , entonces, las personas del ascensor podrían estar dispuestas a pagar una cantidad  $c$  tal que  $N \cdot c < N \cdot T_D$ , es decir, una cantidad no mayor al costo que les impone Constanza por la demora. Constanza acepta subir por la escalera en lugar del ascensor solo si  $N \cdot c > T_E - T_A$ , es decir, si el pago que recibe es mayor al costo de subir por escalera en lugar de ascensor.

Para verificar que se  $c$  existe, notemos que dado lo anterior esto ocurre si y solo si para algún  $c > 0$  se tiene  $T_E - T_A < N \cdot c < N \cdot T_D$ , lo cual a su vez se tiene si y solo si  $T_E - T_A < N \cdot T_D \Leftrightarrow T_A + N \cdot T_D > T_E$ . Es decir, el hecho de que  $c$  existe se sigue directamente de que la condición de que tomar el ascensor no es óptimo socialmente porque impone una externalidad.

*0,5p por hallar la condición sobre  $c$  para que Constanza acepte, 0,5p por hallar la condición sobre  $c$  para que las personas acepten pagar y 1p por concluir sobre la existencia de  $c$ .*



**P2.** Considere un mercado duopólico cuya demanda inversa es  $P(Q) = \left(\frac{A}{Q}\right)^{\frac{1}{b}}$ , con  $Q = q_1 + q_2$ ,  $A > 0$  y  $\frac{1}{2} \leq b \leq 1$ . El costo marginal de la firma  $i$  es  $c_i$ , donde  $0 \leq c_1 < c_2 < 100$ . Las firmas compiten Cournot.

1. (2 ptos.) Calcule el equilibrio de Nash  $q^* = (q_1^*, q_2^*)$ .
2. (2 ptos.) Discuta las implicancias del modelo de Cournot sobre la relación que existe entre los costos de las firmas y su tamaño. ¿Cuál de las dos firmas produce más en el equilibrio de Nash?
3. (2 ptos.) Calcule el precio y cantidad socialmente eficiente y compare con el escenario de las partes anteriores. Ilustre estos valores y la pérdida social generada en un gráfico.

### Pauta Pregunta 2

1. El problema de optimización que resuelve cada firma  $i \in \{1, 2\}$  es el siguiente:

$$\max_{q_i \geq 0} \pi_i(q_1, q_2) = q_i [P(q_1 + q_2) - c_i] = A^{\frac{1}{b}} q_i (q_1 + q_2)^{-\frac{1}{b}} - c_i q_i$$

Calculemos la derivada de esta función respecto a  $q_i$ :

$$\frac{\partial \pi_i(q_1, q_2)}{\partial q_i} = A^{\frac{1}{b}} (q_1 + q_2)^{-\frac{1}{b}} - \frac{1}{b} A^{\frac{1}{b}} q_i (q_1 + q_2)^{-\frac{1+b}{b}} - c_i$$

Supongamos por ahora que la función es cóncava en el punto en que las derivadas parciales se igualan a 0 (luego lo verificaremos), y calculemos este punto, que denotamos por  $q_1^*$ ,  $q_2^*$  y  $Q^*$ . Para ello, primero expresemos  $q_i^*$  en función de  $Q^*$ :

$$A^{\frac{1}{b}} (Q^*)^{-\frac{1}{b}} - \frac{1}{b} A^{\frac{1}{b}} q_i^* (Q^*)^{-\frac{1+b}{b}} - c_i = 0 \Rightarrow q_i^* = bQ^* \left[ 1 - c_i \left( \frac{Q^*}{A} \right)^{\frac{1}{b}} \right]$$

Luego, sumando estas expresiones para  $i = 1$  e  $i = 2$ , como  $q_1 + q_2 = Q$  se obtiene:

$$Q^* = bQ^* \left[ 2 - (c_1 + c_2) \left( \frac{Q^*}{A} \right)^{\frac{1}{b}} \right]$$

De donde podemos despejar  $Q^*$ :

$$Q^* = A \left[ \frac{2b-1}{b(c_1+c_2)} \right]^b$$

Y con ello, las cantidades óptimas de cada firma:

$$q_i^* = bA \left[ \frac{2b-1}{b(c_1+c_2)} \right]^b \left[ 1 - c_i \frac{2b-1}{b(c_1+c_2)} \right]$$

Notamos que como  $\frac{1}{2} \leq b \leq 1$ , entonces  $0 \leq \frac{2b-1}{b} \leq 1$  y como  $\frac{c_i}{c_1+c_2} \leq 1$  para  $i \in \{1, 2\}$ , se concluye que las cantidades son no negativas.



Para ver que en  $(q_1^*, q_2^*)$  efectivamente las segundas derivadas son negativas y por tanto este punto es un equilibrio de Nash, notamos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \pi_i(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_i^2} &= -\frac{1}{b} A^{\frac{1}{b}} (q_1^* + q_2^*)^{-\frac{1+b}{b}} - \frac{1}{b} A^{\frac{1}{b}} (q_1^* + q_2^*)^{-\frac{1+b}{b}} + \frac{1+b}{b^2} A^{\frac{1}{b}} q_i (q_1^* + q_2^*)^{-\frac{1+2b}{b}} \\ &= -\frac{1}{b} A^{\frac{1}{b}} (q_1^* + q_2^*)^{-\frac{1+b}{b}} \left[ 2 - \frac{1+b}{b} q_i^* (q_1^* + q_2^*)^{-1} \right]\end{aligned}$$

Como los términos fuera del corchete son todos no negativos, para que esta expresión sea negativa basta verificar que:

$$\frac{1+b}{b} q_i^* (q_1^* + q_2^*)^{-1} \leq 2$$

Ahora bien:

$$\frac{1+b}{b} q_i^* (q_1^* + q_2^*)^{-1} = \frac{1+b}{b} \frac{q_i^*}{Q^*} = \frac{1+b}{b} b \left[ 1 - c_i \left( \frac{Q^*}{A} \right)^{\frac{1}{b}} \right] = (1+b) \left[ 1 - c_i \frac{2b-1}{b(c_1 + c_2)} \right]$$

En este punto, notamos que como  $b \leq 1$  entonces  $b+1 \leq 2$ . Además, por lo anteriormente mencionado, que  $0 \leq \frac{2b-1}{b} \leq 1$  y  $\frac{c_i}{c_1+c_2} \leq 1$  para  $i \in \{1, 2\}$ , el término dentro del corchete es menor o igual a 1 y por tanto el producto es menor o igual a 2, que es lo que queríamos concluir.

*0,5 pts. por plantear el problema de maximización de las firmas, 0,5 pts por escribir las condiciones de primer orden, 0,5 pts por despejar las cantidades óptimas de cada firma y 0,5 pts por verificar que es un máximo vía segundas derivadas.*

- De las expresiones para  $q_i^*$ , es claro que las cantidades que produce cada firma es una función decreciente de su costo marginal, ya que este costo aparece multiplicado por un término positivo y restado. Por tanto, el modelo implica que a menores costos de las firmas, mayor es su tamaño, en concreto en este caso la firma 1, con menores costos entre las dos, produce más en el Equilibrio de Nash. La idea central detrás de esto es que firmas con menores costos por unidad producida, para cada cantidad producida por el rival pueden producir más antes de que su utilidad comience a disminuir. En particular, esto es cierto cuando el rival produce la cantidad de equilibrio.

*1 pto. por decir que el tamaño de las firmas es mayor mientras menores sean sus costos marginales, en particular que la firma 1 produce más en el Equilibrio de Nash. 1 pto. por interpretar esto en base al modelo de Cournot.*

- En el punto socialmente eficiente, solo la firma con menores costos producirá cobrando  $P = c_1$ . Esto puede verse de varias formas, quizás la más sencilla es que si entraran infinitas firmas con costos  $c_1$  y  $c_2$ , cada firma cobraría su costo marginal (condición de competencia perfecta) y todos los consumidores comprarían a la firma de menor costo marginal, en este caso la firma 1. Luego, el equilibrio se da con precio  $P^C = c_1$  y cantidad:

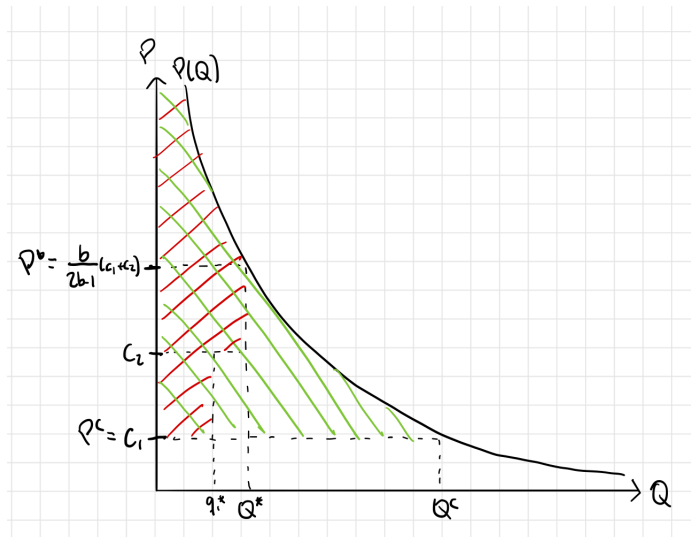
$$Q^C = Q(P^C) = \frac{A}{c_1^b}$$

Para comparar la cantidad producida con la de Cournot, notamos lo siguiente:

$$Q^C \geq Q^* \iff \frac{A}{c_1^b} \geq A \left[ \frac{2b-1}{b(c_1+c_2)} \right]^b \iff \frac{1}{c_1} \geq \frac{2b-1}{b(c_1+c_2)} \iff \frac{b}{2b-1} \geq \frac{c_1}{c_1+c_2}$$

donde se usó la no-negatividad de varios términos para multiplicar. Ahora bien, de  $b \leq 1$  sabemos que  $\frac{b}{2b-1} \geq 1$ . Asimismo, como  $c_1, c_2 \geq 0$ , tenemos que  $\frac{c_1}{c_1+c_2} \leq 1$ . De estos dos hechos se sigue directamente la desigualdad anterior, y por tanto que la producción socialmente eficiente es mayor a la de Cournot.

En el gráfico, la idea es mostrar el hecho de que solo una firma produce en esta nueva situación, que esta producción es mayor a la del oligopolio y que hay un excedente social que se pierde en esta situación al compararla con lo socialmente eficiente. Una idea de gráfico es el siguiente:



Aquí se muestra la curva de demanda, los precios y cantidades en oligopolio y en la situación eficiente. El área roja marca los excedentes totales en el caso oligopólico y el área verde los excedentes totales en el caso eficiente. Así, el área marcada en verde pero no rojo representa la pérdida social asociada al oligopolio.

0.5 ptos. por notar que la situación eficiente es cuando solo la firma 1 produce y el precio es igual a su costo marginal, 0.5 ptos. por indicar el precio y despejar la cantidad correspondiente, 0.5 ptos. por mostrar que la cantidad es mayor o igual a la de Cournot y 0.5 ptos por el gráfico (lo importante es que se aprecien las relaciones entre los precios, cantidades y áreas, no la pendiente, distancia entre puntos ni ese nivel de detalle).

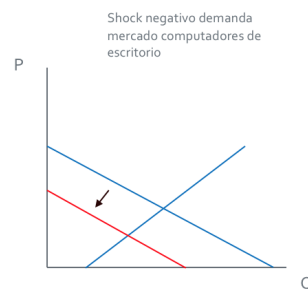
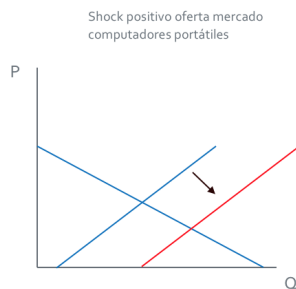


### P3. Preguntas conceptuales

1. (2 ptos.) Los computadores portátiles son cada vez más fáciles de construir. ¿Qué implica esto para la oferta de computadores portátiles? ¿Qué debiese pasar con el precio y la cantidad transada de computadores portátiles? ¿Cómo afecta este cambio en el precio de los computadores portátiles al mercado de los computadores de escritorio (*desktops*)? Use gráficos para ilustrar sus respuestas.
2. (2 ptos.) Políticas sociales asociadas a la entrega de información y acceso a métodos anticonceptivos está representado por un traslado hacia arriba de la curva de fijación de salarios. Ceteris paribus, esto conduciría a un mayor desempleo en la economía. Comente conceptual y gráficamente.
3. (2 ptos.) Suponga que escucha a un político decir en la televisión “*Me parece inaceptable que las aerolíneas vendan pasajes sin ningún derecho a devolución y cobren espacio de equipaje de mano o en bodega aparte. Debería prohibirse.*” Discuta la afirmación del político.

#### Pauta Pregunta 3

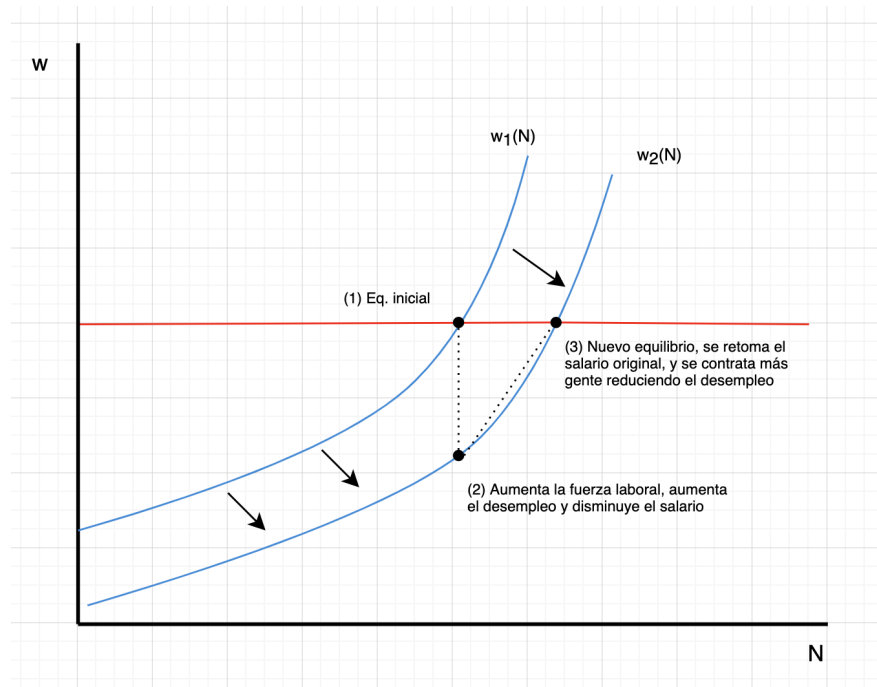
1. La facilidad de construcción de portátiles se traducirá en una expansión de la oferta, es decir, al mismo precio se producirán más portátiles. Luego, al expandir la curva de oferta, aumentará la cantidad transada en equilibrio y disminuirá el precio de transacción en el nuevo equilibrio de mercado.  
Por otra parte, la demanda en el mercado de computadores de escritorio se contraerá, dado que los computadores portátiles se presentan como un sustituto más barato. Esto se traducirá en una reducción del precio y de la cantidad transada en el nuevo equilibrio del mercado de computadores de escritorio.



(Puntaje: 0,5ptos por identificar expansión de oferta en mercado de computadores portátiles + 0,5ptos por identificar correctamente el nuevo equilibrio. 0,5ptos por identificar contracción de demanda en mercado de computadores de escritorio + 0,5ptos por identificar correctamente el nuevo equilibrio.)

2. La entrega de información respecto a métodos anticonceptivos provocaría un ingreso de muchas mujeres a la fuerza laboral. Esto desplaza la curva de salarios hacia abajo, es decir, que para la misma cantidad de gente empleada, los salarios reales disminuyen, debido al aumento en la

oferta de trabajo. En el corto plazo, esto genera un aumento del desempleo porque se mantiene constante el número de empleados y aumenta la fuerza laboral, pero en el mediano plazo el desempleo disminuye.



(Puntaje: 0,5 por mencionar el ingreso de las mujeres a la fuerza laboral y decir que la curva de salarios se desplaza hacia abajo, 0,5 por mencionar el efecto a corto plazo, 0,5 por el efecto a mediano plazo y 0,5 por hacer el gráfico correctamente.)

3. La afirmación del político no es del todo certera. Estamos hablando de una discriminación de precios que realizan las aerolíneas diseñando distintos paquetes de vuelo con distintos precios y derechos. Esto genera un aumento del excedente de las aerolíneas pero no necesariamente genera una disminución del excedente de los consumidores como argumenta el diputado. Aunque sí es peor para los consumidores no contar con derecho a devolución o equipaje de mano, esto permite abrir nuevos mercados en los que nuevos consumidores podrán viajar gracias a los bajos precios de los paquetes con pocos derechos. Luego, la discriminación no necesariamente presenta una reducción del excedente social y podría ser beneficiosa.

(Puntaje: 0,5ptos por indentificar que se trata de discriminación de precios. 0,5ptos por indentificar aumento de excedentes en las aerolíneas y 1pto por decir que excedentes de los consumidores pueden bajar o subir pero es incierto, además de especificar que el aumento puede producirse al generar paquetes a bajo precio que abre nuevos mercados. Puntaje por no abordar discriminación de precios pero si tocar otro tema relevante y bien argumentado 1pto.)