IN2201 - Economía

Tarea Elección Social

Pregunta 1 (6 ptos)

Considere una sociedad compuesta por un continuo de ciudadanos de tamaño 1. Asuma que las preferencias de un individuo i están dadas por un bien público y y un bien de consumo privado c_i según la función de utilidad $U_i = c_i + \alpha_i V(y)$, donde $V(\cdot)$ es cóncava y α_i se distribuye $F(\cdot)$ con media α. Además, cada individuo tiene una dotación inicial de un bien privado $e_i = 1$, $\forall i$. Una unidad de bien privado puede transformarse en una unidad de bien público. Finalmente, suponga que para financiar el bien público, el gobierno coloca un impuesto τ proporcional al ingreso, de modo que la restricción presupuestaria de un individuo i es $c_i \leq 1 - \tau$.

a. (1.5 puntos) Determine el óptimo social en esta sociedad.

Pauta

El óptimo social se encuentra resolviendo el problema de un planificador social que busca maximizar el bienestar de la sociedad, sujeto a la restricción de recursos de la economía. El planificador social resuelve:

$$\max_{y,\{c_i\}} W = \int_0^1 U_i \, di = \int_0^1 (c_i + \alpha_i V(y)) \, di$$

sujeto a la restricción de recursos agregada:

$$\int_0^1 c_i \, di + y \leq \int_0^1 e_i \, di \implies \int_0^1 c_i \, di + y \leq 1$$

Podemos reescribir la función de bienestar como:

$$W = \int_0^1 c_i \, di + V(y) \int_0^1 \alpha_i \, di$$

Dado que la media de α_i es $\bar{\alpha}$, y llamando al consumo agregado $C = \int_0^1 c_i \, di$, el problema se simplifica a:

$$\begin{aligned} &\max_{y,C} C + \bar{\alpha} V(y) \\ &\text{s.a.} \quad C + y = 1 \end{aligned}$$

Sustituyendo la restricción $C = 1 - y$ en la función objetivo, el problema se reduce a maximizar con respecto a y:

$$\max_y (1 - y) + \bar{\alpha} V(y)$$

Para encontrar el nivel óptimo del bien público, y^*, tomamos la condición de primer orden (CPO) con respecto a y:

$$\frac{dW}{dy} = -1 + \bar{\alpha} V'(y^*) = 0$$

El óptimo social está caracterizado por la siguiente condición, que define implícitamente a y^*:

$$\bar{\alpha}V'(y^*) = 1$$

Esta condición establece que la suma de las tasas marginales de sustitución entre el bien público y el privado (en este caso, el promedio $\bar{\alpha}V'(y^*)$) debe ser igual a la tasa marginal de transformación (cuyo valor es 1). El consumo privado para cada individuo será entonces $c_i^* = 1 - y^*$.

b. (1.5 puntos) Calcule el impuesto ideal $\tau(\alpha_i)$ para un individuo i.

Pauta
El problema de un individuo i es elegir el nivel de y que maximiza su utilidad, dado el impuesto τ_i:

$$\max_y U_i = c_i + \alpha_i V(y)$$
$$\text{s.a.} \quad c_i = 1 - \tau_i y$$

Sustituyendo la restricción, el problema es:

$$\max_y (1 - \tau_i y) + \alpha_i V(y)$$

La condición de primer orden (CPO) para el individuo i es:

$$-\tau_i + \alpha_i V'(y) = 0 \implies \tau_i = \alpha_i V'(y)$$

Nota: Si llega hasta acá tiene el puntaje completo.

De la parte anterior, sabemos que $\bar{\alpha}V'(y^*) = 1$. De esta condición, podemos despejar el valor de $V'(y^*)$:

$$V'(y^*) = \frac{1}{\bar{\alpha}}$$

Finalmente, sustituimos este resultado en la fórmula del impuesto ideal:

$$\tau(\alpha_i) = \alpha_i \left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)$$

Por lo tanto, el impuesto ideal para el individuo i es:

$$\tau(\alpha_i) = \frac{\alpha_i}{\bar{\alpha}}$$

Esto significa que la contribución marginal de cada individuo al costo del bien público debe ser proporcional a su valoración relativa por dicho bien en comparación con la valoración promedio de la sociedad.

c. (1.5 puntos) Bajo la Regla de Mayoría Simple, ¿cuál es la política escogida? Compare con el óptimo social. ¿Que condición hace que ambas coincidan?

Pauta
Bajo una regla de mayoría simple con impuesto uniforme, cada individuo paga un costo marginal de 1 por el bien público, mientras que su beneficio marginal es $\alpha_i V'(y)$. La política

preferida por cada individuo i es aquella donde su beneficio marginal iguala su costo. En una votación, el Teorema del Votante Mediano predice que la política escogida, y_M, será la preferida por el votante con la preferencia mediana, α_{med}. Por lo tanto, esta política se define por la condición $\alpha_{\text{med}}V'(y_M) = 1$.

Mientras tanto, el óptimo social y^*, que depende de la preferencia promedio, $\bar{\alpha}$, se define por la condición $\bar{\alpha}V'(y^*) = 1$. La política de mayoría refleja la voluntad del votante mediano, mientras que el óptimo social refleja la valoración promedio de la sociedad. Ambas políticas coinciden, $y_M = y^*$, si y solo si la preferencia del votante mediano es igual a la preferencia promedio, es decir, si $\alpha_{\text{med}} = \bar{\alpha}$. Esto ocurre cuando la distribución de preferencias $F(\cdot)$ es simétrica.

d. (1.5 puntos) Suponga ahora que existe un valor α' que proviene de la misma distribución $F(\cdot)$ tal que las preferencias de un individuo i están dadas por $U_i = c_i + (\alpha_i - \alpha')^2 V(y)$. Determine el nuevo óptimo social y la política escogida por la Regla de Mayoría Simple. ¿Cómo cambian estos resultados respecto al escenario anterior?

Pauta

Con la nueva función de utilidad, la importancia que cada persona le da al bien público, $(\alpha_i - \alpha')^2$, ya no es creciente con α_i. En su lugar, depende de qué tan lejos esté su preferencia α_i de un punto de referencia α'. Personas con α_i muy lejano a α' (en cualquier dirección) valoran mucho el bien público, mientras que personas con α_i cercano a α' lo valoran poco.

El nuevo óptimo social, y^{**}, se determina maximizando la suma de utilidades sujeto a la restricción de recursos. La nueva función de bienestar social es:

$$W = \int_0^1 [c_i + (\alpha_i - \alpha')^2 V(y)]\, di = \int_0^1 c_i\, di + V(y) \int_0^1 (\alpha_i - \alpha')^2\, di$$

El término de la segunda integral corresponde a la esperanza de $(\alpha_i - \alpha')^2$:

$$\int_0^1 (\alpha_i - \alpha')^2\, di = E[(\alpha_i - \alpha')^2] = E[\alpha_i^2 - 2\alpha_i\alpha' + (\alpha')^2] = E[\alpha_i^2] - 2\bar{\alpha}\alpha' + (\alpha')^2$$

Usando la definición de varianza, $E[\alpha_i^2] = \sigma_\alpha^2 + \bar{\alpha}^2$, la expresión se convierte en:

$$(\sigma_\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) - 2\bar{\alpha}\alpha' + (\alpha')^2 = (\bar{\alpha} - \alpha')^2 + \sigma_\alpha^2$$

Sustituyendo esto y la restricción $C = 1 - y$ en el problema del planificador, obtenemos:

$$\max_y (1 - y) + [(\bar{\alpha} - \alpha')^2 + \sigma_\alpha^2]V(y)$$

La CPO con respecto a y nos da la nueva condición para el óptimo social, y^{**}:

$$[(\bar{\alpha} - \alpha')^2 + \sigma_\alpha^2]V'(y^{**}) = 1$$

Nota: Si no usa las definiciones de esperanza y varianza pero el razonamiento está bien, tiene el puntaje completo.

Bajo la Regla de Mayoría Simple, la persona decisiva ya no es la que tiene la preferencia que está en el medio del espectro (α_{med}). Ahora, el poder se desplaza a la persona que tiene la intensidad de preferencia $(\alpha_i - \alpha')^2$ mediana.

La política ideal para un individuo i se encuentra maximizando su propia utilidad:

$$\max_y (1 - y) + (\alpha_i - \alpha')^2 V(y) \implies (\alpha_i - \alpha')^2 V'(y) = 1$$

Ahora, la política y ya no es una función monotónica de α_i. La variable que ordena las preferencias de forma monotónica es la intensidad de la preferencia, $(\alpha_i - \alpha')^2$. Individuos con α_i muy por encima o muy por debajo de α' prefieren un nivel alto de y, mientras que individuos con α_i cercano a α' prefieren un nivel bajo de y.

El Teorema del Votante Mediano se aplica ahora sobre la distribución de $(\alpha_i - \alpha')^2$. La política ganadora, $y_M^{'}$, será la preferida por el individuo con la mediana de esta expresión:

$$\text{mediana}[(\alpha_i - \alpha')^2] \cdot V'(y_M^{'}) = 1$$

En comparación con el escenario anterior, el óptimo social ahora es sensible a la dispersión de las preferencias. El cambio más importante ocurre en la elección de mayoría simple, donde cambia quién tiene el poder político. El resultado ya no lo define el individuo del centro ideológico (α_{med}), sino el individuo con la intensidad de preferencia mediana. Esto significa que el equilibrio político ya no se basa en una competencia de izquierda-centro-derecha, sino en una dinámica donde la distancia a un punto de referencia α' determina el resultado.

Pregunta 2 (6 ptos)

Considere que hay tres candidatos políticos: Lavín, Orrego y Vallejo. El primero es de derecha, el segundo de centro, y el tercero de izquierda. Los ciudadanos tienen preferencias ordenadas respecto a estos candidatos. La fracción de ciudadanos con cada orden de prefererencias es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{A}\,\%&: \text{Lavín} \succ \text{Orrego} \succ \text{Vallejo}\\
\text{B}\,\%&: \text{Lavín} \succ \text{Vallejo} \succ \text{Orrego}\\
\text{C}\,\%&: \text{Orrego} \succ \text{Lavín} \succ \text{Vallejo}\\
\text{D}\,\%&: \text{Orrego} \succ \text{Vallejo} \succ \text{Lavín}\\
\text{E}\,\%&: \text{Vallejo} \succ \text{Lavín} \succ \text{Orrego}\\
\text{F}\,\%&: \text{Vallejo} \succ \text{Orrego} \succ \text{Lavín}\\
\text{tal que A} + \text{B} + \text{C} + \text{D} + \text{E} + \text{F} &= 1
\end{aligned}$$

a. (1.5 puntos) Suponga que las preferencias pueden ser ordenadas en un eje izquierda-derecha. Si sobre ese eje las preferencias son unimodales, ¿qué restricción impone la unimodalidad sobre los parámetros A, B, C, D, E y F?

Pauta
Para que las preferencias sean unimodales en el espectro Izquierda-Centro-Derecha (Vallejo-Orrego-Lavín), la valoración de un votante por los candidatos debe tener un solo punto máximo y decrecer hacia los extremos. Esto significa que el candidato ubicado en el centro del espectro, en este caso Orrego, no puede ser la peor opción para ningún votante.

Las únicas ordenaciones de preferencias donde Orrego es el candidato menos preferido son las de tipo B (Lavín $\succ$ Vallejo $\succ$ Orrego) y las de tipo E (Vallejo $\succ$ Lavín $\succ$ Orrego). Por lo tanto, para que el conjunto de preferencias de la población sea unimodal, la fracción de ciudadanos con estas preferencias específicas debe ser cero.

La restricción que impone la unimodalidad es: $B = 0$ y $E = 0$.

b. (1.5 puntos) Suponga que las preferencias son unimodales. ¿Bajo qué condiciones de los parámetros existe un ganador de Condorcet? Dadas esas condiciones, indique quién es el ganador de Condorcet en función de los parámetros.

Pauta
Bajo la condición de preferencias unimodales ($B = 0$ y $E = 0$), el Teorema del Votante Mediano garantiza que siempre existe un ganador de Condorcet. Sin embargo, la identidad de este ganador depende de la distribución de las preferencias, es decir, de los valores de los parámetros A, C, D y F.

Para determinar las condiciones de los parámetros, analizamos las preferencias sobre los candidatos en elecciones de a pares:

- **Orrego vs. Lavín:**
  Las fracciones C, D y F prefieren a Orrego por sobre Lavín ($C + D + F$), mientras que la fracción A prefiere a Lavín por sobre Orrego. Por lo tanto, Orrego le gana a Lavín si $C + D + F > A$. Sabiendo que $A + C + D + F = 1$, esto es equivalente a $1 - A > A$, es decir, $A < 1/2$.
- **Orrego vs. Vallejo:**
  Las fracciones A, C y D prefieren a Orrego ($A + C + D$), mientras que solo la fracción F prefiere a Vallejo. Orrego resulta ganador si $A + C + D > F$. Usando nuevamente la relación $A + C + D + F = 1$, la condición se convierte en $1 - F > F$, es decir, $F < 1/2$.
- **Lavín vs. Vallejo:**
  Al enfrentar a Lavín y Vallejo, las fracciones A y C apoyan a Lavín ($A+C$) y las fracciones D y F apoyan a Vallejo ($D + F$). La condición para que Lavín le gane a Vallejo es, por tanto, $A + C > D + F$.

A partir de estas comparaciones, podemos definir quién es el ganador de Condorcet en función de los parámetros:

- **Orrego (Centro) es el ganador de Condorcet** si le gana a los otros dos candidatos. Esto ocurre cuando se cumplen las condiciones de los dos primeros puntos, es decir:

  $$A < 1/2 \quad \text{y} \quad F < 1/2$$

  Esto significa que el votante mediano se encuentra en el centro.
- **Lavín (Derecha) es el ganador de Condorcet** si la fracción de votantes a su derecha supera el 50 %, situando ahí al votante mediano. Formalmente, si $A > 1/2$. Si esto es cierto, entonces $A > C + D + F$ (Lavín le gana a Orrego) y, como $F < 1/2$, también se cumplirá que $A + C > D + F$ (Lavín le gana a Vallejo). La condición es:

  $$A > 1/2$$

- **Vallejo (Izquierda) es la ganadora de Condorcet** si la fracción de votantes a su izquierda supera el 50 %. Formalmente, si $F > 1/2$. Si esto es cierto, entonces $F > A + C + D$ (Vallejo le gana a Orrego) y, como $A < 1/2$, también se cumplirá que $D + F > A + C$ (Vallejo le gana a Lavín). La condición es:

$$F > 1/2$$

c. (1.5 puntos) Considere un sistema de dos vueltas presidenciales, en la cual pasan los dos candidatos más votados, y la segunda vuelta es por mayoría simple. Suponga que el voto es sincero. ¿Bajo qué condiciones de los parámetros se elige al ganador de Condorcet? Siga asumiendo que las preferencias son unimodales.

Pauta
Suponiendo preferencias unimodales y voto sincero, el sistema de dos vueltas presidenciales elige al ganador de Condorcet si y solo si, el ganador de Condorcet no es eliminado en la primera vuelta.

Analizamos los tres casos posibles para el ganador de Condorcet:

- **Si Lavín es el Ganador de Condorcet ($A > 1/2$):**
  En este caso, Lavín obtiene la mayoría absoluta de los votos en la primera vuelta ($A > 1/2$). Por lo tanto, es elegido directamente y el resultado coincide con el del ganador de Condorcet. El sistema funciona correctamente.
- **Si Vallejo es la Ganadora de Condorcet ($F > 1/2$):**
  Análogo al caso anterior, Vallejo obtiene la mayoría absoluta en la primera vuelta ($F > 1/2$) y es elegida. El sistema también funciona correctamente.
- **Si Orrego es el Ganador de Condorcet ($A < 1/2$ y $F < 1/2$):**
  Este es el único caso donde el sistema puede fallar. Como Orrego es el ganador de Condorcet, si logra pasar a la segunda vuelta, le ganará a cualquier rival (sea Lavín o Vallejo). Por lo tanto, el sistema elige a Orrego si y solo si él no es el candidato menos votado en la primera vuelta.
  Los votos de primera vuelta son A para Lavín, F para Vallejo y $(C + D)$ para Orrego. El sistema falla si Orrego queda tercero, es decir, si $A > C + D$ y $F > C + D$.
  Por lo tanto, la condición para que se elija a Orrego cuando él es el ganador de Condorcet es:

$$(C + D > A) \quad \vee \quad (C + D > F)$$

d. (1.5 puntos) Poco antes de la elección, las encuestas revelan que habrá un aumento significativo en la participación de votantes jóvenes. Explique brevemente cómo y por qué esto podría afectar las políticas de los candidatos.

Pauta
Según el Teorema del Votante Mediano, los candidatos, como actores racionales que buscan maximizar sus votos para ganar, ajustan sus plataformas políticas para apelar al centro del electorado. Un aumento en la participación de votantes jóvenes altera la distribución de preferencias del electorado total. Si se asume que este nuevo grupo tiene preferencias distintas a las del electorado tradicional (por ejemplo, mayor prioridad en temas medioambientales, derechos

sociales o educación), la posición del votante mediano se desplazará en la dirección de esas nuevas preferencias. En respuesta, los candidatos modificarán sus discursos y propuestas de políticas para alinearse con este nuevo centro político.