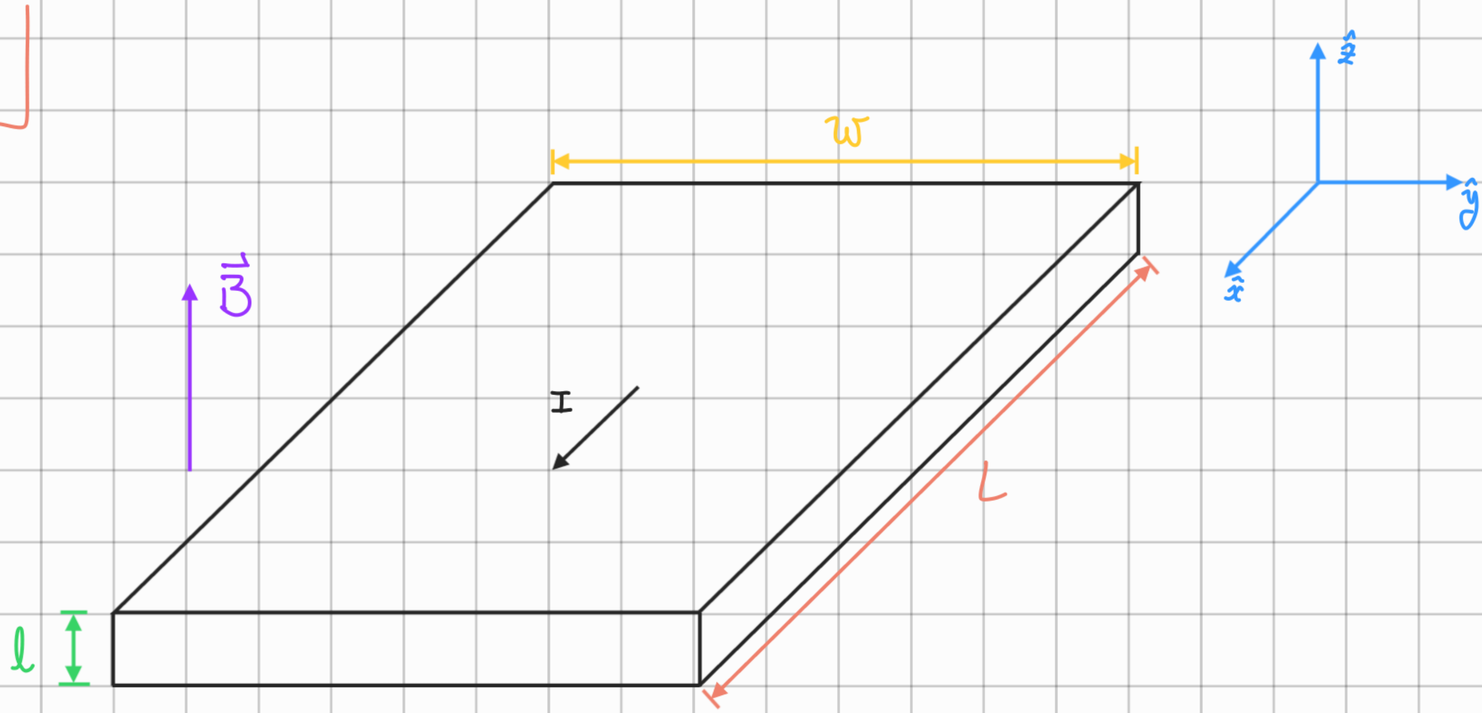
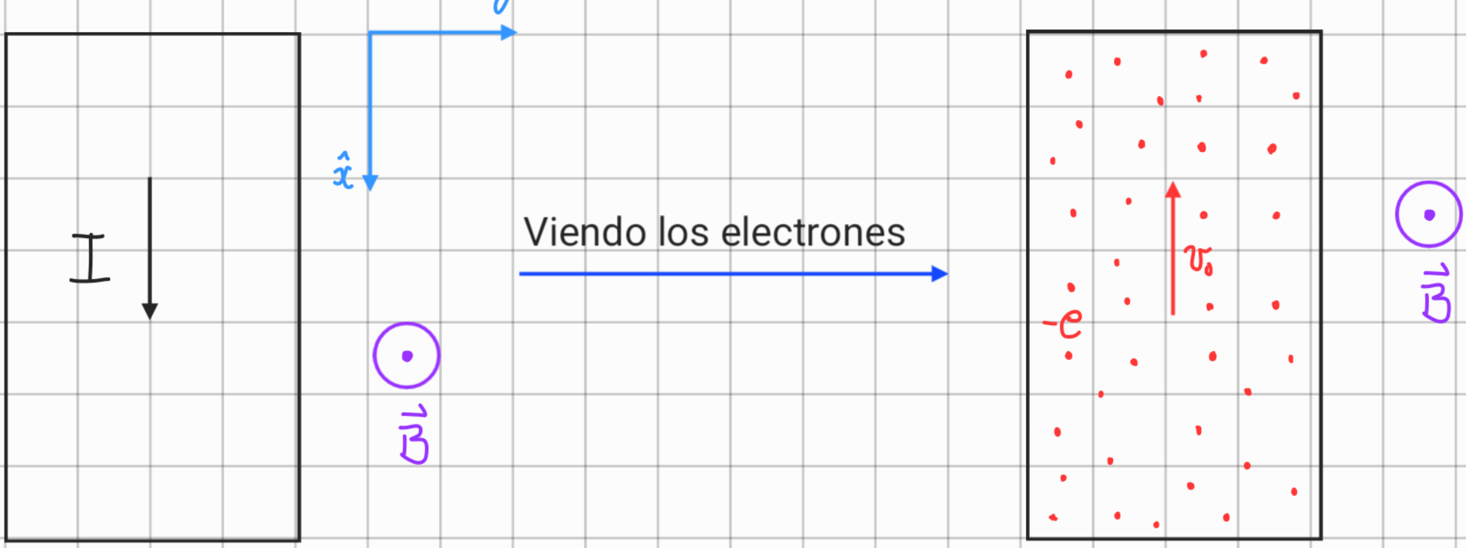
P1

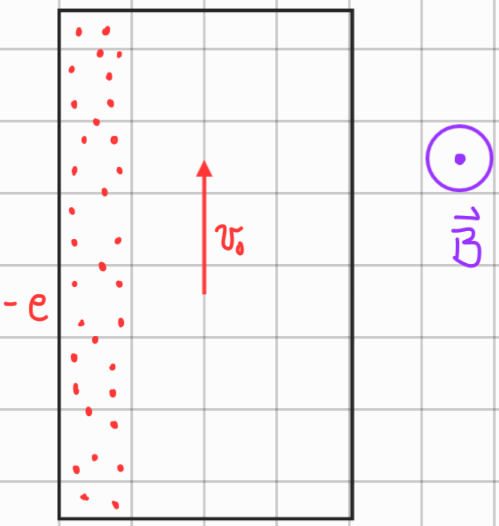
a)



Visto desde arriba

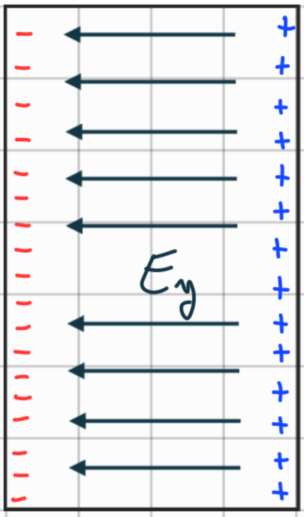


Dado que los electrones se mueven hacia arriba en presencia de un campo magnético que sale de la pantalla, estos experimentarán una fuerza de Lorentz que los jala hacia la izquiera de la placa, de modo que los electrones comenzarán a acumularse en ese lado



Notar que los electrones sienten una fuerza hacia la izquierda ya que poseen carga negativa, si su carga fuese postiva la fuerza iría hacia la derecha como ocurría usualmente.

Ahora, la aglomeración de electrones en el lado izquierdo de la placa provocará que esa zona se cargue negativamente, mientras que el lado derecho queda con una carga neta positiva, esto hará que aparezca un campo eléctrico que apunta desde el lado positivo hacia el negativo como se ve en la siguiente figura.



Este campo eléctrico, provocado por la acumulación de cargas, es lo que da origen al voltaje de Hall.

b)

Para calcular V_H procedemos como sigue

$$\vec{F} = -e(v \times \vec{B} + \vec{E})$$

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B} - e\vec{E}$$

$$\vec{F} = -e(v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) \times B_0 \hat{z} - e(E_x \hat{x} + E_y \hat{y})$$

$$\vec{F} = e v_x B_0 \hat{y} - e v_y B_0 \hat{x} - e E_x \hat{x} - e E_y \hat{y}$$

En equilibrio $\vec{F} = 0$

$$\Rightarrow 0 = e v_x B_0 \hat{y} - e v_y B_0 \hat{x} - e E_x \hat{x} - e E_y \hat{y}$$

Como el voltaje que nos interesa proviene de un campo en la dirección *y*, evaluamos esa componente de la fuerza

$\hat{y}$]

$$v_x B_0 = E_y \quad (1)$$

Donde $v_x = -v_0$, ya que los electrones se mueven en el sentido $-\hat{x}$, así

$$E_y = -v_0 B_0 \quad (2)$$

Pero v_0 es desconocido, sin embargo, este se puede determinar a partir de la corriente *I*

Recordemos que $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ y $\vec{J} = \rho \vec{v}$

Donde ρ es la densidad de carga. Dado que conocemos la densidad de electrones (*n*) y su carga (-*e*)

$$\rho = -ne$$

Y asumiendo una velocidad $-v_0 \hat{x}$

$$\vec{J} = n e v_0 \hat{x}$$

Así la corriente viene dada por

$$I = \int_0^l \int_0^w n e v_0 \underbrace{\hat{x} \cdot \hat{x}}_{=1} \, dy \, dz$$

Donde la integral se realiza sobre la cara de grosor *l* y ancho *w* (la que da hacia afuera de la pantalla).

$$I = n e v_0 w l \implies v_0 = \frac{I}{n e w l}$$

Remplazando en la ecuación (2)

$$E_y = \frac{-I B_0}{n e w l}$$

Finalmente, el voltaje se calcula como

$$V_H = \int_0^w E_y \, dy = \int_0^w \frac{-I B_0}{n e w l} \, dy = \frac{-I B_0}{n e \cancel{w} l} \cancel{w} \implies \boxed{V_H = \frac{-I B_0}{n e l}}$$

c)

$$R_H = \frac{E_y}{J_x B_z}$$

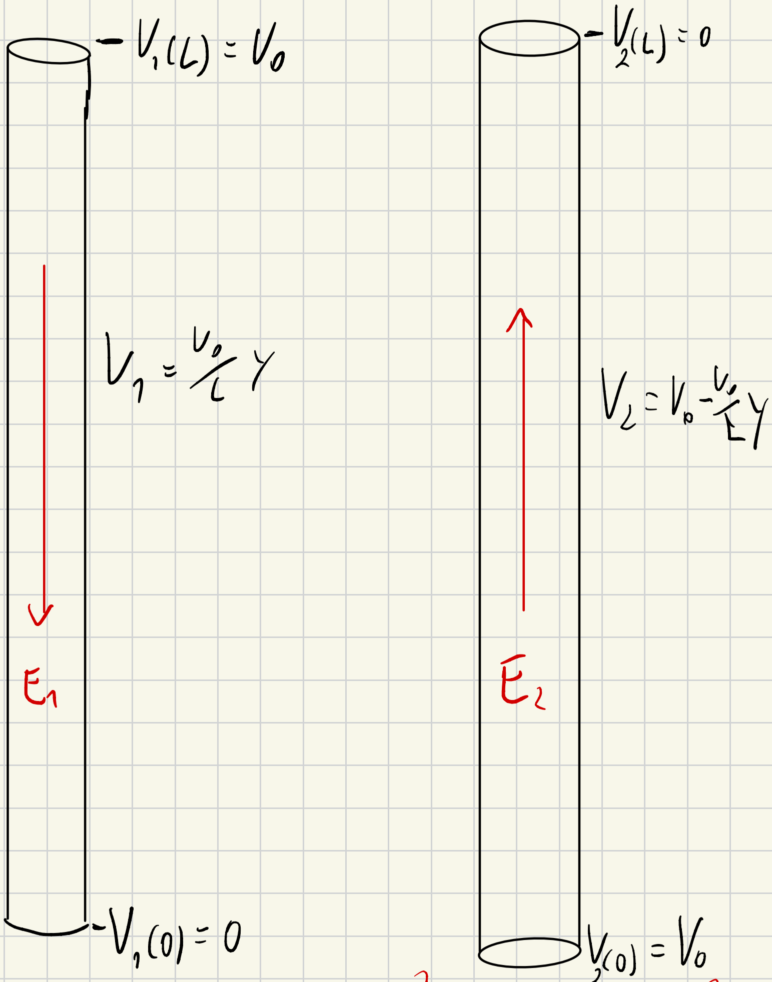
Reemplazando todo lo que ya sabemos

$$R_H = \frac{-\cancel{v_0}\cancel{B_0}}{ne\cancel{v_0}\cancel{B_0}}$$

$$\boxed{R_H = \frac{-1}{ne}}$$

FCV.

P2) A partir del potencial conocido en los cables podemos obtener el campo electrico dentro de ellos:



$$\vec{E}_1 = -\nabla V = -\left(\cancel{\frac{\partial V}{\partial x}}^{\,0} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \cancel{\frac{\partial V}{\partial z}}^{\,0} \hat{z} \right) = \frac{-\partial V_1}{\partial y} \hat{y} = \frac{-V_0}{L} \hat{y}$$

$$\boxed{\vec{E}_1(y) = \frac{-V_0}{L} \hat{y}}$$

Analogo:

$$\vec{E}_2 = \frac{-\partial V_2}{\partial y} \hat{y} = -\left(\frac{-V_0}{L} \right) \hat{y} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2(y) = \frac{V_0}{L} \hat{y}}$$

Con el campo electrico podemos encontrar la corriente:

$$\vec{J} = g \vec{E} \Rightarrow \vec{J}_1 = \frac{-g V_0}{L} \hat{y} = -\vec{J}_2$$

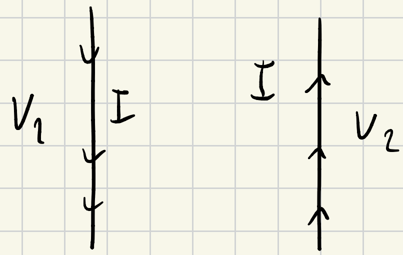
$$I = \int \vec{J} \cdot dS$$

Integramos la densidad de corriente que fluye por el cilindro para encontrar la corriente total

Como la densidad de corriente J es uniforme en el area transversal circular del cilindro nos queda la integral:

$$I = J \int dS = J \cdot Area = J \cdot \pi r^2$$

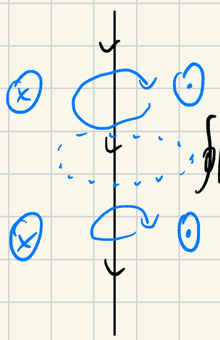
$$I = \frac{g V_0 \pi r^2}{L}$$



Ambas corrientes tienen misma magnitud pero fluyen en sentidos contrarios

Ahora que conocemos las corrientes en los cables veamos como sera el campo magnetico que existira entre ellos

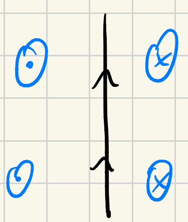
Sabemos como es el campo que produce solo un cable



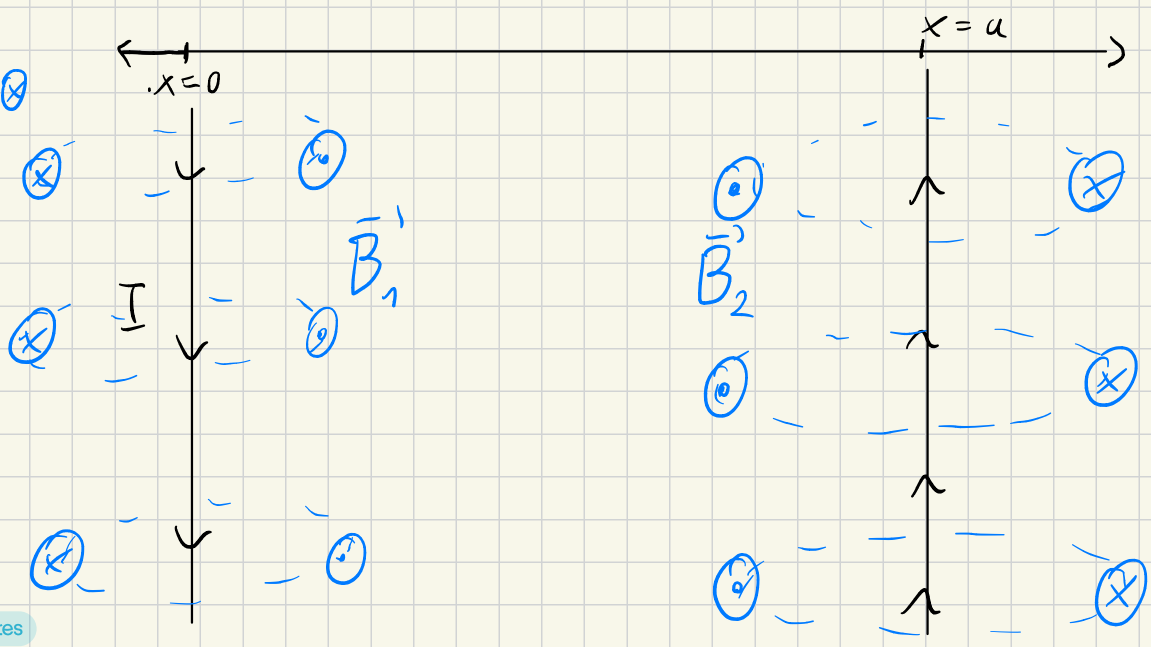
Ampere:

$$\oint B(r)\, dl = I \mu_0 \longrightarrow B(r) \cdot 2\pi r = I \mu_0$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{I \mu_0}{2\pi r}$$



Aplicando Ampere vemos la magnitud de los campos en funcion de la distancia a los cables con corriente. Con la ley de la mano derecha podemos ver su direccion en nuestro sistema:



Made with Goodnotes

$$\vec{B}_1 = \frac{I\mu_0}{2\pi d_1}\hat{z} = \frac{I\mu_0}{2\pi x}\hat{z}$$

d_1: Distancia al cable 1

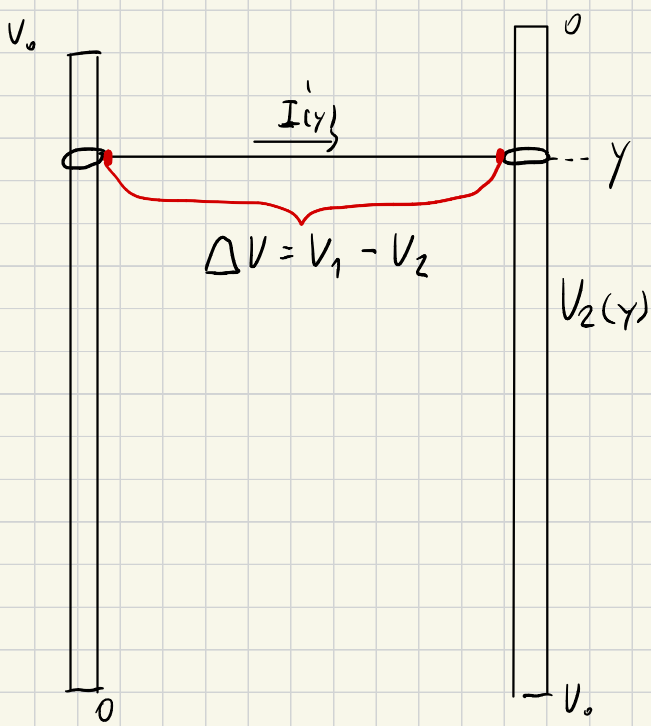
$$\vec{B}_2 = \frac{I\mu_0}{2\pi d_2}\hat{z} = \frac{I\mu_0}{2\pi(a-x)}\hat{z}$$

d_2: Distancia al cable 2

$$\vec{B}_{neto} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{I\mu_0\hat{z}}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

$$\vec{B}_{neto}(x) = \frac{I\mu_0}{2\pi}\,\frac{a}{x(a-x)}\,\hat{z} \quad \forall\, x \in [0,a]$$

b)



$$V_1(y) = \frac{V_0}{L}y$$

$$V_2(y) = V_0 - \frac{V_0}{L}y$$

Ahora que existe un cable que une los conductores vamos a encontrar la corriente I' que fluye por el encontrando primero la diferencia de potencial que existe entre los terminales de este:

$$I'(y) = \frac{\Delta V(y)}{R} = \frac{V_1(y) - V_2(y)}{R}$$

Esta resta es debido al sentido que definimos la corriente en el dibujo, si esta resta el negativa la corriente correra del cable 2 al cable 1.

$$I'(y) = \frac{1}{R}\left(\frac{V_0}{L}y - V_0 + \frac{V_0}{L}y\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{2V_0}{L}y - V_0\right)$$

c) Con el campo magnetico entre los conductores donde se encuentra el cable y con la corriente en funcion de y que corre por el cable podemos calcular la fuerza magnetica que experimente el cable en funcion de y.

$$\vec{F}_{(y)} = \int_0^a I' \, d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$I' = I'(y) = \frac{1}{R}\left(\frac{2V_0}{L} y - V_0\right)$$

$$d\vec{l} = dx\,\hat{x} \rightarrow \text{corresponde al cable}$$

$$\vec{B} = \vec{B}(x) = \frac{I\mu_0}{2\pi} \frac{a}{x(a-x)} \hat{z} = B(x)\hat{z}$$

$$\vec{F}(y) = \int_0^a I(y)\, dx\, \hat{x} \times B(x)\,\hat{z}$$

$$= \int_0^a I(y)\, B(x)\, dx (-\hat{y})\, \hat{z}$$

Saquemos de la integral todo lo que no depende de x

$$\vec{F}(y) = I'(y)(-\hat{y}) \int_0^a B(x) =$$

$$= I'(y)(-\hat{y}) \int_0^a \frac{I\mu_0}{2\pi} \frac{a}{x(a-x)}$$

$$= \frac{I\mu_0}{2\pi} I'(y)(-\hat{y}) \underbrace{\int_0^a \frac{a}{x(a-x)} dx}_{\text{Resolvamos esto}}$$

$$\int_a^a \frac{a}{x(a-x)} = -\int_0^a \frac{a\, dx}{x(x-a)} = -\int_0^a \frac{a}{x^2(1-a/x)} dx$$

Made with Goodnotes

$$-\int_0^a \underbrace{\frac{a}{\underbrace{\left(1-\frac{a}{x}\right)}_{u}x^2}dx}_{du} \qquad u = 1 - a/x \qquad du = \frac{a}{x^2}\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln(u)\Big|_{u(0)}^{u(a)}$$

$$= -\ln(1 - a/x)\Big|_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} = \ln(1 - a/\varepsilon) - \ln\left(1 - \frac{a}{a-\varepsilon}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\varepsilon - a}{\varepsilon} \Big/ \frac{-\varepsilon}{a-\varepsilon}\right) = \ln\left(\frac{(a-\varepsilon)^2}{\varepsilon^2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{(y)} = \frac{I\,\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{(a-\varepsilon)^2}{\varepsilon^2}\right) I'_{(y)}\,(-\hat{y})$$

con $I = \frac{g V_0 \pi r^2}{L}$

$I_{(y)} = 1/R\left(\frac{2V_0}{L}y - V_0\right)$

$$\vec{F}_{(y)} = \frac{g V_0 r^2}{L R}\ln\left(\frac{a-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(V_0 - \frac{2V_0}{L}y\right)\hat{y}$$

Notemos:

$\vec{F}_{(L/2 = y)} = 0$

$y < L/2 \Rightarrow \vec{F} = F\hat{y}$

$y > L/2 \Rightarrow \vec{F} = F(-\hat{y})$

De aqui concluimos que la fuerza siempre apuntara al punto de equilibrio que es L/2