Pauta de Corrección: Control 3 – Electromagnetismo

Profesor: Ignacio Andrade

Junio 2025

P1. Inducción 1 (6 ptos)

Objetivo: Determinar la corriente inducida en una espira rectangular cercana a un hilo con corriente alterna.

- El campo magnético generado por un hilo infinito: 0.5 pto.

$$\vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 I_1(t)}{2\pi r}\hat{\phi}$$

- Flujo magnético a través de la espira: 0.5 pto.

$$\Phi_B(t) = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t)}{2\pi r} h\, dr = \frac{\mu_0 h I_0 \cos(\omega t)}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right)$$

- Fem inducida: 0.5 pto.

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 h I_0 \omega \sin(\omega t)}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right)$$

- Ecuación de circuito: 0.5 pto.

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$$

donde $\mathcal{E}_0 = \frac{\mu_0 h I_0 \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{d+b}{d}\right)$.

- Solución general: 0.5 pto.

$$I(t) = I_{\text{transiente}} + I_{\text{permanente}} = Ce^{-Rt/L} + A\cos(\omega t + \phi)$$

- Tiempo característico del régimen transiente: $\tau = \frac{L}{R}$ 0.5 pto.
- En el régimen permanente, usando las identidades para $\sin(a+b)$ y $\cos(a+b)$ se obtiene: 1.0 pto.

$$I(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \text{con} \quad A = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \tan(\phi) = \frac{\omega L}{R}$$

- Límites: 0.5 pto.
  - $\omega \to 0$: $A \to \frac{\mathcal{E}_0}{R}$, respuesta cuasi-estática.
  - $\omega \to \infty$: $A \to 0$, comportamiento de alta frecuencia $\to$ la inductancia domina.
- Gráfico esperado: seno y coseno desfasados (valor relativo de amplitud reducido). 0.5 pto.

P2. Inducción 2 (6 ptos)

a) Corriente inducida

- Área barrida por la semicircunferencia del campo magnético cambia en el tiempo. Cuando la espira entra al campo magnético ($0 < \omega t < \pi$) el área aumenta, y cuando la espira sale ($\pi < \omega t < 0$) el área disminuye. Luego el ciclo se repite.
- Flujo magnético cuando el área aumenta 0.5 pto. ($0 < \omega t < \pi$):

$$\Phi(t) = B_0 \cdot A(t) = B_0 \cdot \left(\frac{1}{2}a^2\theta(t)\right), \quad \theta(t) = \omega t \Rightarrow \Phi(t) = \frac{1}{2}B_0 a^2 \omega t$$

  Luego de megio giro, $\Phi(t) = \frac{1}{2}B_0 a^2(\pi - \omega t)$.
- Fem ($0 < \omega t < \pi$) : 0.5 pto.

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}B_0 a^2 \omega$$

  Para $\pi < \omega t < 0$, $\mathcal{E}(t) = +\frac{1}{2}B_0 a^2 \omega$.
- Corriente inducida ($0 < \omega t < \pi$): 0.5 pto.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{B_0 a^2 \omega}{2R}$$

  en sentido horario. Para $\pi < \omega t < 0$, $I = \frac{B_0 a^2 \omega}{2R}$.
- Graficar la corriente $I(t)$ de valor constante en el tiempo, alternando su signo cada en períodos de π/ω unidades de tiempo. 0.5 pto.

b) Torque magnético (por simplicidad, nos centraremos en $0 < \omega t < \pi$). 2.0 ptos.

Observando la parte de la espira en el campo magnético, nos damos cuenta que la sección circular siente una fuerza radial hacia el eje de giro, por lo que no contribuye al torque. Solo contribuye al torque, el segmento recto radial de la espira. Un elemento infinitesimal de largo dr siente una fuerza $d\vec{F} = -IdrB\hat{\phi}$, oponiéndose al sentido de giro, luego el torque total es

$$\vec{\tau} = -\int_0^a drIB\hat{z} = -IB_0\frac{a^2}{2} = -\frac{B_0^2 a^4 \omega}{4R} \tag{1}$$

Aclaración: algunos podrían considerar calcular el torque usando $\tau = \vec{m} \times \vec{B}$, donde $\vec{m} = I\vec{A}$, con $A = \frac{1}{2}\pi a^2$. Al resolver de esta forma se llega a

$$\tau = I \cdot \frac{1}{2}\pi a^2 \cdot B_0 = \frac{\pi a^4 \omega B_0^2}{4R}$$

lo que difiere en un factor π con el resultado anterior. El error de utilizar esta fórmular radica en que el campo magnético no atraviesa el circuito completo, por lo que ya no es válida. Funciona más bien como una aproximación al valor real, con un "área efectiva"distinta de $A = \pi r^2/2$. Si el estudiante utiliza esta fórmula dar puntaje parcial (1.0 pto).

c) Potencia mecánica: 1.0 pto. Puede calcularse usando la fórmula $P = -\mathcal{E}I = \dot{\Phi}I$, o bien, usando $U = \int \tau(\theta)d\theta = \tau\omega t$, y luego, $P = dU/dt = \tau\omega$:

$$P = \tau \cdot \omega = \frac{a^4 \omega^2 B_0^2}{4R}$$

d) Potencia disipada: 1.0 pto.

$$P_{\text{eléctrica}} = I^2 R = \left(\frac{B_0 a^2 \omega}{2R}\right)^2 R = \frac{B_0^2 a^4 \omega^2}{4R}$$

Comparación: Coinciden. Físicamente, significa que el sistema por si sólo va frenándose debido a la potencia disipada, y se necesita un motor externo para mantener el sistema en rotación con vel. angular constante.

—

P3. Fuerza de Lorentz (4 ptos)

Trayectoria dada:

$$(x(t), y(t)) = \frac{v_0}{\omega}(-\cos(\omega t + \phi), \sin(\omega t + \phi)) + \left(\frac{Et}{B}, 0\right)$$

Ecuación de movimiento:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

- El componente sinusoidal corresponde a un movimiento circular uniforme en el plano xy (girando en sentido horario), por lo tanto $\vec{B} = B\hat{z}$, $B > 0$ (se deduce analizando la fuerza centrípeta según regla de la mano derecha).
- Luego, $\vec{E}$ apunta en $\hat{x}$ o en $\hat{y}$. Escribamos las ecuaciones de movimiento para un campo eléctrico de la forma $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y + qE_x \\ m\dot{v}_y &= -qBv_x + qE_y. \end{aligned} \tag{2}$$

Notemos que, según la trayectoria de la partícula

$$(v_x(t), v_y(t) = (v_0 \sin(\omega t + \phi) + \frac{E}{B}, v_0 \cos(\omega t + \phi)) \tag{3}$$

Reemplazando en 2, deducimos que $E_x = 0$ y que $E_y = E$, i.e., $\vec{E} = E\hat{y}$ $(E > 0)$. Se infiere además que $\omega = \frac{qB}{m}$ (frecuencia de ciclotrón). Luego, la ec. de mov. es:

$$m\dot{v}_x = qBv_y \tag{4}$$

$$m\dot{v}_y = -qBv_x + qE. \tag{5}$$

Para resolver la ec. de movimiento se propone dos métodos:

método 1: Reemplazando la ec. (4) en la derivada temporal de la ec. (5), se obtiene $m\ddot{v}_y = qv_y$ la ec. de un oscilado armónico, cuya solución es de la forma $A\cos(\omega t + \phi)$. Luego, reemplazando en reemplazando 5 se obtiene $v_x = A\sin(\omega t + \phi) + E/B$. Haciendo $A = v_0$ se obtiene (3).

método 2: Se propone el cambio de variable $v_x' = v_x - E/B$, de manera que podemos escribir

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x' &= qBv_y \\ m\dot{v}_y &= -qBv_x' \end{aligned}$$

Este es un sistema lineal de EDO's que puede escribirse de la forma $\vec{v} = M\vec{v}$, donde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

con $\omega = qB/m$. Se propone un ansatz de la forma $\vec{v} = \vec{v}_\lambda e^{\lambda t}$, donde son los dos valores propios del sistema $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ y $\vec{v}_{\lambda_{1,2}}$ son los dos vectores propios respectivos. Salvo constantes de proporcionalidad: $v_{\lambda_1} = (1, i)$ y $v_{\lambda_2} = (1, -i)$, de manera que $v'_x = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$ y $v_y = c_1 i e^{i\omega t} - c_2 i e^{-i\omega t}$. Las exponenciales complejas para v'_x y v_y se escriben como soluciones oscilatorias con un desfase de $\pi/2$ entre ellas. Finalmente, volviendo a las variables originales, v_x y v_y pueden escribirse como ec.3.

Puntaje sugerido: - 1.0 ptos por razonamiento para verificar las direcciones de $\vec{E}, \vec{B}$. - 1.0 ptos escribir la ecuación de movimiento y reemplazar la trayectoria (puntaje parcial si hay errores de signos). - 1.0 por identificar direcciones correctas de $\vec{E}, \vec{B}$. (puntaje parcial si hay errores de signo). - 1.0 ptos identificar ω - 2.0 ptos por explicación de método. Puntaje parcial si falta claridad o detalle

—