Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 28: Qué onda?

P1. Onda en medios materiales aislantes

Imagine un detector de señales electromagnéticas que se encuentra dentro de un cristal con permitividad y permeabilidad conocidas (ε_1, μ_1) y conductividad nula. El detector, al exponerse a una onda electromagnética, mide su número de onda $\vec{k}$ y la máxima magnitud del campo magnético dentro del cristal. Una señal está incidiendo en el cristal en forma normal a la interfaz. Considerando la onda como:

$$\vec{B} = \tilde{B}_t e^{i(kz-\omega t)}\hat{i}$$

a) Encuentre la frecuencia ω de la señal.

b) Determine los campos eléctricos y magnéticos tanto en el aire como en el cristal.

c) Comente sobre la capacidad de detección basada en los coeficientes de reflexión y transmisión.

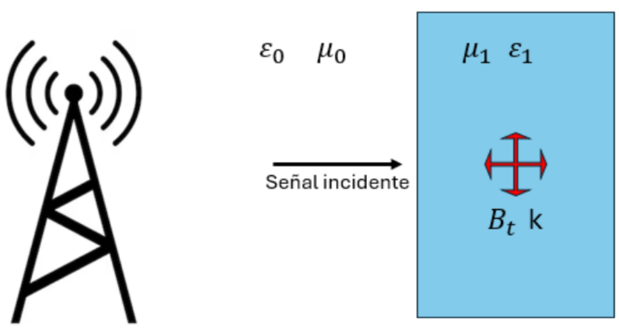


Figura 1

P2. Longitud de penetración

Considere un conductor neutro $(\rho = 0)$ de permitividad ε, permeabilidad μ y conductividad g en el que se propaga una onda electromagnética en la dirección $\hat{z}$ con frecuencia angular ω.

a) Utilice las ecuaciones de Maxwell-Heaviside y ley de Ohm para encontrar la ecuación de ondas que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen dentro del conductor.

b) Utilizando el ansatz $\vec{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{z}$, encuentre la relación entre k y ω, y demuestre que $k = k_R + ik_I$.

c) Determine los valores de k_R y k_I en función de ε, μ, g y ω.

d) Reescriba la solución para el campo eléctrico y grafique $Re(\vec{E})$ en función de z. ¿Qué tan profundo penetra la onda en el conductor?.

Resumen

Ecuaciones de Maxwell-Heaviside

En el vacío, las ecuaciones que describen prácticamente todos los fenómenos electromagnéticos son las siguientes:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

Ondas Electromagnéticas

Al tomar el rotor en la ley de Faraday y la ley de Ampère-Maxwell, y aplicar la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \tag{5}$$

se llega a que las ecuaciones para $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en el vacío son:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{6}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{7}$$

Resumen: Las ec. de maxwell nos explican todos los fenomenos electromagneticos.

$$\nabla \cdot E = \rho/\varepsilon \iff E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$$

$\nabla \cdot B = 0 \iff$ No existen los monopolos magneticos.

$$\nabla \times B = \mu J + \mu \frac{\partial D}{\partial t} \iff B(r) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\vec{J}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} + \text{Corriente de des.}$$

$\nabla \times \vec{E} = \frac{-\partial B}{\partial t} \Rightarrow$ Induccion electromagnetica

Asumiendo $J=0 \wedge \rho = 0$ de estas ecuaciones se deriva la ec. de Onda:

$$\nabla^2 E + \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \wedge \quad \nabla^2 B + \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

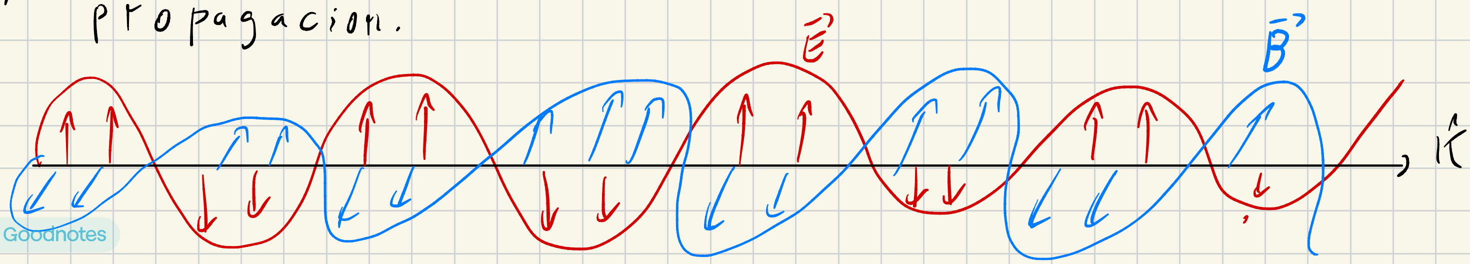
Al ser la misma ec de onda para B y E, interpretamos que se propagan juntos.

Ademas de las ecuaciones de Maxwell se deriva

Sea $\hat{K}$ la direccion de propagacion:

$$\underbrace{\vec{E}\cdot\hat{K} = 0 \quad \wedge \quad \vec{B}\cdot\hat{K} = 0}_{\text{No existe componente de } \vec{E} \text{ y } \vec{B} \text{ en la direccion de propagacion.}} \quad \wedge \quad \underbrace{\vec{E} = v\vec{B}\times\hat{K} \quad \wedge \quad \vec{B} = \tfrac{1}{v}\hat{K}\times\vec{E}}_{\vec{E} \text{ y } \vec{B} \text{ son perpendiculares.}}$$

$\Rightarrow$



Esta onda se modela con la expresion que cumple la EDO:

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \, e^{i(kz - wt)}} \quad \wedge \quad \boxed{\vec{B} = B_0 \, e^{i(kz - wt)}}$$

$$= E_0 \left(\cos(kz - wt) + i \, \mathrm{sen}(kz - wt) \right) \hat{x} \qquad = B_0 \left(\cos(kz - wt) + i \, \mathrm{sen}(kz - wt) \right) \hat{y}$$

Trabajamos con exponenciales para facilitar los calculos. La parte imaginaria se puede despreciar.

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$: Representa el factor de cambio de la onda segun la posición.

$w = \dfrac{2\pi}{T}$: frecuencia angular. Siempre se mantiene al cambiar de medio.

$$w/k = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \lambda/T = v = \text{Velocidad de propagación}$$

$$\boxed{v = w/k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}}$$

Por la cte en la EDO.

De $\vec{E} = v \vec{B} \times \hat{k}$ extraemos $E_0 = v B_0$ Una relacion entre las magnitudes de B y E.

Con las siguientes ec. trabajaremos para conocer la totalidad del comportamiento de la onda EM en medios lineales no conductores:

$$\vec{E} = E_0 \, e^{i(kz - wt)} \hat{x}, \quad \vec{B} = B_0 \, e^{i(kz - wt)} \hat{y}$$

$$E_0 = v B_0$$

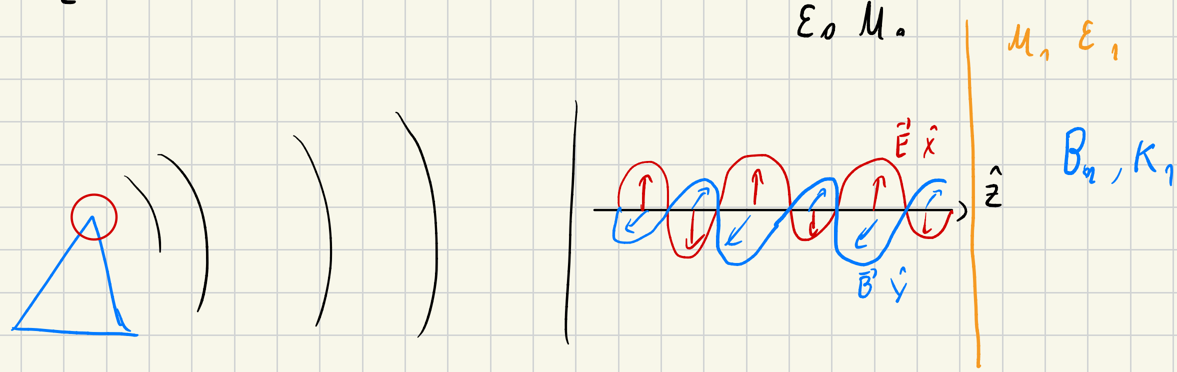
$$v = w/k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Y las condiciones de Borde al pasar de un medio 1 a un medio 2:

$$E_1^t = E_2^t$$

$$\frac{B_1^t}{\mu_1} = \frac{B_2^t}{\mu_2}$$ t de tangente a la interfaz.

P1)



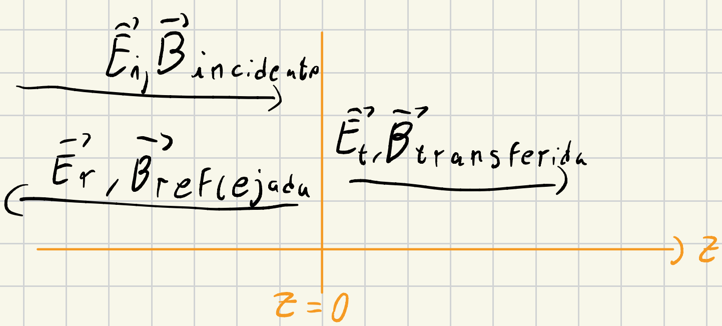
Gracias al detector conocemos el $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ de la onda dentro del cristal. Ademas al conocer μ_1 y ε_1

$$\Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} = \frac{w}{K_1} \Rightarrow w = \frac{K_1}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} = \frac{K_0}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$ → V en el aire.

$$\Rightarrow K_0 = K_1 \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Asi conocemos w que es cte independiente el medio y tambien K_0.

b. Se nos presenta un escenario con 3 ondas con magnitud desconocidas, tanto para $\vec{E}$ como para $\vec{B}$



Estos campos tienen una forma conocida:

$$\vec{E}_i = E_i e^{i(K_0 z - wt)} \hat{x}, \quad \vec{B}_i = B_i e^{i(K_0 z - wt)} \hat{y} \qquad E_i = v_0 B_i$$

$$\vec{E}_r = E_r e^{i(-K_0 z - wt)} \hat{x} \qquad \vec{B}_r = B_r e^{i(-K_0 z - wt)} \qquad B_r = \frac{1}{-v} E_r$$

(pq la velocidad es hacia $-\hat{z}$)

* El signo menos en $e^{i(-K_0 z - wt)}$ es porque la onda se propaga hacia $-\hat{z}$.

$$\vec{E}_t = E_t e^{i(K_1 z - wt)} \hat{x} \qquad \vec{B}_t = B_t e^{i(K_1 z - wt)} \qquad E_t = V_1 B_t$$

Como ya sabemos K_0, K_1, V_1, V_0 y w solo nos falta conocer las magnitudes de los campos para conocer la totalidad del comportamiento de la onda.

Gracias al Detector conocemos la magnitud B_t

$$\Rightarrow E_t = V_1 B_t = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} B_t$$

Ahora usamos condiciones de Borde :

$$E_1^t = E_2^t \Rightarrow E_i + E_r = E_t$$

$$\frac{B_1^t}{\mu_1} = \frac{B_2^t}{\mu_2} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0}(B_i + B_r) = \frac{1}{\mu_1} B_t \quad (1)$$

Esto pues al ser la direc de propagacion normal a la interfaz, los campos $\vec{B}$ y $\vec{E}$ son tangentes a la interfaz

$$\left.\begin{aligned} E_i &= V_0 B_i \\ E_r &= -V_0 B_r \\ E_t &= V_1 B_t \end{aligned}\right\} \quad V_0 (B_i - B_r) = V_1 B_t \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \frac{\mu_1}{\mu_0}(B_i + B_r) = B_t = \frac{V_0}{V_1}(B_i - B_r)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_1 V_1}{\mu_0 V_0}(B_i + B_r) = B_i - B_r \qquad \text{sea } \beta = \frac{\mu_1 V_1}{\mu_0 V_0}$$

$$\Rightarrow \quad (1+\beta) B_r = (1-\beta) B_i$$

$$1+\beta = \frac{\mu_0 V_0 + \mu_1 V_1}{\mu_0 V_0}$$

$$1-\beta = \frac{\mu_0 V_0 - \mu_1 V_1}{\mu_0 V_0}$$

$$\Rightarrow B_r = \frac{1-\beta}{1+\beta} B_i$$

$$\Rightarrow B_t = \frac{\mu_1}{\mu_0}(B_r + B_i) = \frac{\mu_1}{\mu_0}\left(\frac{2}{1+\beta}\right) B_i = B_t$$

$$\Rightarrow B_i = \frac{\mu_0}{\mu_1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right) B_t = \frac{\mu_0}{\mu_1} \cdot \frac{\mu_0 V_0 + \mu_1 V_1}{2 \mu_0 V_0} B_t = \frac{\mu_0 V_0 + V_1 \mu_1}{2 \mu_1 V_0} B_t$$

$$\Rightarrow B_r = \frac{\mu_0}{\mu_1}\left(\frac{1-\beta}{2}\right) B_t = \frac{\mu_0}{\mu_1} \cdot \frac{\mu_0 V_0 - \mu_1 V_1}{2 \mu_0 V_0} B_t = \frac{\mu_0 V_0 - V_1 \mu_1}{2 \mu_1 V_0} B_t$$

$$\Rightarrow E_i = \frac{\mu_0 V_0 + V_1 \mu_1}{2 \mu_1} B_t$$

$$E_r = \frac{\mu_0 V_0 - V_1 \mu_1}{2 \mu_1} B_t$$

$$E_t = V_1 B_t$$

Con esto tenemos toda la informacion de los campos.

c) Para obeter los coef. de Reflexion y Trasmicion estudiaremos la Potencia media de cada onda

$$\text{Potencia media} = \underbrace{\langle |S| \rangle}_{\text{solo a magnitud cte. en medios no conductores}} = \frac{1}{2} \varepsilon V |E|^2 = I$$

$$I_{incidente} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} E_i^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{\mu_0 V_0 + \mu_1 V_1}{2 \mu_1} B_t\right)^2$$

$$I_r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_r^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\frac{\mu_0 v_0 - \mu_1 v_1}{2\mu_1} B_t\right)^2$$

$$I_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\, E_t^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\left(v_1 B_t\right)^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\frac{B_t^2}{\varepsilon_1 \mu_1} = \frac{1}{2\mu_1\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} B_t^2$$

Coef:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}\left(\frac{\mu_0 v_0 - \mu_1 v_1}{\cancel{2\mu_1}}\cancel{B_t}\right)^2}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}\left(\frac{\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1}{\cancel{2\mu_1}}\cancel{B_t}\right)^2} = \frac{(\mu_0 v_0 - \mu_1 v_1)^2}{(\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1)^2}$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2\mu_1}\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}\cancel{B_t}^2}{\cancel{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\cancel{\mu_0}}}\left(\frac{\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1}{2\mu_1}\cancel{B_t}\right)^2} = \frac{v_1^2}{(\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1)^2}$$

Segun los valores de μ_0, ε_0, μ_1, ε_1 la energia de la onda incidente se reflejara mas o se transmitira mas y llegara al detector. Idealmente que mas energia llegue al detector, por lo que buscamos T grande.

P2

(1) $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon$ (2) $\nabla\cdot\vec{B}=0$

(Se asume un medio lineal.)

(3) $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (4) $\nabla\times\vec{B}=\mu\vec{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

(5) $\vec{E}(z,t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{z}$

a)

Ley de Ohm: $\vec{J}=g\vec{E} \overset{(4)}{\Longrightarrow} \nabla\times\vec{B}=\mu g\vec{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (6)

Aplicando el rotor a (3):

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B})$$

$$\nabla(\cancelto{0}{\nabla\cdot\vec{E}}) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu g\vec{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$*\ \rho=0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \nabla\cdot\vec{E}=0$

$$\nabla^2\vec{E} = \mu g\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\mu g\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0} \quad (7)$$

Ec. de onda para $\vec{E}$ en el conductor.

$\nabla\times(6)$:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \mu g\,\nabla\times\vec{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E})$$

$$\nabla(\cancelto{0}{\nabla\cdot\vec{B}}) - \nabla^2\vec{B} = -\mu g\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu g \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \mu g \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0} \quad (8)$$ Ec. de onda para $\vec{B}$ en el conductor.

b)

Dado que **E** solo tiene componente en *z*, se tiene que

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \hat{z}$$

Sustituyendo el ansatz para $\vec{E}$ en (7):

$$\frac{\partial E}{\partial z} = ik E_0 e^{i(kz-\omega t)} \quad ; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -k^2 E_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -i\omega E_0 e^{i(kz-\omega t)} \quad ; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\overset{(7)}{\Longrightarrow} -k^2 E_0 e^{i(kz-\omega t)} + \mu g i\omega E_0 e^{i(kz-\omega t)} + \mu \varepsilon \omega^2 E_0 e^{i(kz-\omega t)} = 0$$

$$-k^2 + \mu g \omega i + \mu \varepsilon \omega^2 = 0 \iff k^2 = \mu \varepsilon \omega^2 + \mu g \omega i$$

$$\iff \boxed{k^2 = \mu \varepsilon \omega^2 \left(1 + \frac{ig}{\varepsilon \omega}\right)} \Longrightarrow \boxed{k = k_R + i k_I}$$

Si k^2 posee una parte real y otra imaginaria, entonces lo mismo ocurre con *k*, es decir: $k = k_R + ik_I$.

c)

Reemplazando

$$(k_R + i k_I)^2 = \mu \epsilon \omega^2 + \mu g \omega i$$

$$k_R^2 + 2 i k_R k_I - k_I^2 = \mu \epsilon \omega^2 + \mu g \omega i$$

$\therefore$

- $k_R^2 - k_I^2 = \mu \epsilon \omega^2$
- $2 k_R k_I = \mu g \omega \Rightarrow k_I = \frac{\mu g \omega}{2 k_R}$

$$\Rightarrow k_R^2 - \frac{(\mu g \omega)^2}{4 k_R^2} = \mu \epsilon \omega^2 \Rightarrow 4 k_R^4 - 4 k_R^2 \mu \epsilon \omega^2 - \mu^2 g^2 \omega^2 = 0$$

Hacemos la sustitución $u \equiv k_R^2$

$$\Rightarrow 4u^2 - 4u \mu \epsilon \omega^2 - \mu^2 g^2 \omega^2 = 0 \Rightarrow u = \frac{4 \mu \epsilon \omega^2 \pm \sqrt{16 \mu^2 \epsilon^2 \omega^4 + 16 \mu^2 g^2 \omega^2}}{8}$$

$$k_R = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[4 \mu \epsilon \omega^2 + 4 \sqrt{\mu^2 \epsilon^2 \omega^2 + \mu^2 g^2 \omega^2} \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{8}} \left[\mu \epsilon \omega^2 + \mu \omega \sqrt{\epsilon^2 \omega^2 + g^2} \right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mu \epsilon \omega^2 + \mu \epsilon \omega^2 \sqrt{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right]^{1/2}$$

$$\boxed{k_R = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2 \omega^2}} \right]^{1/2}}$$

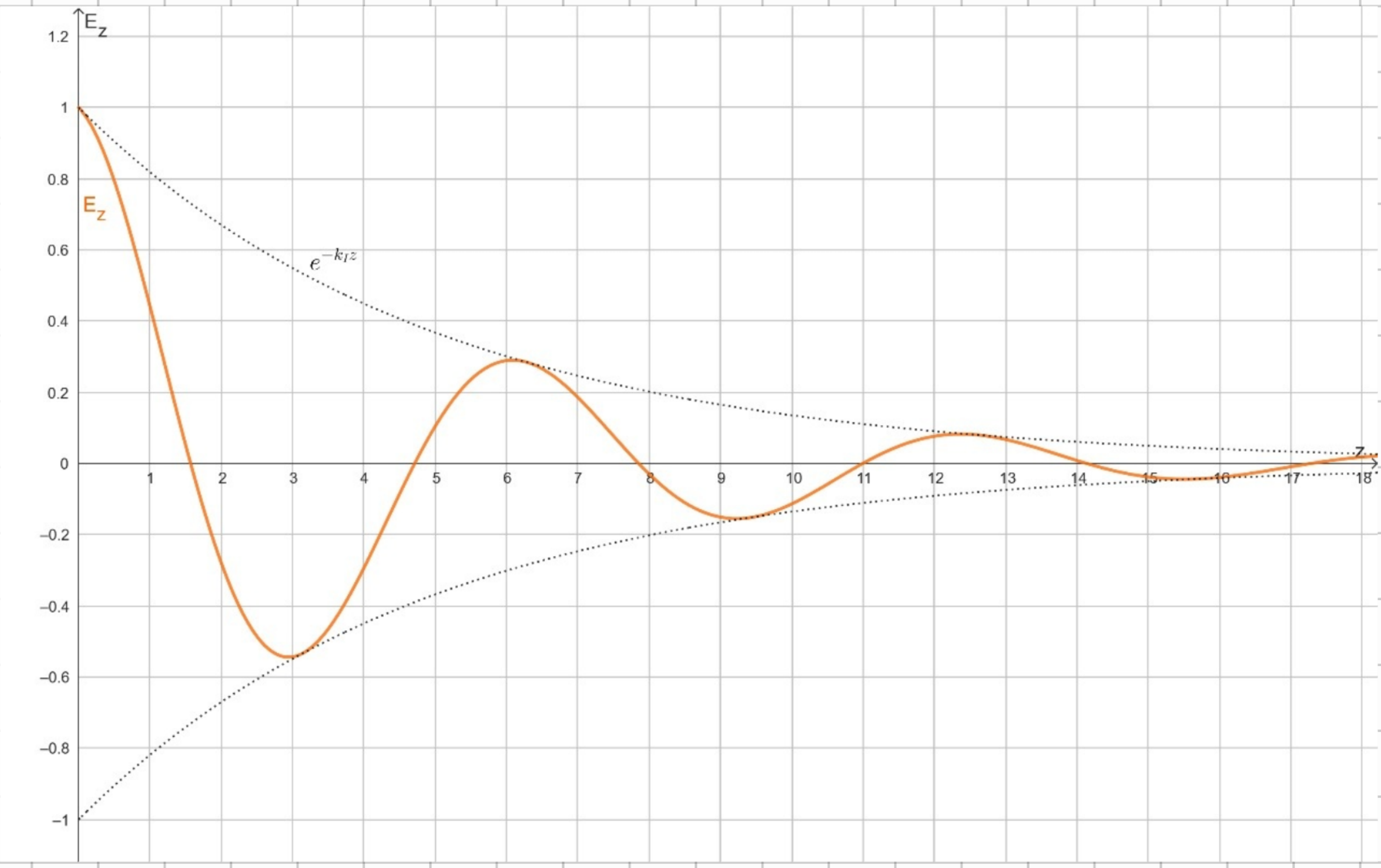
$$\boxed{k_I = \frac{\mu g \omega}{2 k_R}}$$

Reemplazando en el ansatz:

$$\vec{E} = E_0 \, e^{i(k_R z + i k_I z - \omega t)} \hat{z} = E_0 \, e^{i(k_R z - \omega t)} e^{-k_I z} \hat{z}$$

$$\boxed{\operatorname{Re}\{\vec{E}\} = E_0 e^{-k_I z} \cos(k_R z - \omega t)\hat{z}}$$

$\boxed{k_I^{-1} \text{ es la longitud de penetración.}}$



Extra

Algunos casos de interés para la longitud de penetración son los de bajas y altas frecuencias, estos se pueden derivar de los resultados que obtuvimos anteriormente

$$\boxed{k_R = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[1+\sqrt{1+\frac{g^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right]^{1/2}}$$

$$\boxed{k_I = \frac{\mu g \omega}{2k_R}} \longrightarrow k_R = \frac{\mu g \omega}{2k_I}$$

La longitud de penetración $\delta \equiv k_I^{-1} \Rightarrow k_R = \frac{\mu g \omega}{2}\delta$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2k_R}{\mu g \omega} = \frac{2}{\mu g \cancel{\omega}}\cancel{\omega}\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[1+\sqrt{1+\frac{g^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right]^{1/2}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\mu g^2}}\left[1+\sqrt{1+\frac{g^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right]^{1/2}$$

$$\delta = \left[\frac{2\varepsilon}{\mu g^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{g^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{2\varepsilon}{\mu g^2}\left(1+\frac{1}{\omega}\sqrt{\omega^2+g^2/\varepsilon^2}\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{2}{\omega g \mu}\left(\frac{\omega\varepsilon}{g}+\frac{\varepsilon}{g}\sqrt{\omega^2+g^2/\varepsilon^2}\right)\right]^{1/2}$$

$$\boxed{\delta = \left[\frac{2}{\omega g \mu}\left(\frac{\omega\varepsilon}{g}+\sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon^2}{g^2}+1}\right)\right]^{1/2}}$$

Bajas frecuencias

$$\omega \ll g/\varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta \approx \sqrt{\frac{2}{\mu g \omega}}} \qquad \left(\frac{\omega\varepsilon}{g} \approx 0\right) \Rightarrow k_R \approx \frac{\mu g \omega}{2} \sqrt{\frac{2}{\mu g \omega}}$$

$$\boxed{k_R \approx \sqrt{\frac{\mu g \omega}{2}}}$$

Altas frecuencias

$$\omega \gg g/\varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta \approx \frac{2}{g}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}} \qquad \left(\sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon^2}{g^2}+1} \approx \frac{\omega\varepsilon}{g}\right)$$

$$\Rightarrow k_R \approx \frac{\mu \cancel{g} \omega}{\cancel{2}} \, \frac{\cancel{2}}{\cancel{g}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

$$\boxed{k_R \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

FCV.