Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 27: Macsguel

P1. Condensador alternado

Para calcular de una forma más exacta el campo eléctrico dentro de un condensador de placas paralelas circulares (ver Figura 1), en el que se aplica una fuente de voltaje alterna se plantea el siguiente método:

a) Determine $\vec{E}_0(t)$ como valor del campo en un régimen cuasiestático.

b) Conocido $\vec{E}_0(t)$, determine $\vec{B}_1(t)$ inducido.

c) Con $\vec{B}_1(t)$ determine $\vec{E}_2(t)$.

d) Finalmente, determine el valor más exacto como $\vec{E}(t) \approx \vec{E}_0(t) + \vec{E}_2(t)$.

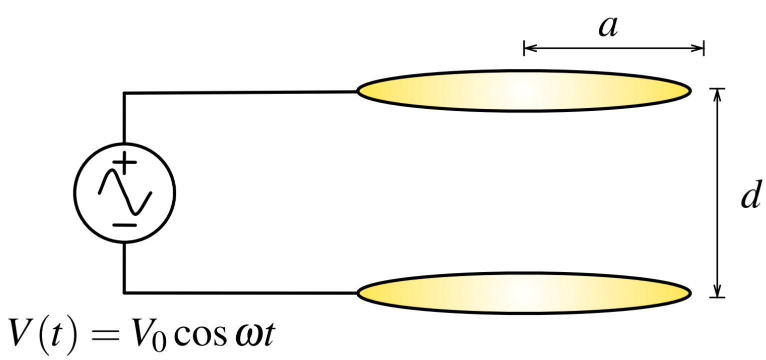


Figura 1: Condensador con voltaje alternado.

P2: Ecuación de Onda

El campo eléctrico de una onda electromagnética que se propaga en el vacío está dado por

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)}(\hat{x}) \tag{1}$$

donde E_0 es una constante real, k es el número de onda y ω es la frecuencia angular.

a) Demuestre que $\vec{E}$ es solución de la ecuación de onda, encontrando una relacion entre k y w.

b) Determine el campo magnético $\vec{B}$ asociado a esta onda electromagnética.

c) Encuentre el vector de Poynting $\vec{S}$ de la onda electromagnética.

Resumen

Ecuaciones de Maxwell-Heaviside

En el vacío, las ecuaciones que describen prácticamente todos los fenómenos electromagnéticos son las siguientes:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{5}$$

Ondas Electromagnéticas

Al tomar el rotor en la ley de Faraday y la ley de Amp'ere-Maxwell y aplicar la siguiente identidad vectorial Al tomar el rotor en la ley de Faraday y la ley de Ampère-Maxwell, y aplicar la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \tag{6}$$

Se llega a que las ecuaciones para $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en el vacío son:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{7}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{8}$$

P_1

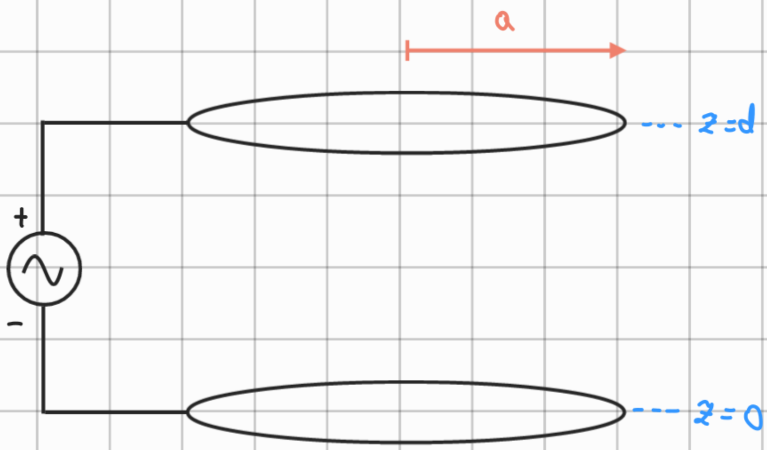
a)

Esta parte la podemos hacer usando la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$$

Como en el espacio entre placas no existe carga libre

$$\nabla^2 V = 0$$



$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \;/\; \int dz$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = A \;/\; \int dz$$

$$\boxed{V(z,t) = Az + B}$$

Sabemos que la diferencia de potencial entre las placas es $V_0 \cos(\omega t)$

$\therefore$

$$V(z=d,t) - V(z=0,t) = V_0 \cos(\omega t)$$

$$Ad + \cancel{B} - \cancel{B} = V_0 \cos(\omega t)$$

$$A = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{d} \Rightarrow V(z,t) = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{d} z + B$$

Recordemos que $-\nabla V = \vec{E}$

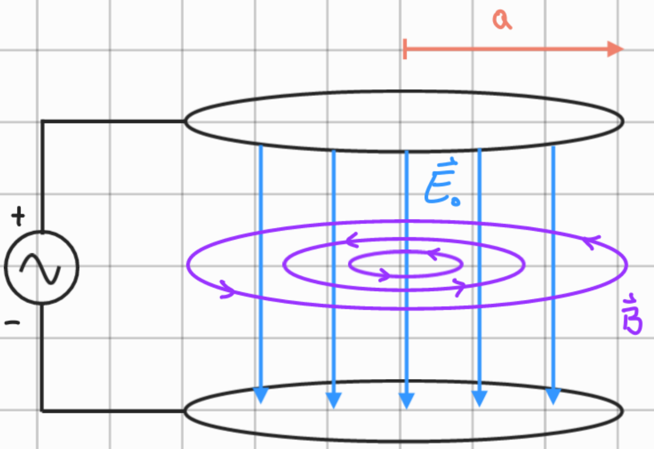
$$-\nabla V = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V_0 \cos(\omega t)}{d} z\right)\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{E}_0(t) = -\frac{V_0 \cos(\omega t)}{d}\hat{z}}$$

b)

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Como en el espacio entre las placas no hay densidad de corriente



$$\underbrace{\nabla\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{*} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\omega V_0}{d}\sin(\omega t)$$

* Notemos que esta expresión es muy similar a la forma diferencial de la ley de Ampère ($\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$), de la cual se desprendía que **B** se envuelve alrededor de la corriente. En ausencia de corriente, pero en presencia de un campo **E** variable en el tiempo, el campo magnético se envolverá alrededor de la variación temporal de **E**, es decir, alrededor de ∂**E**/∂t.

Esto indica que $\vec{B} = B(r)\hat{\varphi}$

Podemos resolver de forma análoga a como hacíamos en el caso de la Ley de Ampère.
Integrando la ecuación de arriba sobre una superficie *S*

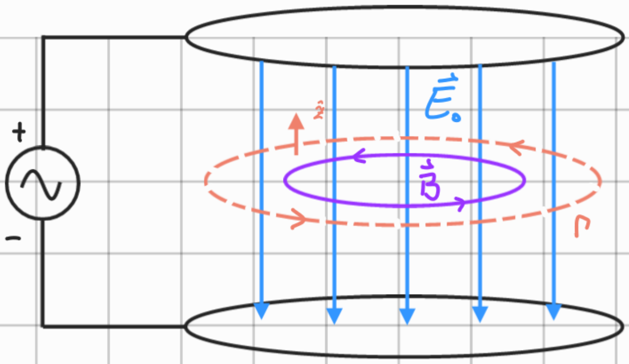
$$\iint_S (\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \mu_0\varepsilon_0\iint_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

Por el Teorema de Stokes, podemos escribir esta ecuación como

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \quad \star$$

Donde *Γ* es el borde de *S*. Ahora resolvamos como en Ampère.

Primero nos damos un camino Γ orientado en sentido antihorario, debido a esta elección para la orientación, la normal de la superficie que encierra este camino apuntará en $\hat{z}$.



Ahora, aplicamos ☆ sobre este camino y su respectiva superficie encerrada y reemplazando las formas conocidas de **B** y **E**

$$\int_0^{2\pi} B(r)\,\hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi}\, r\,d\varphi = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} -\frac{V_0\cos(\omega t)}{d}\,\underbrace{\hat{z}\cdot\hat{z}}_{=1}\,\underbrace{r\,dr}_{=\frac{r^2}{2}}\,\underbrace{d\varphi}_{=2\pi}$$

$$B(r)r\int_0^{2\pi} d\varphi = -\cancel{2}\pi\frac{r^2}{\cancel{2}}\mu_0\varepsilon_0\frac{V_0}{d}\frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(\omega t)\right)$$

$$2\cancel{\pi}\cancel{r}B(r) = \omega\cancel{\pi}\mu_0\varepsilon_0\frac{V_0}{d}r^{\cancel{2}}\sin(\omega t)$$

$$\boxed{\vec{B}_1(r,t) = \frac{\omega\mu_0\varepsilon_0 V_0}{2d}\,r\sin(\omega t)\,\hat{\varphi}}$$

c)

Conocido $\vec{B}_1$, podemos determinar $\vec{E}_2$ usando

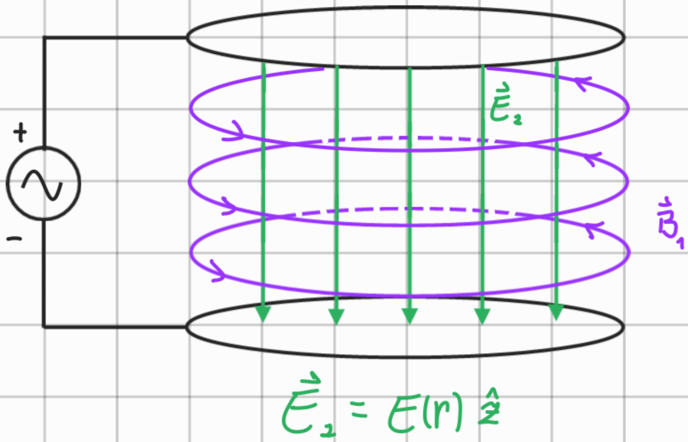
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Nuevamente esta expresión es análoga a la Ley de Ampère, por lo que ahora **E** deberá envolverse alrededor de **B**.

Integrando sobre una superficie S

$$\iint_S \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \xRightarrow{\text{Stokes}} \oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \quad *$$

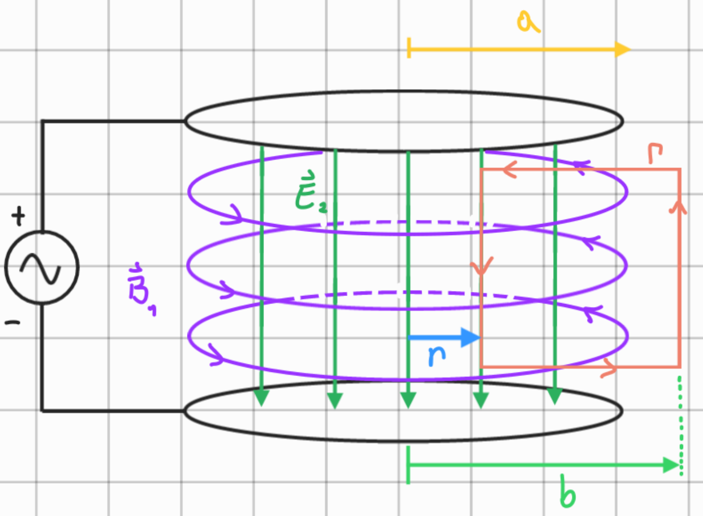
$\vec{B}_1$ y $\vec{E}_2$ se ven de la siguiente forma



Notemos que esta configuración presenta gran parecido con el campo magnético generado por una bobina con corriente que da vueltas, pero en vez de tener corriente, ahora tenemos un campo **B** variante en el tiempo que induce un campo **E**.

De manera similar a como hicimos en la parte anterior, podemos usar $*$ para calcular $\vec{E}_2$

Para ello usaremos un camino rectangular Γ como se ve a la derecha.



Así tendremos que separar la integral del lado izquierdo de $*$ en 4 partes

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^d E(r)\,\underbrace{\hat{z}\cdot(-\hat{z})}_{-1}\,dz + \int_r^b E(r)\,\cancelto{0}{\hat{z}\cdot\hat{r}}\,dr + \int_0^d E(b)\,\underbrace{\hat{z}\cdot\hat{z}}_{1}\,dz + \int_r^b E(r)\,\cancelto{0}{\hat{z}\cdot(-\hat{r})}\,dr$$

$$= -E(r)\int_0^d dz + E(b)\int_0^d dz = -E(r)d + E(b)d\,;$$ Pero en $r=b$ se tiene $\vec{E}=0$

(Se asume que fuera de las placas no hay campo.)

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = -E(r)d$$

Ahora para el lado derecho de $*$ calculamos el flujo de $\vec{B}_2$ sobre la superficie encerrada por Γ

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\int_0^d \int_r^a \frac{\omega\mu_0\varepsilon_0 V_0}{2d}\, r \sin(\omega t)\, \underbrace{\hat{\varphi}\cdot(-\hat{\varphi})}_{=-1}\, dr\, dz}^{=d}$$

$$= \frac{\omega\mu_0\varepsilon_0 V_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sin(\omega t)\int_r^a r\, dr$$

$$= \frac{\omega\mu_0\varepsilon_0 V_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sin(\omega t)\left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 V_0}{4}\left(a^2 - r^2\right)\cos(\omega t)$$

La integral en *r* se hace desde 0 a *a* ya que para *r* > *a* el campo $\mathbf{E}_2$ deberá ser nulo, similar a como ocurre con el campo **B** en una bobina.

$$* \Rightarrow -E(r)d = \frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 V_0}{4}\left(a^2 - r^2\right)\cos(\omega t)$$

$$\vec{E}_2(r) = -\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 V_0}{4d}\left(a^2 - r^2\right)\cos(\omega t)\,\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{E}_2(r) = \frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 V_0}{4d}\left(r^2 - a^2\right)\cos(\omega t)\,\hat{z}}$$

d)

$$\vec{E} \approx \vec{E}_0 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E} \approx -\frac{V_0\cos(\omega t)}{d}\,\hat{z} + \frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 V_0}{4d}\left(r^2 - a^2\right)\cos(\omega t)\,\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{E} \approx \frac{V_0}{d}\left[\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{4}\left(r^2 - a^2\right) - 1\right]\cos(\omega t)\,\hat{z}}$$

P2) De las ecuaciones de maxwell en el vacío en ausencia de cargas y corrientes libres se deduce la ecuacion de onda electromagnetica.

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

con $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$

Apliquemos esta ecuacion al campo electrico de la onda dada en el enunciado.

$$\vec{E}_{(z,t)} = \bar{E}_0 \, e^{i(Kz - wt)} \hat{x} = E_0 \left(\cos(Kz - wt) + i \operatorname{sen}(Kz - wt) \right) \hat{x}$$

Para terminos fisicos solo nos interesara la parte real del campo $\rightarrow E_0 \cos(Kz - wt) \hat{x}$

Sin embargo usaremos la notacion con la exponencial porque nos facilita los calculos.

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}_{(z)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_{(z)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_{(z)}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(E_0 e^{i(Kz - wt)} \hat{x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} E_0 i K e^{i(Kz - wt)} \hat{x}$$

$$= E_0 i^2 K^2 e^{i(Kz - wt)} \hat{x}$$

$$= -E_0 K^2 e^{i(Kz - wt)} \hat{x}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = -E_0 K^2 e^{i(Kz-wt)}\hat{x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{d^2}{\partial t^2} E_0 e^{i(Kz-wt)}\hat{x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} -E_0 i w e^{i(Kz-wt)}\hat{x}$$

$$= E_0 i^2 w^2 e^{i(Kz-wt)}\hat{x}$$

$$= -E_0 i w^2 e^{i(Kz-wt)}\hat{x}$$

$$-E_0 K^2 e^{i(Kz-wt)}\hat{x} = \mu_0 \varepsilon_0 (-E_0 w^2 e^{i(Kz-wt)}\hat{x})$$

$$K^2 = \mu_0 \varepsilon_0 w^2$$

$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = w^2/K^2 = (w/K)^2$$

Si se cumple esta relacion tenemos que el campo E satisface la ecuacion de onda

Veamos que es k/w:

K nos dice cuantos ciclos realiza la onda en una determinada distancia Δz

$$E(z) = E_0 \cos(Kz) \rightsquigarrow K = \frac{ciclos}{\Delta z} \cdot 2\pi$$

w nos dice cuantos ciclos realiza la onda en un determinado periodo de tiempo

$$E(t) = E_0 \cos(wt) \rightsquigarrow w = \frac{ciclos}{\Delta t} \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{w}{K} = \frac{ciclos}{\Delta t} \cdot 2\pi \cdot \frac{\Delta z}{ciclos} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = v$$

rapidez de propagación

con $\frac{w}{K} = v \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = \left(\frac{w}{K}\right)^2 = v^2$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$ $\quad$ c : velocidad de la luz

$\Rightarrow w = c \cdot K$ $\quad$ o $\quad K = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, w$

b) Notemos que nuestro campo E apunta en direccion x, pero se propaga por el espacio en z. A la direccion de propagacion la llamaremos k y la encontramos porque es la cordenada que en donde el campo varia.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \underbrace{\rho = 0}_{\text{ausencia de carga}}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{(K)} \Rightarrow \frac{\partial E_k(K)}{\partial K} \hat{K} = 0$$

Como sabemos que E no es constante a travez de k solo nos queda concluir que no existe campo en la componente k. En otras palabras el campo de una onda no apunta en la direccion de propagacion.

$$\boxed{\vec{E} \cdot \hat{K} = 0}$$

Por otro lado obtenemos una relacion entre E y B que cumplen la ecuacion de onda.

$\vec{B}$ cumple ec de onda $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} \cdot \hat{K} = 0}$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{k}{w}\hat{k} \times \vec{E}} = \frac{1}{v}\hat{k} \times \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{w}{k}\vec{B} \times \hat{k}} = v\vec{B} \times \hat{k}$$

usaremos $\vec{B} = \frac{1}{v}\hat{k} \times \vec{E}$ para obtener el campo $\vec{B}$

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, \hat{z} \times E_0 e^{i(kz-wt)}\hat{x}$$

$$= \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, E_0 e^{i(kz-wt)}\, \hat{z} \times \hat{x}$$

$$= \underbrace{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, E_0}\, e^{i(kz-wt)}\, \hat{y}$$

$$= B_0 e^{i(kz-wt)}\, \hat{y}$$

Notemos que tanto el E como B son perpendiculares a la direccion de propagacion y perpendiculares entre ellos.

c)

El vector de Poyting mide la cantidad de energia transportada por unidad de tiempo y de area por la onda electromagnetica;

Con los valores reales de Ey B

$$\vec{S}_{(\vec{r},t)} = \vec{E}_{(\vec{r},t)} \times \vec{H}_{(\vec{r},t)}$$

$$\vec{S}_{(\vec{r},t)} = Re\{E_0 e^{i(kz-wt)} \hat{x}\} \times Re\{\frac{B_0}{\mu_0} e^{i(kz-wt)}\}$$

$$= E_0 \cos(kz-wt)\hat{x} \times \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\, E_0 \cos(kz-wt)\hat{y}$$

$$\vec{S}_{(z,t)} = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\, E_0^2 \cos^2(kz-wt)\,\hat{z}$$

El vector de Poytting apunta siempre en la direccion de propagacion.