P1 *Un capacitor de tres cilindros* cambié la asignación de puntaje. La parte a) son 3.0 ptos, mientras que la parte b) son 2.0 puntos

a) Sean $\lambda_1$ y $\lambda_3$ las cargas finales por unidad de longitud en los cascarones cilíndricos interno y externo, respectivamente. El campo hacia afuera entre los cascarones interno y medio se debe únicamente al cascarón interno, y es igual a $\lambda_1/r$ (ignorando el factor $1/2\pi\epsilon_0$ ya que se cancelará). Integrando esto se obtiene la diferencia de potencial entre los cascarones interno y medio como $\lambda_1 \ln(2R/R) = \lambda_1 \ln 2$, con el cascarón interno a un potencial mayor.

Si los cascarones interno y externo están al mismo potencial, entonces $\lambda_1 \ln 2$ también debe ser la diferencia de potencial entre los cascarones externo y medio, con el cascarón externo a un potencial mayor. Por lo tanto, el campo entre los cascarones medio y externo debe apuntar hacia adentro. Este campo se debe a los dos cascarones internos. Las cargas por unidad de longitud en estos cascarones son $\lambda_1$ y $-\lambda$, por lo que el campo apunta hacia adentro con magnitud $(\lambda - \lambda_1)/r$. La diferencia de potencial entre los dos cascarones externos es entonces $(\lambda - \lambda_1)\ln(3R/2R) = (\lambda - \lambda_1)\ln(3/2)$, con el cascarón externo a un potencial mayor.

1.5 ptos por planteamiento correcto

Igualando las diferencias de potencial entre los cascarones interno-medio y externo-medio se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \ln 2 &= (\lambda - \lambda_1)\ln(3/2) \\ \Longrightarrow \lambda_1\big(\ln 2 + \ln(3/2)\big) &= \lambda \ln(3/2) \\ \Longrightarrow \lambda_1 &= \lambda \frac{\ln(3/2)}{\ln 3}. \end{aligned}$$

0.5 ptos por resultado correcto para $\lambda_1$

Y tenemos $\lambda_3 = \lambda - \lambda_1$ para que la carga total por unidad de longitud en los cascarones interno y externo sea igual a $\lambda$. 1.0 ptos por obtener $\lambda_3$

b) La diferencia de potencial entre los cascarones interno/externo y el cascarón medio es $\phi = \lambda_1(\ln 2)/2\pi\epsilon_0$ (incluyendo nuevamente el factor $1/2\pi\epsilon_0$). Pero $\lambda_1 = \lambda \ln(3/2)/\ln 3$, por lo que podemos resolver para $\lambda$ en términos de $\phi$. Obtenemos:

$$\lambda = \phi \cdot 2\pi\epsilon_0 \left(\frac{\ln 3/\ln 2}{\ln(3/2)}\right).$$

1.0 ptos por planteamiento Dado que $\lambda$ es la carga por unidad de longitud, vemos que la capacitancia por unidad de longitud es $2\pi\epsilon_0(\ln 3/\ln 2)/\ln(3/2)$. 1.0 ptos por resultado correcto

c) Nótese que $\lambda_3$ no apareció en ningún momento en los cálculos de la parte (a). Por lo tanto, puede tomar cualquier valor, y las diferencias de potencial seguirán siendo iguales, siempre que $\lambda\frac{\ln(3/2)}{\ln 3}$. Así, si añadimos una carga por unidad de longitud $\lambda_{\text{nueva}}$ al cascarón externo, simplemente permanecerá allí, distribuida uniformemente en la superficie exterior del cascarón. Esto aumentará el potencial en todas partes en el interior por la misma cantidad (que depende de dónde se elija el punto $\phi = 0$). Pero como este cambio es uniforme en el interior, todas las diferencias se mantienen iguales. Por lo tanto, en realidad no importa que la batería haya sido desconectada. 1.0 pto

P2 *Una descarga con dos capacitores* (si les fue muy mal en esta pregunta, podemos modificar la asignación de puntajes)

(a) Sean $Q_1$ y $Q_2$ las cargas en las (placas izquierdas de los) capacitores izquierdo y derecho. Y sean $I_1$, $I_2$ las corrientes de las ramas izquierda y derecha, con el sentido antihorario positivo. Sea $I_3$ la corriente de la rama central definida hacia abajo. La primera ley de Kirchoff nos dice que $I_3 = I_2 - I_1$. La segunda ley de Kirchoff establece que

$$\frac{Q_1}{C} - I_1 R = 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{Q_2}{C} - I_2 R = 0.$$

1.0 pto

Pero $I_1 = -\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t}$ e $I_2 = -\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t}$, así que tenemos

$$\frac{Q_1}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{Q_2}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t} = 0.$$

0.5 pto

Estas dos ecuaciones están desacopladas (es decir, cada ecuación involucra sólo una de las $Q$), así que podemos resolver $Q_1$ y $Q_2$ por separado. Separando variables e integrando cada ecuación (o simplemente dándonos cuenta de que tienen soluciones exponenciales), encontramos que tanto $Q_1$ como $Q_2$ son proporcionales a $e^{-t/RC}$. Dadas las cargas iniciales de $Q_0$ y 0, vemos que las cargas como funciones del tiempo son:

$$Q_1(t) = Q_0 e^{-t/RC}, \qquad \text{y} \qquad Q_2(t) = 0.$$

1.0 pto

El capacitor izquierdo simplemente se descarga enviando corriente alrededor del lazo izquierdo. El lazo derecho efectivamente no está presente. Básicamente, la corriente no tiene razón para pasar por una segunda resistencia, cuando puede pasar sólo por una resistencia en su camino hacia el otro lado del capacitor izquierdo. En la unión en la parte inferior del circuito, el camino con resistencia $R$ alrededor del lazo derecho tiene infinitamente más resistencia que el camino con resistencia cero que va directamente hacia arriba por el medio del circuito. 0.5 pto

(b) Dado que $I_3 = I_2 - I_1$, las dos ecuaciones circuitales son ahora

$$\frac{Q_1}{C} - I_1 R - (I_1 - I_2)R = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{Q_2}{C} - I_2 R - (I_2 - I_1)R = 0.$$

1.0 pto

Estas ecuaciones están acopladas; ambas involucran tanto $Q_1$ como $Q_2$. Siguiendo el hint, si las sumamos, obtenemos

$$\frac{(Q_1 + Q_2)}{C} - (I_1 + I_2)R = 0 \Longrightarrow \frac{(Q_1 + Q_2)}{C} + R\frac{\mathrm{d}(Q_1 + Q_2)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Esta ecuación involucra únicamente la combinación $Q_1 + Q_2$ de las cargas. De forma similar, si tomamos la diferencia, obtenemos

$$\frac{(Q_1 - Q_2)}{C} - 3(I_1 - I_2)R = 0 \Longrightarrow \frac{(Q_1 - Q_2)}{C} + 3R\frac{\mathrm{d}(Q_1 - Q_2)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

1.0 pto

Ambas ecuaciones tienen soluciones de tipo exponencial. La solución de la primera ecuación es $Q_1 + Q_2 = Ae^{-t/RC}$, donde $A$ es una constante determinada por las condiciones iniciales.La solución de la segunda es $Q_1 - Q_2 = Be^{-t/3RC}$, donde $B$ es otra constante. Habiendo resuelto para $Q_1 + Q_2$ y $Q_1 - Q_2$, podemos tomar la suma y la diferencia de estos resultados para obtener

$$Q_1(t) = ae^{-t/RC} + be^{-t/3RC}, \qquad Q_2(t) = ae^{-t/RC} - be^{-t/3RC},$$

donde $a = A/2$ y $b = B/2$. La condición inicial $Q_2(0) = 0$ rápidamente nos da $a = b$. Y luego, la condición inicial $Q_1(0) = Q_0$ nos da $a + b = Q_0/2$. Por lo tanto, las cargas deseadas como funciones del tiempo son

$$Q_1(t) = \frac{Q_0}{2}\left(e^{-t/RC} + e^{-t/3RC}\right), \qquad Q_2(t) = \frac{Q_0}{2}\left(e^{-t/RC} - e^{-t/3RC}\right).$$

Nótese que $Q_1(t)$ decrece monótonamente con el tiempo, pero $Q_2(t)$ alcanza un valor negativo máximo en algún instante de tiempo finito (es cero tanto en $t = 0$ como en $t = \infty$).

1.0 pto

P3 *Fluido en rotación*

a) Trabajaremos en coordenadas cilíndricas. Dadas la simetría del problema, supondremos un campo magnético de la forma $\vec{B}(r) = B(r)\hat{k}$. 0.5 ptos.

Se proponen dos métodos:

- Método 1: Consideremos una superficie $S$ rectangular vertical de altura $h$ que se extiende en la dirección radial desde $r \geq R_2$ hasta $r \to \infty$. La normal de dicha superficie es $\hat{n} = \hat{\phi}$, y el sentido de su contorno $\partial S$ se define según la regla de la mano derecha con respecto a $\hat{n}$ (es decir, en sentido antihorario, se el rectángulo se dibuja al lado derecho del sistema en la figura). La integral de camino sobre $\partial S$ da

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B(\infty) - B(r))h$$

Los segmentos horizontales $\partial S$ no contribuyen ya que el campo es vertical. Como ninguna corriente atraviesa esta superficie, La Ley de Ampére establece que $\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$, por lo que $B(r \geq R_2) = B(\infty)$. Dado que estamos asumiento $B(\infty) = 0$, luego, $B(r \geq R_2) = 0$. Es decir, el campo es constante nulo en toda la región exterior. En particular $B(r = R_2) = 0$.

1.0 pto por planteamiento y deducir correctamente el campo en la región exterior.

Ahora tomaremos un rectángulo que se extiende de $R_1 < r < R_2$ hasta $R_2$. La Ley de Ampere establece que

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

.

Aquí, la corriente es producida por las cargas del fluido en rotación de manera que $\vec{J} = \rho_e \vec{v}$. Dado que $d\vec{S} = dr\, dz\, \hat{\phi}$, tenemos

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \rho_e \omega \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} h \int_r^{R_2} \left( r - \frac{R_2^2}{r} \right) dr$$

Luego, el campo magnético en la región donde se encuentra el fluido es

$$\vec{B}(R_1 \leq r \leq R_2) = \mu_0 \rho_e \omega \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} \left[ \frac{R_2^2 - r^2}{2} + R_2^2 \ln \frac{r}{R_2} \right]$$

.

1.0 ptos por planteamiento y 0.5 ptos. por obtener correctamente el campo en la región intermedia.

Finalmente, para la región $r < R_1$ consideramos una rectángulo que se extiende de $r$ a $R_1$. Al no ser atravesado por corriente se concluye que el campo dentro del cilindro interior es constante y vale

$$\vec{B}(R_1 \leq r \leq R_2) = \mu_0 \rho_e \omega \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} \left[ \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} + R_2^2 \ln \frac{R_1}{R_2} \right]$$

1.0 pto por planteamiento y deducir correctamente el campo en la región interior.

- Método 2: Este método consiste son suponer conocido el valor del campo en el eje de simetría $B_{eje} = B(0)$, y calcular el campo desde el ïnterior hacia afuera". Se obtienen expresiones de campo magnético similares a las del método 1 pero que dependen de $B_{eje}$. Finalmente, el valor de $B_{eje}$ se obtiene imponiendo que $B(\infty) = 0$. Asignación de puntajes similar al método anterior. Restar 1.0 ptos. si no se calcula el valor $B_{eje}$.

b) Recordando lo visto en clases, el campo al interior de una espira de $n$ vueltas por unidad de largo es $\vec{B}_{espira} = \mu_0 n I \hat{k}$, para una corriente $I$ que circula en dirección $\hat{\phi}$. Por lo tanto, para contrarrestar el campo en el cilindro con una bobina con corriente $I$, se necesitan

$$n = \frac{\rho_e}{I} \omega \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} \left[ \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} + R_2^2 \ln \frac{R_1}{R_2} \right]$$

vueltas, con la corriente girando en sentido $-\hat{\phi}$. 2.0 ptos.