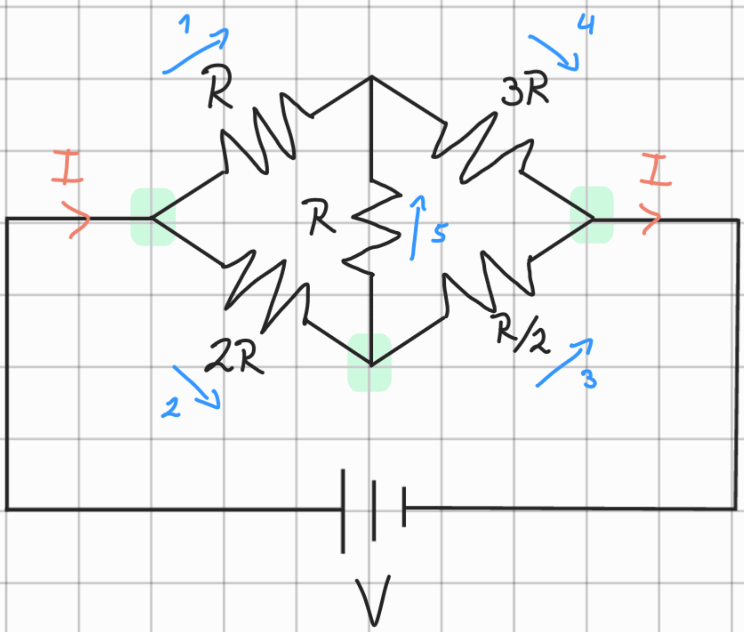
P1



Aplicando la 1era Ley de Kirchoff en los nodos destacados obtenemos que:

$$I - I_1 - I_2 = 0 \qquad I_2 - I_3 - I_5 = 0$$

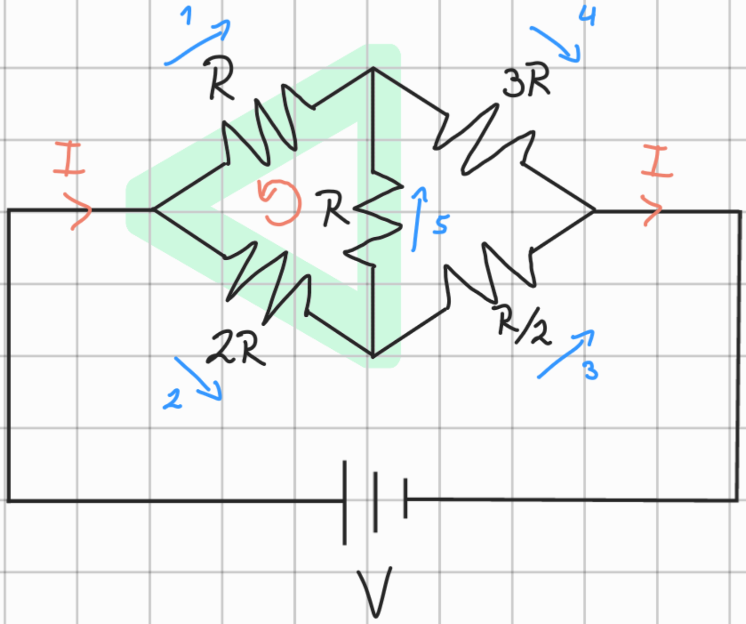
$$I_3 + I_4 - I = 0$$

Para aplicar la 2da Ley de Kirchoff necesitamos elegir ciclos cerrados dentro del circuito. Usaremos un total de 3 ciclos distintos para obtener 3 ecuaciones.

El primer ciclo es:

* Nota: Por Ley de Ohm:

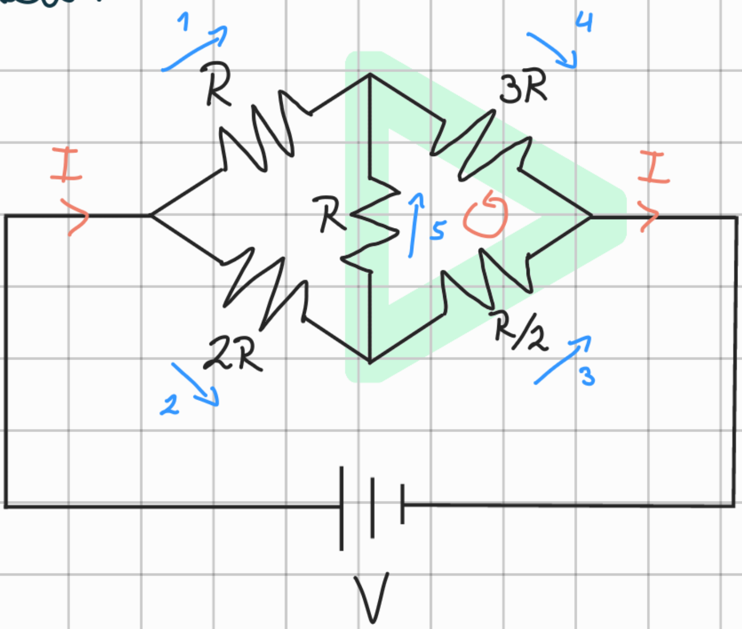
$$V_i = I_i R_i$$



$$2\cancel{R}I_2 + \cancel{R}I_5 - \cancel{R}I_1 = 0$$

$$2I_2 + I_5 - I_1 = 0$$

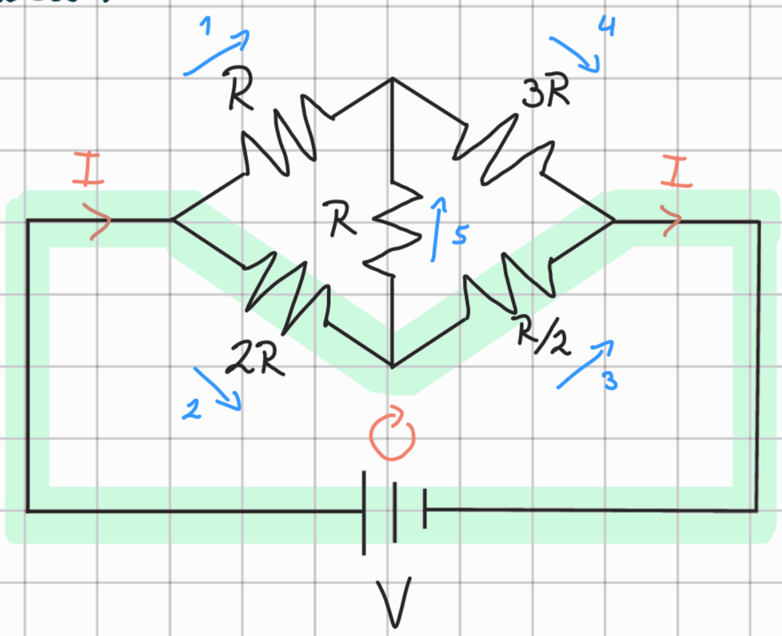
El segundo ciclo:



$$\frac{\cancel{R}}{2}I_3 - 3\cancel{R}I_4 - \cancel{R}I_5 = 0$$

$$\frac{1}{2}I_3 - 3I_4 - I_5 = 0$$

Y el tercer ciclo:



$$V - 2RI_2 - \frac{R}{2}I_3 = 0$$

$$2I_2 + \frac{1}{2}I_3 = V/R$$

Esto lo podemos escribir como un sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \frac{V}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $I = \frac{34}{43}\frac{V}{R}$
- $I_1 = \frac{19}{43}\frac{V}{R}$
- $I_2 = \frac{15}{43}\frac{V}{R}$
- $I_3 = \frac{26}{43}\frac{V}{R}$
- $I_4 = \frac{8}{43}\frac{V}{R}$
- $I_5 = \frac{-11}{43}\frac{V}{R}$

P2

Que el interruptor del circuito se haya encontrado abierto durante un tiempo muy largo significa que ya no existe corriente fluyendo por este. Si había corriente en un principio, toda esta ya fue "disipada" por las resistencias.

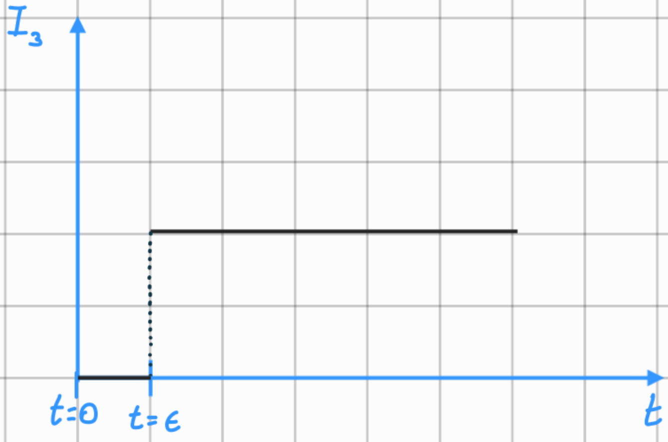
a)

Dado que la corriente en el circuito justo antes de ser conectado es 0, la corriente que pase por la inductancia al instante después de haber sido cerrado seguirá siendo 0. Esto es consecuencia de que la fem producida por una inductancia tiene la siguiente forma

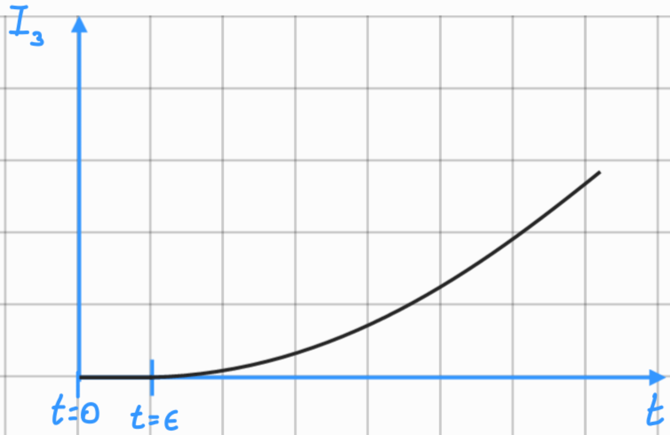
$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

Si la corriente en la inductancia sufriera un cambio abrupto al momento de ser conectada, esto implicaría que la derivada de arriba diverge (se hace infinita), lo que implica una fem (voltaje) "infinita", y esto es algo que no tiene sentido **físico**, pues conlleva cosas como fuerzas y energía infinitas. Gráficamente tendríamos esto

ϵ infinitesimalmente pequeño.



Salto discontinuo de la corriente, esto es algo que carece de sentido físico, por lo que no puede ocurrir.

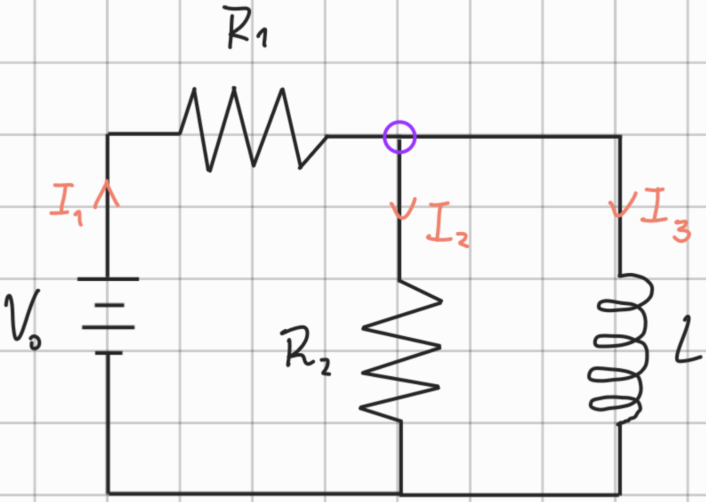


La corriente varía de forma continua y "suave" (diferenciable). Esto sí posee sentido físico.

De esta manera se puede concluir que

$$\boxed{I_3 = 0}$$

Y aplicando LCK en el nodo del dibujo

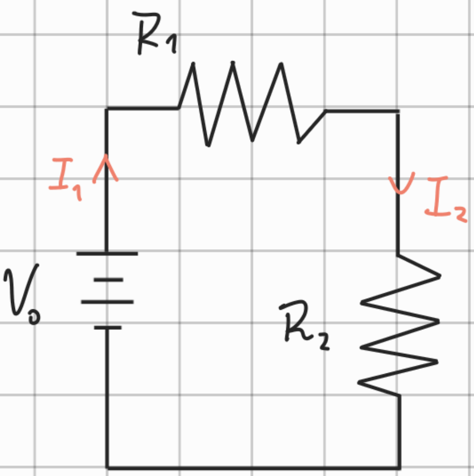


$$I_1 = I_2 + I_3$$

Pero $I_3 = 0$

$$\therefore I_1 = I_2$$

Y como en el instante inicial I_3 es 0, esto es efectivamente igual a que si el lado derecho del circuito no existiese, de modo que tendríamos

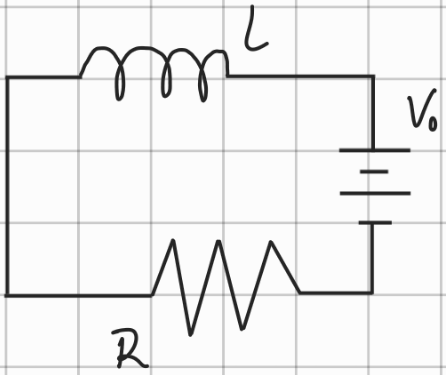


De aquí se puede ver que la resistencia equivalente del circuito es $R_1 + R_2$, y aplicando la Ley de Ohm se llega a

$$\boxed{I_1 = I_2 = \frac{V_0}{R_1 + R_2}}$$

b)

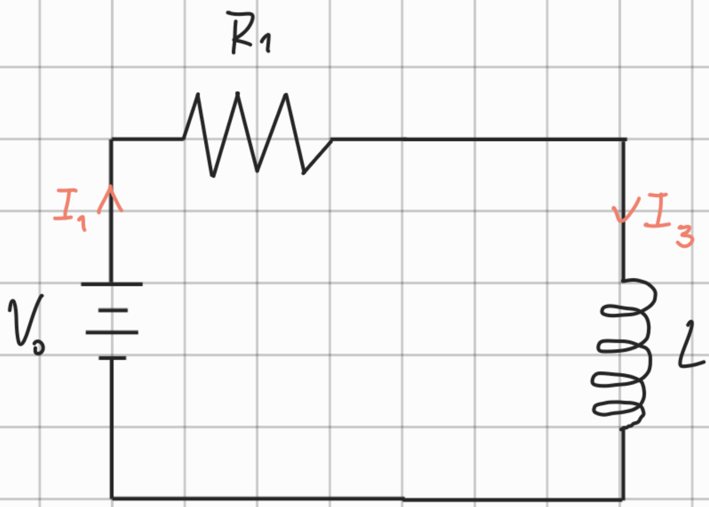
Cuando una inductancia ha estado conectada por mucho tiempo, sus efectos dejan de ser notorios y esta se vuelve indistinguible de un cable sin resistencia, o sea, un cortocircuito.
Si recuerdan de cátedra, un circuito RL como el del dibujo tiene la siguiente solución



$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) + I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Con I_0 la corriente inicial.

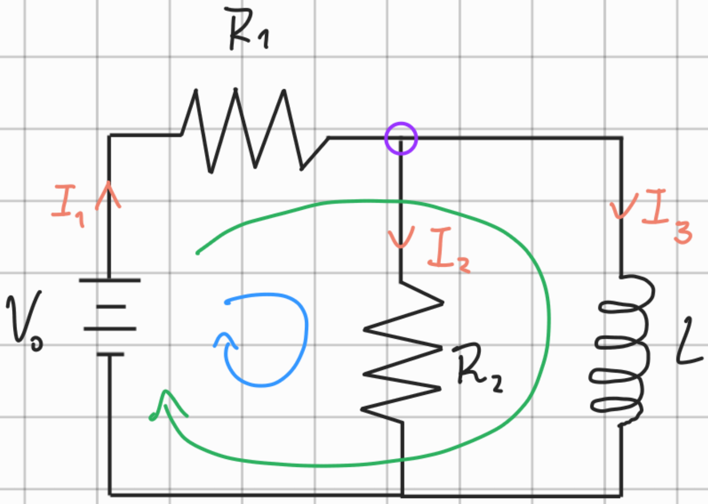
Debido a los términos exponenciales, se puede ver que para un *t* muy grande los efectos de la inductancia desaparecen y la corriente en el circuito fluye como si esta no existiera.
Para nuestro circuito tendremos el mismo comportamiento (no exactamente igual, pero cualitativamente es indistinto), esto significa que para un tiempo grande, la inductancia actuará como como un cable sin resistencia, y dado que la corriente siempre elige el camino de menor resistencia, toda esta fluirá por la inductancia, ignorando por completo la resistencia R_2. De esta forma, nuestro circuito será solo esto



$$\therefore \boxed{I_2 = 0}$$

$$\boxed{I_1 = I_3 = \frac{V_0}{R}}$$

Si no me creen, matraqueemos...
Por simplicidad asumiremos que $R_1 = R_2 = R$ (esto es solo para simplificar el álgebra)



$$LCK: \quad I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

$$LVK: \quad V_0 = I_1 R + I_2 R \quad (2)$$

$$V_0 - L\dot{I}_3 = I_1 R \quad (3)$$

(1) en (2): $V_0 = I_2 R + I_3 R + I_2 R$

$$V_0 = 2 I_2 R + I_3 R \Rightarrow I_2 = \frac{V_0 - I_3 R}{2R} \quad (4)$$

(1) en (3): $V_0 - L\dot{I}_3 = I_2 R + I_3 R$

$$(4) \Rightarrow \quad V_0 - L\dot{I}_3 = \frac{V_0 - I_3 R}{2\cancel{R}} \cancel{R} + I_3 R$$

$$V_0 - L\dot{I}_3 = \frac{V_0}{2} - \frac{I_3 R}{2} + I_3 R$$

$$V_0 - \frac{V_0}{2} - L\dot{I}_3 = I_3 R - \frac{I_3 R}{2}$$

$$\frac{V_0}{2} - L\dot{I}_3 = \frac{R}{2} I_3$$

$$\dot{I}_3 + \frac{R}{2L} I_3 = \frac{V_0}{2L}$$

Buscamos solución particular y homogénea

$$\dot{I}_3^{(h)} + \frac{R}{2L} I_3^{(h)} = 0$$

Ya hemos resuelto esta EDO antes y sabemos que la solución es

$$I_3^{(h)}(t) = K e^{-\frac{R}{L}t}$$

Para la solución particular nos sirve tomar $I_3^{(p)} = \frac{V_0}{R}$

Pueden verificar que esto funciona reemplazando en la EDO.

$$\therefore \quad I_3(t) = K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R}$$

Imponemos condición inicial

$$I_3(t=0) = 0 = K + \frac{V_0}{R} \Rightarrow \quad K = \frac{-V_0}{R}$$

$$\therefore \quad \boxed{I_3(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

Para $t=0$

$$I_3(0) = 0 \checkmark \Rightarrow I_1 = I_2 \checkmark$$

$$(2) \Rightarrow \quad V_0 = 2IR \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{V_0}{2R} \checkmark\checkmark$$

(visto xd)

Recuperamos el resultado anterior.

$$I_3(t \to \infty) = \frac{V_0}{R} \checkmark$$

$$(4) \Rightarrow I_2 = \frac{V_0 - \frac{V_0}{R}R}{2R} = 0 \checkmark \underset{(1)}{\Rightarrow} I_1 = I_3 = \frac{V_0}{R} \checkmark\checkmark$$

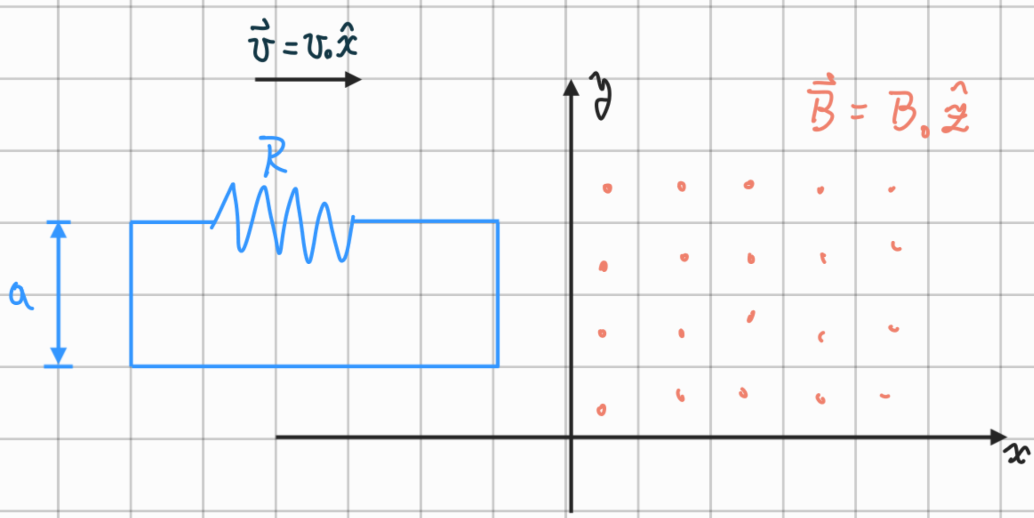
Volvemos a recuperar los resultados previos.

P_3

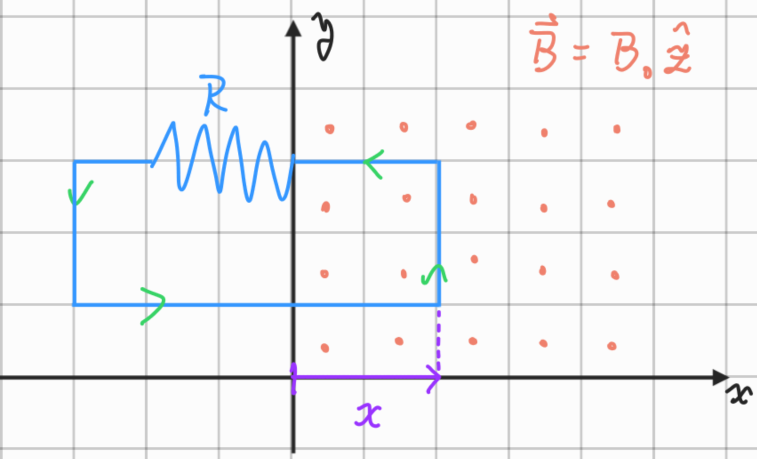
En este problema dado que el carrito se mueve hacia la derecha, el flujo de campo magnético que atraviesa su superficie cambia, esto provoca que en el carrito se induzca una corriente (ley de Faraday-Lenz); pero ahora esta corriente se encuentra en un campo magnético externo, por lo que el circuito experimentará una fuerza (fuerza de Lorentz). Finalmente podremos calcular la velocidad del carrito usando la segunda ley de Newton **F** = ma.

a)

Inicialmente tenemos



Luego el carrito entra en la zona de campo magnético

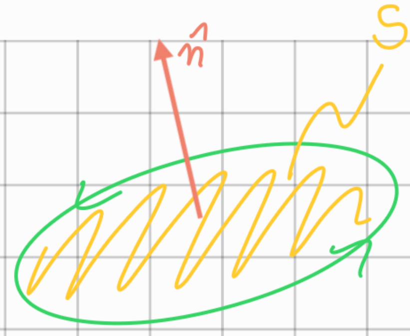


Usamos la variable *x* para describir la distancia que la parte delantera del carro ha penetrado en la zona de campo magnético. Por otro lado, orientamos el circuito en sentido anti-horario (flechas verdes), de modo que la normal a su superficie apunta en $\hat{z}$.
De esta manera, flujo de campo magnético se calcula como sigue

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_0^a\int_0^x B_0\hat{z}\cdot\hat{z}\,dx\,dy = B_0\,a\,x(t)$$

Como el carro se mueve, *x* depende del tiempo.

Por Faraday-Lenz



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 a \dot{x}$$

y ley de Ohm (la fem actúa como voltaje)

$$\mathcal{E} = V \Rightarrow IR = -B_0 a \dot{x}$$

$$I = \frac{-B_0 a}{R} \dot{x}$$

Teniendo la corriente, podemos calcular la fuerza de Lorentz que experimenta el circuito

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Notemos que las fuerzas que sienten los cables horizontales superior e inferior son de igual magnitud pero sentido contrario, de modo que la fuerza **vertical** es nula; así, el único pedazo del circuito que siente una fuerza es el cable vertical delantero (el cable vertical trasero no entra nunca en el campo porque el carro es muy largo, esto de acuerdo al enunciado, por lo que no siente una fuerza). De esta forma solo es necesario calcular la fuerza del cable delantero

$$\vec{F} = \int_0^a \frac{-B_0 a}{R} \dot{x} \, \hat{z} dz \times B_0 \hat{y}$$

$$\vec{F} = \frac{-B_0^2 a^2}{R} \dot{x} \, \hat{x}$$

Aplicando Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$-\frac{B_0^2 a^2}{R} \dot{x} \, \hat{x} = m \ddot{x} \, \hat{x} \quad \Big/ \cdot \hat{x}$$

$$-\frac{B_0^2 a^2}{R} v_x = m\dot{v}; \qquad \dot{x} \equiv v_x$$

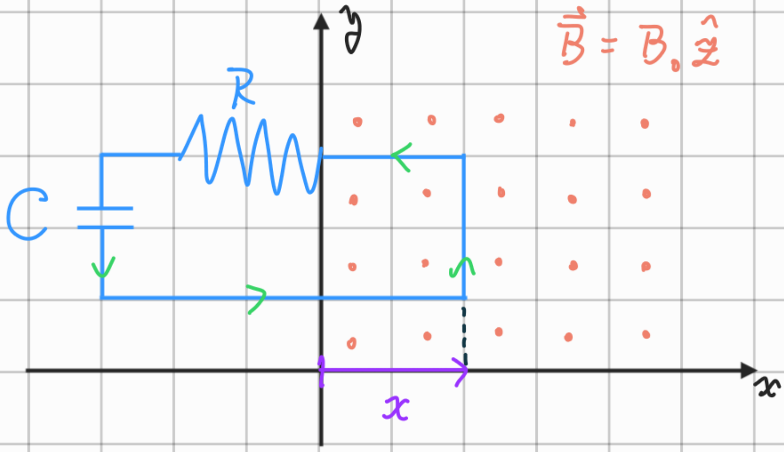
$$\dot{v}_x = \frac{-B_0^2 a^2}{mR} v_x \Rightarrow v_x(t) = K e^{\frac{-B_0^2 a^2}{mR} t}$$

E imponiendo condición inicial

$$v_x(t=0) = v_0 = K$$

$$\boxed{v_x(t) = v_0 e^{\frac{-B_0^2 a^2}{mR} t}}$$

b)



Aquí la fem se calcula de forma completamente análoga a la parte anterior, por lo que tenemos

$$\mathcal{E} = -B_0 a \dot{x}$$

Pero ahora no podemos llegar e igualar la fem a *I*R*, ya que además está el voltaje de la capacitancia, por lo que debemos usar la Ley de Kirchoff para el Voltaje (LCK)

$$V_c + V_R - \mathcal{E} = 0$$

- $V_c = \frac{Q}{C}$: voltaje de una capacitancia
- $V_R = IR$: Ohm.
- $v_x = \dot{x}$

$$\frac{Q}{C} + IR + B_0 a v_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} + B_0 a \dot{x} = 0 \quad ; \qquad I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{Q}{C} + R\dot{Q} + B_0 a v_x = 0 \quad (2)$$

Veamos la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = \int_0^a I\,\hat{y}\,dy \times B_0 \hat{z} = I B_0 a\,\hat{x}$$

Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$I B_0 a = m \dot{v}_x$$

$$\dot{v}_x = \frac{I B_0 a}{m} \Rightarrow \boxed{\dot{v}_x = \frac{B_0 a}{m}\dot{Q}} \quad (3) \qquad \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = I$$

Derivamos (2)

$$\frac{\dot{Q}}{C} + R\ddot{Q} + B_0 a \dot{v}_x \quad (4)$$

Reemplazando (3) en (4)

$$\frac{\dot{Q}}{C} + R\ddot{Q} + \frac{B_0^2 a^2}{m}\dot{Q} = 0$$

$$\ddot{Q} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{B_0^2 a^2}{mR}\right)\dot{Q} = 0$$

Definimos $\frac{1}{\tau} \equiv \left(\frac{1}{RC} + \frac{B_0^2 a^2}{mR}\right)$

$\Rightarrow \dot{I} = -\frac{1}{\tau} I;$ $\dot{Q} = I$

$\Rightarrow I(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}}$

Condición inicial

Ecuación (1)

$$\frac{Q}{C} + IR + B_0 a v_x = 0$$

En t = 0: $Q = 0$ y $v_x = v_0$ (enunciado)

$\downarrow$

Condensador descargado

$$\Rightarrow I(t=0)R + B_0 a v_0 = 0$$

$$I(t=0) = \frac{-B_0 a v_0}{R}$$

$$\therefore \boxed{I(t) = \frac{-B_0 a v_0}{R} e^{-t/\tau}} \quad (5) \qquad I = \dot{Q}$$

Reemplazando (5) en (4)

$$\dot{v}_x = \frac{-B_0^2 a^2}{mR} v_0 e^{-t/\tau} \quad \Big/ \int dt$$

$$v_x(t) = \frac{B_0^2 a^2 \tau}{mR} v_0 e^{-t/\tau} + A$$

Imponiendo condición inicial

$$v(t=0) = v_0 = \frac{B_0^2 a^2 \tau}{mR} v_0 + A$$

$$A = v_0 - \frac{B_0^2 a^2 \tau}{mR} v_0 = \left(1 - \frac{B_0^2 a^2 \tau}{mR}\right) v_0$$

$\therefore$

$$\boxed{v(t) = \frac{B_0^2 a^2 \tau}{mR} v_0 e^{-t/\tau} + \left(1 - \frac{B_0^2 a^2 \tau}{mR}\right) v_0}$$

Integrando (5)

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{B_0 a}{R} v_0 e^{-t/\tau} \Big/ \int dt$$

$$Q(t) = \frac{B_0 a \tau}{R} v_0 e^{-t/\tau} + D$$

Condición inicial

$$Q(t=0) = 0 = \frac{B_0 a v_0}{R}\tau + D \Rightarrow D = -\frac{B_0 a v_0}{R}\tau$$

$$\Rightarrow Q(t) = \frac{B_0 a v_0}{R}\tau e^{-t/\tau} - \frac{B_0 a v_0}{R}\tau$$

$$\boxed{Q(t) = \left(e^{-t/\tau} - 1\right) \frac{B_0 a \tau}{R} v_0}$$