Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 25: Preparación C3

P1. Condiciones de Borde
A partir de las leyes de maxwell derive las condiciones de Borde.

P2. Espiras Mutuas
Considere dos espiras conductoras centradas en el mismo eje, coplanares, de radios a y b con $a \gg b$.

- Calcule la inductancia mutua en los siguientes casos:

  a Ambas están en el plano $z = 0$, una concéntrica a la otra.

  b Las espiras están separadas por una distancia d a lo largo del eje z.

  c Considere ahora el caso anterior, pero suponiendo que entre los planos que contienen a las espiras se forma un ángulo θ.

- Para el caso (b) considere que existe una corriente $I(t)$ por la espira de radio b. Encuetre la corriente en la esprira de radio a si esta tiene una resistencia equivalente R.

- Para el caso (c) cacule el torque que experimentara la espira de radio b si las espriras mantienen las corrientes encontradas en el inciso anterior.

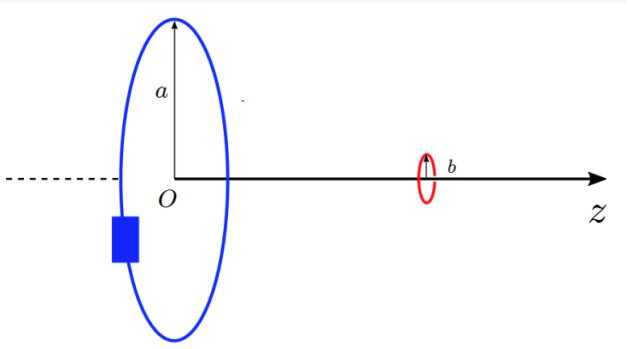


Figura 1: Espiras en caso (b)

P3. Energía Magnetica

Considere un toroide como el que se muestra en la figura, cuyos radios internos y externos son a y b, respectivamente. Tiene alto h y un numero de vueltas N. Considere que la corriente que corre por el cable es I.

(a) Calcule la energía magnética almacenada en el toroide.

(b) Utilizando este resultado, calcule el coeficiente de autoinducción L.

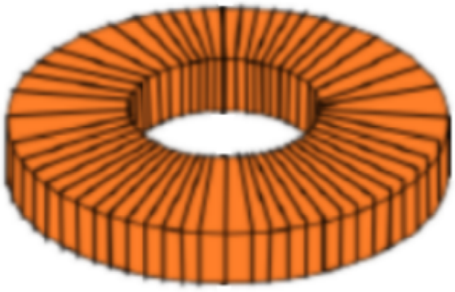


Figura 2: Toroide

Resumen

Inductancia Mutua

Una corriente variable I_1 en un circuito 1 induce una fem variable E_2 en otro circuito 2, esa fem viene dada por:

$$E_2 = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}, \qquad \Phi_2 = M_{21}I_1$$

Análogamente, una corriente variable I_2 en el circuito 2 induce una fem E_1 en el circuito 1:

$$E_1 = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}, \qquad \Phi_1 = M_{12}I_2$$

Donde M_{12} y M_{21} se denominan la **inductancia mutua** entre ambos circuitos. Se cumple que, independientemente de la geometría del sistema:

$$M_{21} = M_{12} = M$$

Autoinductancia

De forma similar al caso anterior, un circuito puede inducirse a sí mismo cuando tiene una corriente variable. La fem autoinducida en ese caso es:

$$E = -L\frac{dI}{dt}, \qquad \Phi = LI$$

Donde L se denomina la **autoinductancia** o simplemente inductancia del circuito.

Energía Magnética

La densidad de energía magnética en un medio material se expresa como:

$$u_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

La energía magnética total contenida en un volumen V se obtiene mediante la integral:

$$U_m = \iiint_V u_m\, dV = \iiint_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\, dV$$

Alternativamente, puede expresarse en términos de la autoinductancia:

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi I = \frac{\Phi^2}{2L}$$

Leyes de Maxwell en Medios Materiales

Las ecuaciones de Maxwell que rigen el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos en medios materiales son:

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_l \qquad \text{(Ley de Gauss)}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \text{(Ley de Gauss Magnética)}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Ley de Faraday)}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_l + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \text{(Ley de Ampère-Maxwell)}$$

P1)

Son cuatro ecuaciones de Maxwell y de cada una de ellas se desprende una condicion de borde.

I) $\nabla \cdot D = \rho_l$

II) $\nabla \times E = 0$

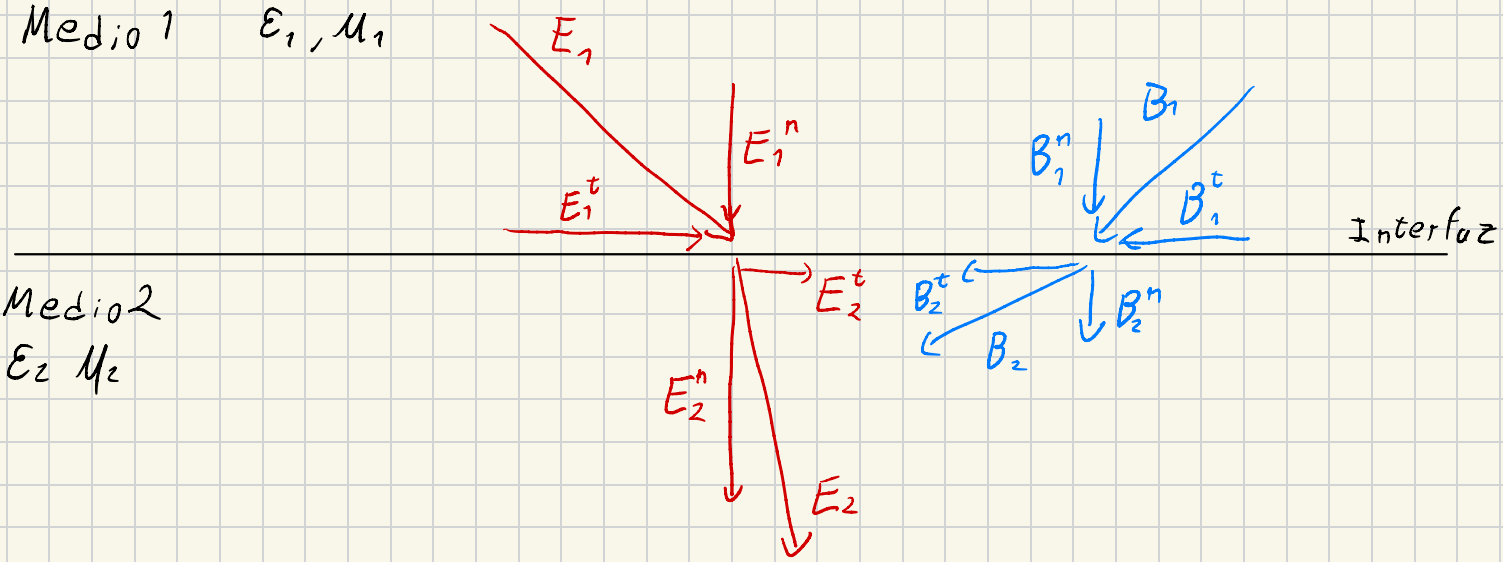
III) $\nabla \cdot B = 0$

IV) $\nabla \times H = J$

Para derivar las condiciones de borde se usa el teorema de Gauss para las leyes del tipo divergencia y el teorema de stokes para las leyes del tipo rotor. Esto en el contexto de la interfaz entre dos medios.

Tomemos un espacio donde hay dos medios con distinta permitividad electrica y distinta permeabilidad magnetica

Medio 1 ε_1, μ_1



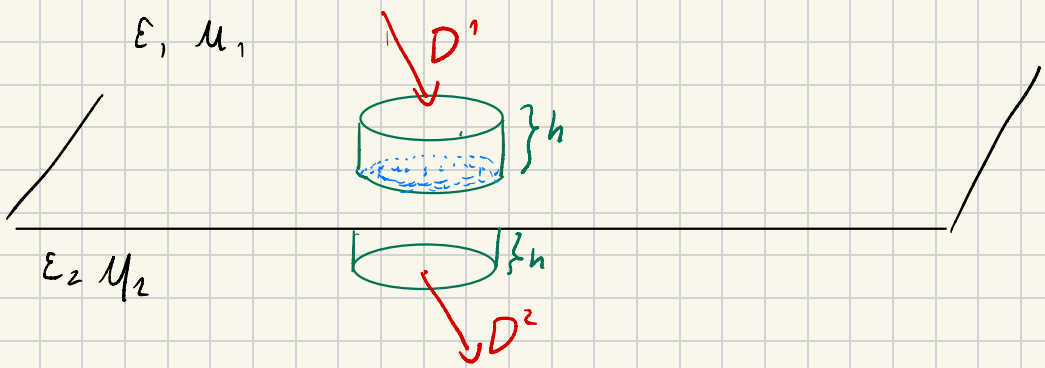
Medio 2
ε_2 μ_2

En estos medios existe campo electrico que esta constituido de una componente normal a la interfaz E^n y una componente tangente a la interfaz E^t. Lo mismo con B.

De $\nabla \cdot D = \rho_l \Rightarrow$ Gauss $\Rightarrow$ $\int D \, dS = \int \nabla \cdot D \, dV = \int \rho \, dV = Q_{enc}$

Para encontrar la relacion entre los campos D inmediatamente antes y despues de la interfaz usaremos ley de gauss con una superficie conveniente

Made with Goodnotes



Usamos un cilindro con area transversal A constante y una altura 2h con h tendiendo a 0 para que analicemos la relacion entre los campos inmediatamente antes y despues de la interfaz. Como h tiende a 0 no existira flujo en el manto del cilindro, solo en las caras de area A.

$$\iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = -\vec{D}_1 \cdot A\hat{n} + \vec{D}_2 \cdot A\hat{n} = A\left(-D_1^n + D_2^n\right)$$

$$= Q_{enc} = \sigma_{interfaz} \cdot A$$

Al ser h 0 la unica carga que existe dentro del cilindro es la carga superficial que se ubica en la interfaz

$$A(D_2^n - D_1^n) = \sigma \cdot A \Rightarrow \boxed{D_2^n - D_1^n = \sigma}$$

1° condicion de Borde

Para la ley $\nabla \cdot B = 0$ usaremos la misma superficie gaussiana:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\, dV = \int 0\, dV = 0$$

$$= \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\vec{B}_1 \cdot A\hat{n} + \vec{B}_2 \cdot A\hat{n} = -B_1^n A + B_2^n A = 0$$

$$\Rightarrow B_2^n A = B_1^n A \Rightarrow \boxed{B_1^n = B_2^n}$$

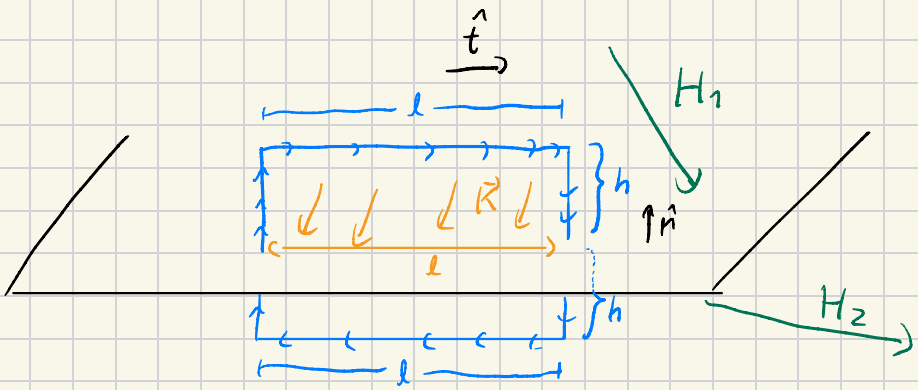
2° condicion de borde

Made with Goodnotes

Ahora pasaremos a las leyes de maxwell del tipo rotor, para estas usaremos una trayectoria amperiana conveniente:

$$\nabla \times H = J_l$$

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \nabla \times H \cdot dS = \int \vec{J}\, d\vec{S}$$



La trayectoria amperiana consiste en un rectangulo con dos lados de largo l tangentes a la interfaz y dos lados de largo 2h normales a la interfaz. Con h $\to$ 0. Como h tiende a 0 la integral de linea de los lados normales tambien tenderan a 0.

$$\int \vec{H}\, dl = \vec{H}_1 \cdot l \cdot \hat{t} - \vec{H}_1 h \cdot \hat{n} - \vec{H}_2 h \cdot \hat{n} - \vec{H}_2 \cdot l\, \hat{t} + \vec{H}_2 h\, \hat{n} + \vec{H}_1 \cdot h \hat{n}$$

$$= \vec{H}_1 \cdot l\, \hat{t} - \vec{H}_2 \cdot l\, \hat{t} =$$

$$= H_1^t \cdot l - H_2^t\, l$$

$$= l\,(H_1^t - H_2^t)$$

$$\int J\, dS = K \cdot l_{\text{interfaz}}$$

Como h tiende a 0 la unica corriente que esta enlazada por la trayectoria es la corriente que circula superficialmente por la interfaz.

$$\Rightarrow l\,(H_1^t - H_2^t) = K\, l \Rightarrow \boxed{H_1^t - H_2^t = K_{\text{interfaz}}}$$

3° condicion de borde

Made with Goodnotes

Para $\nabla \times \vec{E} = 0$ usamos la misma trayectoria amperiana:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \nabla \times \vec{E} \, dS = \int 0 \, dS = 0$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1^t \, l - E_2^t \, l$$

$$= l \left(E_1^t - E_2^t \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E_2^t = E_1^t}$$

4° Condición de Borde

$$\Rightarrow \nabla \cdot D = \rho \Rightarrow D_1^n - D_2^n = \sigma_{interfaz}$$

$$\nabla \times E = 0 \Rightarrow E_2^t = E_1^t$$

$$\nabla \cdot B = 0 \Rightarrow B_1^n = B_2^n$$

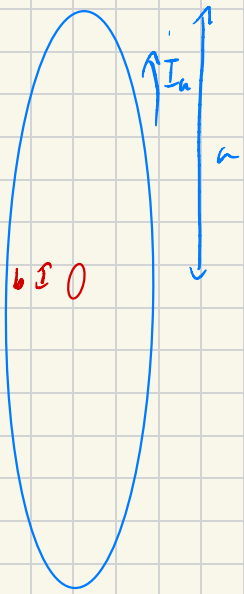
$$\nabla \times H = J \Rightarrow H_1^t - H_2^t = K_{interfaz}$$

Notemos que las leyes de tipo divergencia nos dicen cosas acerca de las componentes normales de los campos y las leyes del tipo rotor nos hablan de las componentes tangenciales de los campos.

Made with Goodnotes

P2)

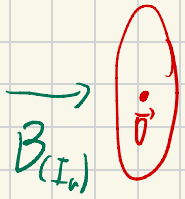
a)



Para calcular la inductancia mutua se estudia cual es el flujo magnetico inducido en un circuito provocado por la corriente existente en el otro circuito.

$$\Phi_b = M_{ab} I_a$$

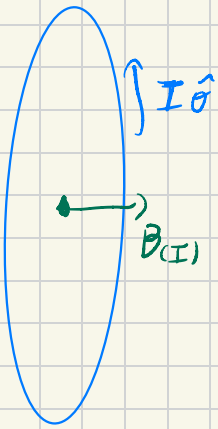
Por podemos asumir que el campo magnetico dentro de la espira de radio b es mas o menos uniforme



$$\Phi_b = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \int dS = B \cdot Area$$

$$\Phi_b = B_{(\vec{0})}\, b^2 \pi$$

Calculemos el campo magnetico en el centro de las espiras inducido por una corriente en la espira de radio a. Usaremos campo por definicion para esto



$$B_{(r)} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (r - r')}{\|r - r'\|^3}$$

$$I\,dl = I\,a\,d\theta\,\hat{\theta}$$

$$r = \vec{0}$$

$$r' = a\hat{r}$$

r, z, θ

$$B_{(0)} = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a\, d\theta\, \hat{\theta} \times (-a\hat{r})}{a^3}$$

$$\hat{\theta} \times -\hat{r} = \hat{z}$$

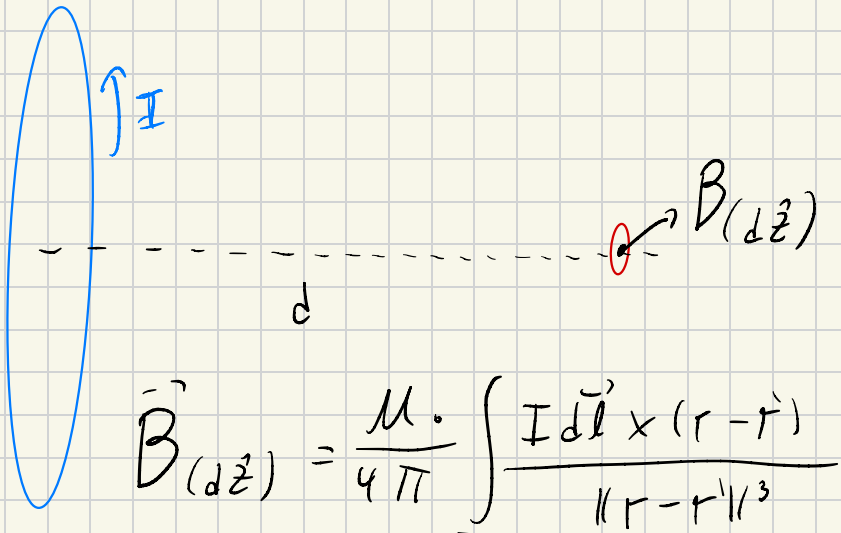
$$B_{(0)} = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi a^3} \int_0^{2\pi} \hat{z}\, d\theta = \frac{\mu_0 I 2\pi}{4\pi a} \hat{z}$$

$$\vec{B}_{(0)} = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \Phi_b = \frac{\mu_0 I_a}{2a} b^2 \pi = M I_a \Rightarrow \boxed{M = \frac{\mu_0 b^2 \pi}{2a}}$$

Made with Goodnotes

b) Para este caso haremos lo mismo pero esta vez calcularemos el campo en el eje de simetria pero a una distancia z=d



$$\vec{B}_{(d\hat{z})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$$

$$\vec{B}_{(d\hat{z})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I a\,d\theta\,\hat{\theta}\times(d\hat{z}-a\hat{r})}{(d^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}_{(d\hat{z})} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(d^2+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} (\hat{\theta}\times d\hat{z}) - (\hat{\theta}\times a\hat{r})\,d\theta$$

$\hat{\theta}\times d\hat{z} = d\hat{r}$; $\hat{\theta}\times a\hat{r} = -a\hat{z}$

$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi(d^2+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\hat{r} + a\hat{z}$$

$d\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{x} = 0$

$$= \frac{\mu_0 I a^2 2\pi}{4\pi(d^2+a^2)^{3/2}}\hat{z}$$

$$\vec{B}_{(d\hat{z})} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(d^2+a^2)^{3/2}}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \Phi_b = \frac{\mu_0 I a^2}{2(d^2+a^2)^{3/2}} b^2\pi = MI$$

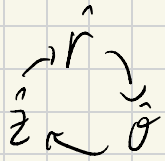
$$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 a^2 b^2 \pi}{2(d^2+a^2)^{3/2}}$$

$\Phi_b = M I_a$

$I\,d\vec{l} = I a\,d\theta\,\hat{\theta}$

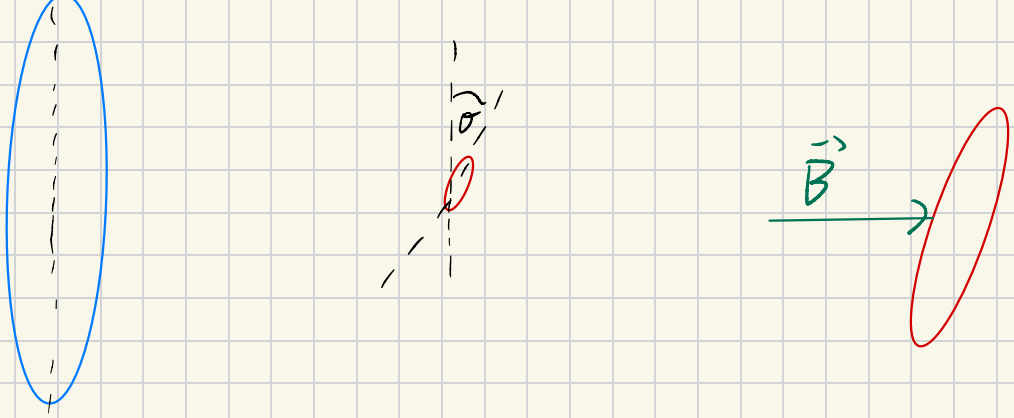
$\vec{r} = d\hat{z}$

$\vec{r}' = a\hat{r}$



Made with Goodnotes

c)



El angulo alterara el flujo que atraviesa la espira de radio b.

$$\Phi_b = B_{(d\hat{z})} \cdot Area \cdot \cos(\theta)$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{2(d^2-a^2)^{3/2}} b^2 \pi \cos(\theta) = M I$$

$$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 a^2 b^2 \pi}{2(d^2-a^2)^{3/2}} \cos(\theta)$$

Made with Goodnotes

Ahora nos piden que considerando el sistema del inciso (b) imaginemos que corre por la espira de radio b una corriente conocida I(t). A partir de esto encontrar la corriente inducida en la espira de radio a.
Lo bueno de las inductancias mutuas es que es la misma relacion entre el flujo en a inducido por una corriente en b que la relacion del flujo en b inducido por la corriente en a.

$$\frac{\Phi_a}{I_b} = M_{ab} = M_{ba} = \frac{\Phi_b}{I_a}$$

Por esta razon podemos usar la inductancia mutua calculada en el inciso (b) para calcular la fem inducida en la espira de radio a debido a una corriente en la espira de radio b.

$$\Rightarrow Q_a = M I_b = \frac{\mu_0 a^2 b^2 \pi}{2(a^2+d^2)^{3/2}} I_{(t)}$$

$$Fem_{(t)} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 a^2 b^2 \pi}{2(a^2+d^2)^{3/2}} \frac{dI_{(t)}}{dt}$$

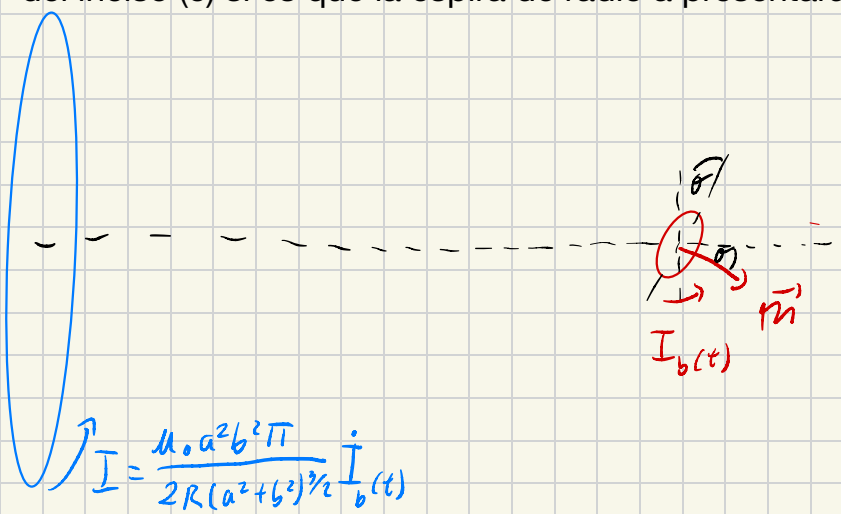
Con la fem y la resistencia de la espira obtenemos la corriente que circula con ley de ohm.

$$I = \frac{V}{R} = \frac{Fem}{R} = \frac{\mu_0 a^2 b^2 \pi}{2R(a^2+d^2)^{3/2}} \dot{I}_{(t)}$$

Si la corriente I(t) es constante la fem y la corriente en la espira de radio a seran nulas.

Made with Goodnotes

Finalmente nos piden que encontremos el torque experimentaria la espira de radio b en el sistema del inciso (c) si es que la espira de radio a presentara la corriente recien calculada



Para esto usaremos la aproximacion dipolar

$$\vec{T} = \vec{B} \times \vec{m}$$

$$|\vec{T}| = |B| \cdot |m| \operatorname{sen}(\theta)$$

B es el calculado en el caso b y m es igual a I Area

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 a^2 I_a}{2(a^2+b^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 a^2 \left(\frac{a^2 b^2 \mu_0 \pi}{2R(a^2+b^2)^{3/2}}\right) \dot{I}_b(t)}{2(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0^2 a^4 b^2 \pi}{4R(a^2+b^2)^3} \dot{I}_b(t)$$

$$m = I_b(t) \text{ Area } \hat{n} = I(t) b^2 \pi \hat{n}$$

$$|T| = \frac{\mu_0^2 a^4 b^4 \pi}{4R(a^2+b^2)^3} \dot{I}_b(t) b^2 \pi I_b(t)$$

$$T = \frac{\mu_0^2 a^4 b^6 \pi^2}{4R(a^2+b^2)^3} \dot{I}(t) I(t)$$

Made with Goodnotes

P3)

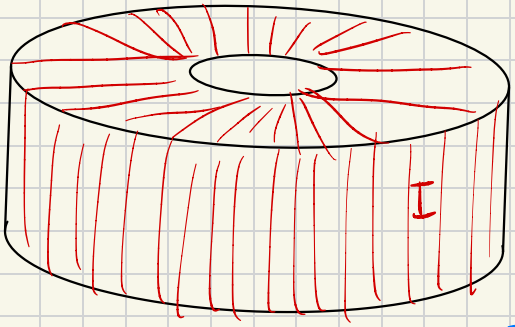
Para calcular la energia magnetica de un sistema tenemos dos perspectivas, desde una perspectiva del campo magnetico y otra desde la autoinductancia del sistema.

$$W_m = \int^{\infty} B \cdot H \, dV$$

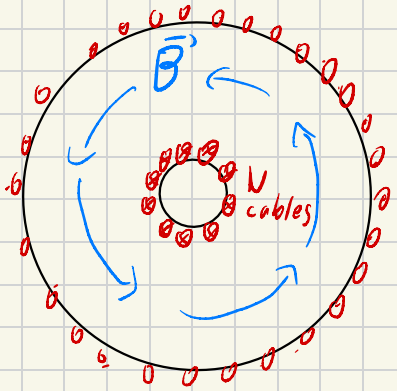
a μ_0 uniforme en todo el espacio $H = B/\mu_0$

$$W_m = \frac{?}{\mu_0} \int^{\infty} B^2 \, dV$$

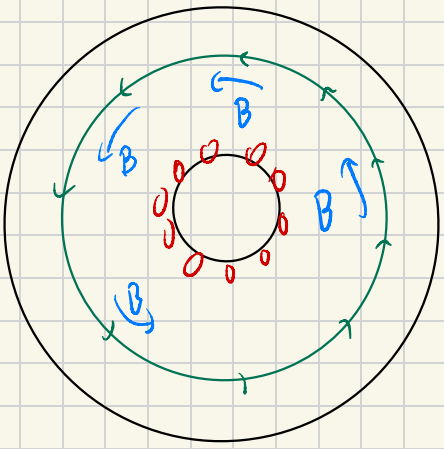
En el sistema tenemos un toroide que genera un campo magnetico dentro y un campo nulo fuera



$B = 0$



Para obtener este campo magnetico se hara una ley de ampere con una trayectoria que recorra una circunferencia dentro del toroide. Podemos despreocuparnos de los signos por que al calcular la energia nos interesa la magnitud del campo.



$$\int B(r) \, dl = \int_0^{2\pi} B(r) \, r \, d\theta$$

$$B(r) \int_0^{2\pi} r \, d\theta$$

$$= B(r) \, r \, 2\pi$$

$$\mu_0 \int J \, dS = I_{enlazado} = I \cdot N \, \mu_0$$

$$B(r) = \frac{I N \mu_0}{2\pi r} \quad \forall r \in [a, b]$$

Made with Goodnotes

$$B(r) = \begin{cases} \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases} & \cdots\cdots 0 < z < h \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots z \notin (0, h) \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{\mu_0}\int_{\infty} B^2\, dV = \frac{1}{\mu_0}\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} 0\, r\, d\theta\, dr\, dz + \int_{0}^{h}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} B^2\, r\, d\theta\, dr\, dz$$

$$+ \int_{h}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} 0\, dV$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\int_{0}^{h}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} B^2\, r\, d\theta\, dr\, dz$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\int_{0}^{h}\left[\int_{0}^{a}\int_{0}^{2\pi} 0\, dV + \int_{a}^{b}\int_{0}^{2\pi} B^2\, dV + \int_{b}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} 0\, dV\right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\int_{0}^{h}\int_{a}^{b}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\right)^2 r\, d\theta\, dr\, dz$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi^2}\int_{0}^{h}\int_{a}^{b}\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{r^2}\, r\, d\theta\, dr\, dz = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h\, 2\pi \ln(b/a)}{2\,4\,\pi^2}$$

Made with Goodnotes

$$W = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h \ln(b/a)}{2\pi}$$

Esto obtenemos calculando la energia magnetica desde la perspectiva de la magnitud del campo. Desde la perspectiva de la autoinductancia del sistema tenemos la expresion:

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h \ln(b/a)}{2\pi}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 h \ln(b/a)}{\pi}$$

Made with Goodnotes