Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 23: Circuito RL

P1. Transformador

Considere dos bobinas que rodean un mismo cilindro de permeabilidad magnética μ, radio r y largo h. Una de las bobinas da N_1 vueltas y tiene una corriente conocida $I_1 = I_0 cos(wt)$. La otra bobina cuenta con N_2 vueltas y una resistencia equivalente de R.

a) Encuentre la corriente $I_2(t)$ que corre por la bobina de N_2 vueltas (considere $I_2(t_0) = 0$).

b) Compare la diferencia de potencial entre los terminales de la bobina 1 y la bobina 2.

c) Repita el primer item asumiendo una corriente $I_1 = I_0$ constante.

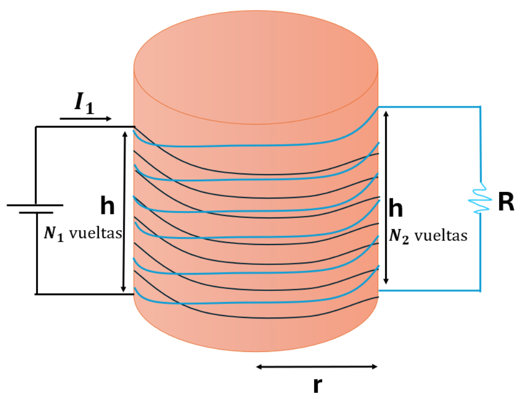


Figura 1

Resumen

Autoinductancia

Si tenemos una espira por la cual circula una corriente variable en el tiempo, se genera un campo magnético también variable, que induce una fuerza electromotriz sobre la propia espira. Este es el efecto de la autoinducción.
El campo magnético debido a una corriente eléctrica, según la ley de Biot-Savart es proporcional a la intensidad de corriente que lo causa. Al ser el campo proporcional a la intensidad de corriente, también lo será su flujo

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = LI \tag{1}$$

siendo L el denominado coeficiente de autoinducción. Este coeficiente depende exclusivamente de la geometría del circuito.
Si el circuito es rígido, el coeficiente de autoinducción es constante. De esta forma

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\text{propio}}}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{2}$$

Si ahora el circuito se encontrase sometido a una fuerza electromotriz externa ($\mathcal{E}_{\text{ext}}$), la fem total es

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{ext}} - L\frac{dI}{dt} \tag{3}$$

y por Ley de Ohm entonces, la ecuación para la corriente quedaría como

$$\mathcal{E}_{\text{ext}} - L\frac{dI}{dt} = IR \tag{4}$$

Autoinducción de un devanado: Para un devanado, se define la autoinductancia como la relación entre el número de vueltas que posee N, el flujo magnético enlazado que produce Φ y la intensidad de corriente eléctrica que lleva I:

$$L = \frac{N\Phi}{I} \tag{5}$$

Energía Magnética

La energía que un sistema almacena en forma de campo magnético estará dada por la expresión

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int_V |\vec{B}|^2 dV \tag{6}$$

donde la integral anterior se realiza sobre **todo el espacio**.

De forma equivalente, si se tiene un devanado donde conocen la corriente I, el flujo Φ y la inductancia L, se tendrá:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\Phi I}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} \tag{7}$$

Así como en electrostática existía la capacitancia como medida de la capacidad para almacenar energía en forma de campo eléctrico para oponerse a los cambios de potencial, ahora se tienen las inductancias como medida de la capacidad para almacenar energía en forma de campo magnético para oponerse a los cambios de corriente.

$P_2)$

Para obetener la corriente en la segunda bobina usaremos ley de ohm: $I = \frac{V}{R}$
La resistencia la sabemos, nos falta saber el voltaje. Para esto usaremos faraday lens que nos dice:

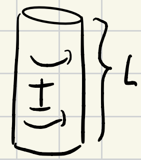
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = V \quad \text{con } \phi\text{: flujo magnetico que atraviesa al circuito.}$$

El flujo que atraviesa el circuito se debe al campo magnetico en el cilindro. La corriente I1 en la bobina de la izquierda produce un campo magnetico en el cilindro caracteristico de la bobina:

$$\vec{B} = \mu K$$

En este caso no existe una corriente superficial pero podemos aproximar la corriente en las N2 vueltas como una corriente superficial.

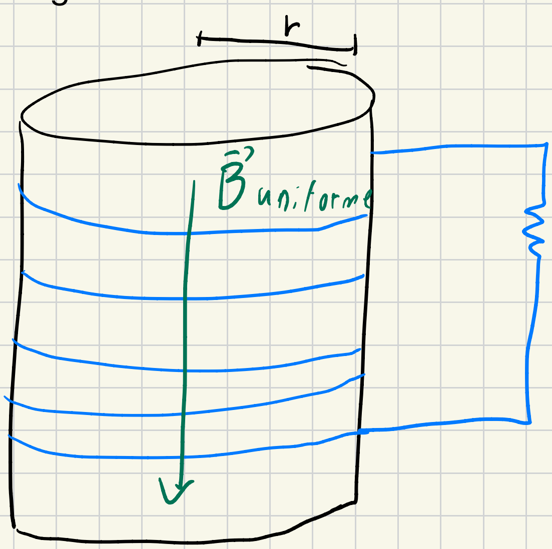
$$K = \frac{I \text{ total que corre por el manto}}{L \text{ ancho del manto}}$$



$$K_1 = \frac{I_1 N_1}{h} = \frac{I_0 N_1}{h} \cos(wt)$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu I_0 N_1}{h} \cos(wt)$$ Alineado con el eje de simetría del cilindro

Con el campo magnetico aplicamos Faraday Lens. Para lo que tenemos que sacar el flujo magnetico del circuito de la derecha que es al cual le queremos calcular la fem inducida.



El flujo total sera la suma del flujo de cada una de las vueltas. Estos flujos correspoden a la magnitud del campo magnetico por el area de cada espira. Esto debido a que el campo B esta alineado con el vector normal a la superficie que rodea la espira.

$$\phi_{total} = \sum^{N_2} \phi_{vuelta} = N_2 \, \phi_{vuelta}$$

$$= N_2 \cdot B \cdot Area$$

$$= \frac{N_2 N_1 I_0 \mu}{h} r^2 \pi \cos(wt)$$

$$\mathcal{E}_{ext} = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{N_1 N_2 I_0 \mu r^2 \pi}{h}\cos(wt)\right)$$

$$= \frac{N_1 N_2 I_0 \mu r^2 \pi w}{h} \operatorname{sen}(wt)$$

Esta fem inducida por el campo producido el circuito izquierdo provocara una corriente en el circuito de la derecha. Pero esta corriente I2 tambien tendra un efecto inductivo en el micmo circuito lo que afectara la corriente I2. Para modelar este fenomeno usaremos la constante autoinductiva L.

$$\phi_2 = L_2 I_2 \Rightarrow \frac{dLI}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = \mathcal{E}_{autoinductiva}$$

$$L \text{ cte} \Rightarrow L\frac{dI_2}{dt} = \mathcal{E}_{autoinductiva}$$

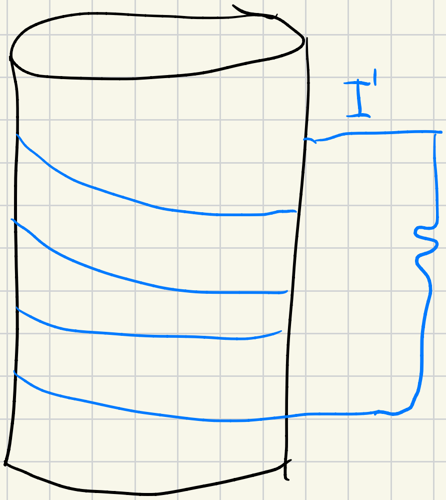
La fem autoinductiva siempre sera un potencial que se opone al potencial existente, de manera que hace disminuir la corriente que existe sin este efecto.

$$V_2 = RI_2 = \mathcal{E}_{ext} - \mathcal{E}_{autoinductivo} = \mathcal{E}_{ext} - L\dot{I}_2$$

$$\Rightarrow L\dot{I}_2 + RI_2 = \mathcal{E}_{ext}$$

Para calcular L debemos imponer una corriente arbitraria en el circuito y calcular el flujo que se induce en el circuito debido a la corriente.

$$L = \frac{\phi_{(I')}}{I'}$$



Similarmente como calculamos el flujo producido por la corriente I1 calcularemos el flujo producido por una corriente arbitraria I' en el circuito de la derecha.

$$B_{\text{dentro del cilindro}}(I') = \mu K$$

$$K = \frac{N_2 I'}{h}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu N^2 I'}{h}$$

$$\Rightarrow \varnothing_{total}(I') = \sum^{N_2} \varnothing_{espira}(I') = \sum^{N_2} B \cdot Area$$

$$= \sum_{i=1}^{N_2} \frac{\mu N^2 I' r^2 \pi}{h}$$

$$\Rightarrow \varnothing_{tota}(I') = \frac{N_2^2 \mu I' r^2 \pi}{h}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\varnothing(I')}{I'} = \frac{N^2 \mu I' r^2 \pi}{h I'} = \frac{N^2 \mu r^2 \pi}{h}$$

Conociendo el valor de L podemos resolver la EDO.

$$L\dot{I} + RI = \mathcal{E}_{ext}$$

$$\Rightarrow \dot{I} + R/L\, I = \frac{\mathcal{E}_{ext}}{L}$$

Esta Edo se resuelve encontrando la solucion homogenea y la solucion particular que es de la misma naturaleza que la parte no homogenea de la EDO (sinusoidal)

$$\underset{\text{homogenea}}{I_2(t)} = A e^{-t R/L}$$

$$\underset{\text{particular}}{I_2(t)} = B \operatorname{sen}(wt) + C\cos(wt)$$

Para obtener las constantes primero debemos reemplazar la solucion particular en la EDO

$$B\cos(wt) - C\operatorname{sen}(wt) + R/L\left(B\operatorname{sen}(wt) + C\cos(wt)\right) = \frac{\mathcal{E}_{ext}}{L}$$

$$\left(B + \frac{R}{L}C\right)\cos(wt) + \left(\frac{R}{L}B - C\right)\operatorname{sen}(wt) = \frac{N_1 \cancel{N_2} \cancel{\mu} I_0 r^2 \pi w}{\cancel{h}\left(\frac{N_2^2 \cancel{\mu} r^2 \cancel{\pi}}{\cancel{h}}\right)}\cos(wt)$$

$$\left(B + R/L\, C\right)\cos(wt) + \left(\frac{RB}{L} - C\right)\operatorname{sen}(wt) = N_1 w \cos(wt)$$

$$\Rightarrow B + R/L\, C = N_1 w \quad (1)$$

$$\wedge \; R/L\, B - C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = R/L\, B$$

$$\Rightarrow (1) \Leftarrow \frac{R^2}{L^2} B + B = N_1 w \Rightarrow B = \frac{N_1 w}{1 + R^2/L^2}$$

$$\Rightarrow C = R/L \cdot \frac{N_1 w}{1 + R^2/L^2} = \frac{N_1 w}{L/R + R/L}$$

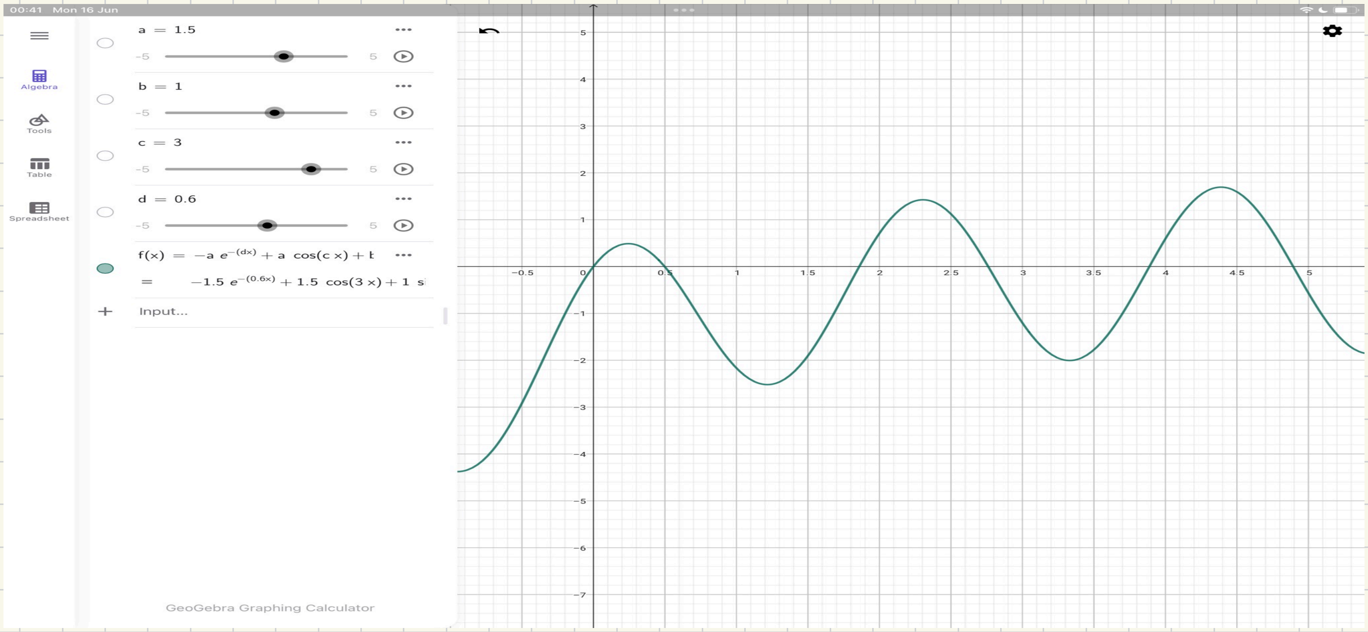
Con la solucion particular usamos condiciones iniciales para encontrar la constante de la solucion homogenea.

$$I(t=0) = \underset{\text{homo}}{I(0)} + \underset{\text{partic}}{I(0)} = A e^{-\frac{R}{L}0} + B\operatorname{sen}(w0) + C\cos(wt)_{=0}$$

$$= A + C = 0 \quad \Rightarrow A = -C = \frac{-N_1 w}{L/R + R/L}$$

Made with Goodnotes

$$\Rightarrow I_2(t) = \frac{-N_1 w}{L/R + R/L} e^{-R/L\, t} + \frac{N_1 w}{1 + R^2/L^2} \operatorname{sen}(wt) + \frac{N_1 w}{L/R + R/L} \cos(wt)$$



b) El potencial de las bobinas se obtienen de Faraday Lenz

$$\mathcal{E}_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(N_1 \cdot B \cdot area\right)$$

$$= N_1 r^2 \pi \dot{B}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(N_2 \cdot B \cdot area\right)$$

$$= N_2 r^2 \pi \dot{B}$$

Como ambas bobinas envuelven el mismo cilindro decimos que ambos experimentan el mismo campo magnetico

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{N_1 r^2 \pi \dot{B}}{N_2 r^2 \pi \dot{B}} = \frac{N_1}{N_2}$$

Alterando el numero de vueltas podemos cambiar el factor de convertibilidad del transformador.

c) Si en vez de de que la corriente I1 fuera sinusoidal fuera una constante ocurriria que el flujo que experimentan las bobinas tambien es constante. Si es asi no se inducira una fem en el circuito de la derecha y no correra corriente por ahi

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt} \quad (\phi \text{ cte}) \Rightarrow \mathcal{E} = 0$$

$$\mathcal{E} = RI = 0 \Rightarrow I(t) = 0$$

Los transformadores no funcionan con corriente continua, esta es una de las principales razones para usar este tipo de corriente.