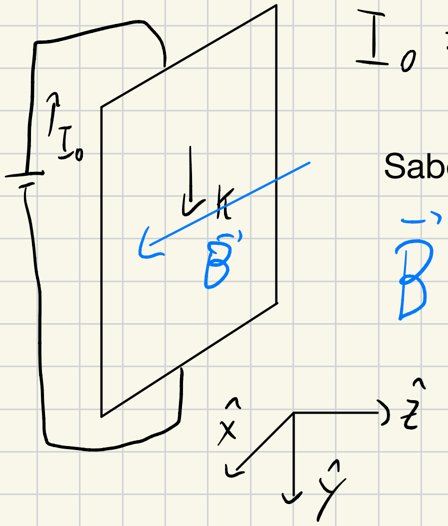
a) La forma en la que puede haber corriente en la bobina es debido a la fem inducida que se genera por el cambio de flojo magnetico que existe en el circuito. Para obtener la magnitud de la fem primero debemos encontrar la expresion del flujo magnetico en la bobina. Como nos dice que despreciemos los efectos autoinductivos debemos considerar unicamente el campo magnetico producido por fuentes externas a esta, en este caso la placa.

$$Fem = \frac{d\Phi_B}{dt}$$



$$I_0 = \int_0^L K\, dl = K \cdot L \Rightarrow K = I_0/L$$

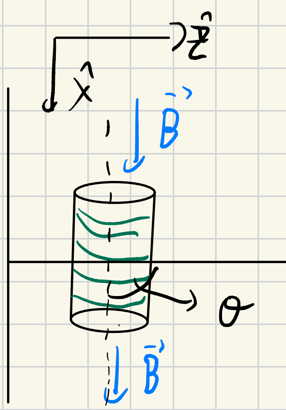
Sabemos el campo que produce una placa con corriente uniforme

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2}\hat{x} = \frac{\mu_0 I_0}{2L}\hat{x}$$

uniforme en el espacio cercano $(z \ll L)$

En este campo estara inmerso nuestra bobina que al estar enrrollada en un nucleo de permeabilidad magnetica μ el campo que cruzara el circuito y producira el flujo sera: $\frac{\mu I_0}{2L}\hat{x}$

Veamos el sistema desde arriba:



En la condicion inicial donde la bobina esta paralela a la placa el flujo magnetico sera la suma del flujo magnetico de cada espira de la placa. A medida que el angulo vaya variando el flujo magnetico disminuira debido a que el area efectiva que esta siendo atravesada por B es menor al estar en diagonal. Esta dependencia angular se modela con la funcion trigonometrica que alcanza su maximo en 90 grados, el seno.

En condicion inicial:

$$\Phi_B = N\,\Phi_{B_{espira}} = N \iint B\, dS = N \overbrace{B}^{B \text{ uniforme}} \iint dS = N B \cdot \text{Area}$$

$$\Phi_B^{\text{inicial}} = N \frac{\mu I_0}{2L} r^2 \pi$$

Notemos que el nucleo de permeabilidad μ nos aumenta la magnitud del flujo si es que $\mu > \mu_0$
Esto es lo que se busca agregando un nucleo ferromagnetico en las bobinas.

Para la expresion general del flujo magnetico multiplicamos por el seno del angulo que forma el vector normal a la placa con el eje de simetría de la bobina.

$$\Phi_B(\theta) = N\frac{\mu I_0}{2L} r^2 \pi \, sen(\theta)$$

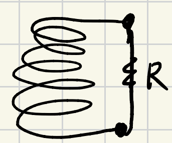
Como $\theta = 90 + wt \quad \wedge \quad cos(\theta) = sen(90+w)$

$$\Phi_B(t) = \frac{N\mu I_0}{2L} r^2 \pi \cos(wt)$$

Con la expresion del flujo magnetico en funcion del tiempo podemos encontrar la magnitud de la fem inducida en la bobina.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\,\Phi_B(t)}{dt} = \frac{-N\mu I_0 r^2 \pi}{2L} \frac{d\cos(wt)}{dt}$$

$$\mathcal{E} = \frac{N\mu I_0 r^2 \pi w}{2L} sen(wt) \rightarrow$$ en los extremos de la bobina

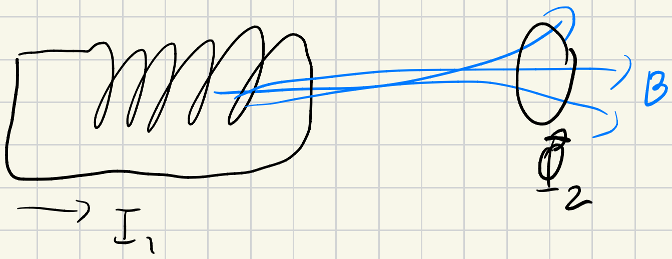


Con el valor de el voltaje presente en el circuito y el de la resistencia equivalente de este obtenemos la corriente que circula por ley de ohm.

$$I = V/R = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{N\mu I_0 r^2 \pi w}{2LR} sen(wt)$$

La corriente inducida en la bobina debido a su movimiento rotacional es sinusoidal, tambien conocida como corriente alterna. Notemos que su amplitud es directamente proporcional a su velocidad de giro y al μ del nucleo que envuelve.

La inductancia mutua se define como el factor lineal que relaciona el flujo magnetico en un circuito con la corriente del otro. Esta corriente es la que produce el B del flujo



$$\Rightarrow \phi_2 = M I_1$$

$$M = \frac{\phi_2}{I_1}$$

Para obtener este valor imponemos un valor de corriente en el circuito 1 y estudiamos el flujo resultante en el circuito 2.
Una propiedad muy util de inductancia mutua es que la misma que siente el circuito 1 con la corriente del 2 que el flujo que siente 2 con la corriente de 1.

$$M = \frac{\phi_2}{I_1} = \frac{\phi_1}{I_2}$$

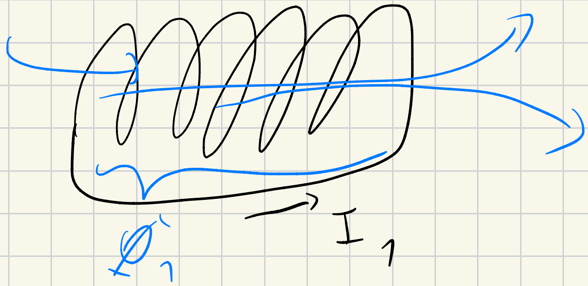
$$N \frac{\mu I_0}{2L} r^2 \pi \, sen(\theta)$$

En nuestro caso ya conocemos la corriente en el circuito de placa y el flujo que produjo esta corriente en el otro circuito, la bobina.

$$M_{(\theta)} = \frac{\phi_{bobina(\theta)}}{I_{placa}} = \frac{N \mu I_0 r^2 \pi \, sen(\theta)}{2 L I_0} = \frac{N \mu r^2 \pi \, sen(\theta)}{2L}$$

↳ es cte

Por otro lado la autoinductancia se conoce como el factor lineal entre el flujo que experimenta un circuito provocado por la corriente que corre por el mismo



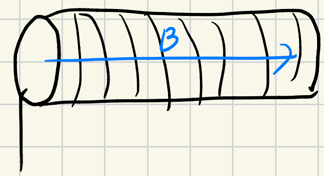
$$\phi_1 = L\, I_1$$

$$L = \frac{\phi}{I}$$

Para obtener este valor debemos considerar los efectos autoinductivos y despreciar cualquier otra fuente de campo magnetico externa. Se impone una corriente arbitraria en el circuito, se calcula el campo magnetico producido y con este el flujo en el circuito.

En nuestro caso el campo producido por una bobina se obtiene con ampere y es uniforme de la forma:

$B = \mu K$ dentro de la bobina



Aproximaremos nuestra corriente de N espiras en un largo h a una corriente superficial

$$K = \frac{I_{total}}{largo} = \frac{I' N}{h}$$

I': Corriente arbitraria impuesta para el calculo de L

$$\Rightarrow \quad B = \mu \frac{I' N}{h}$$

De forma analoga al inciso (a) calculamos el flujo en la bobina dado un campo magnetico uniforme.

$$\Phi = N \cdot B \cdot Area = N \mu \frac{I' N}{h} r^2 \pi$$

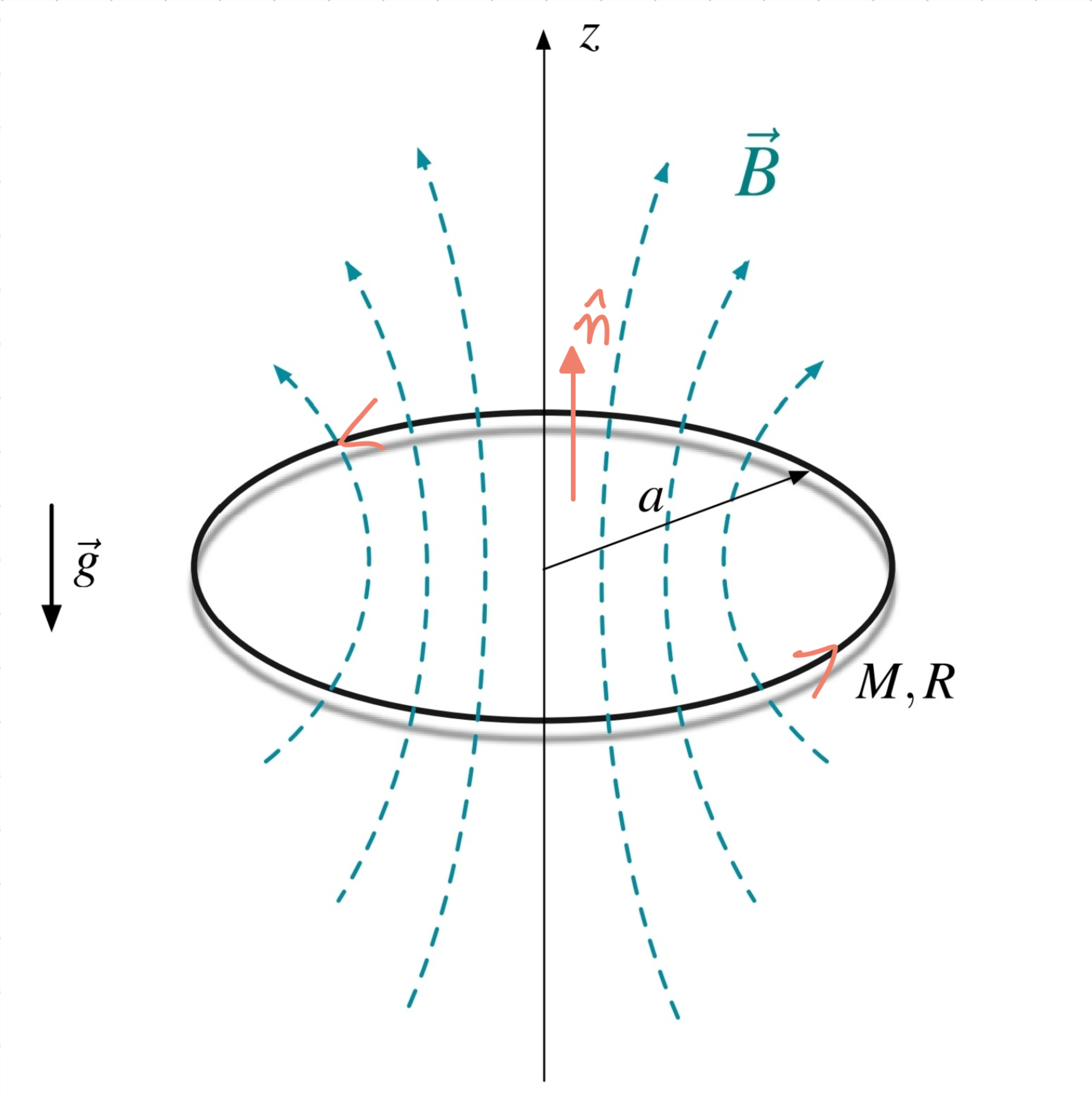
Con esto ya podemos calcular la autoinductancia L.

$$L = \frac{\phi_1}{I_1} = \frac{\mu N^2 I' r^2 \pi}{h \quad I'} = \frac{\mu N^2 r^2 \pi}{h}$$

no depende de θ. es cte

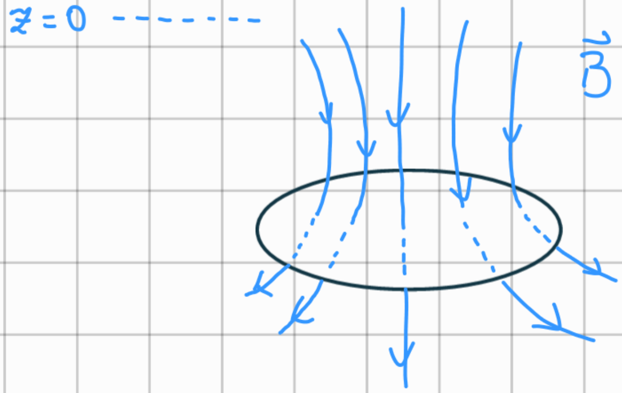
Al igual que la capacitancia L y M no deben depender de las condiciones magneticas sino solo de las caracteristicas geometricas y de los matereales del sistema.

P1

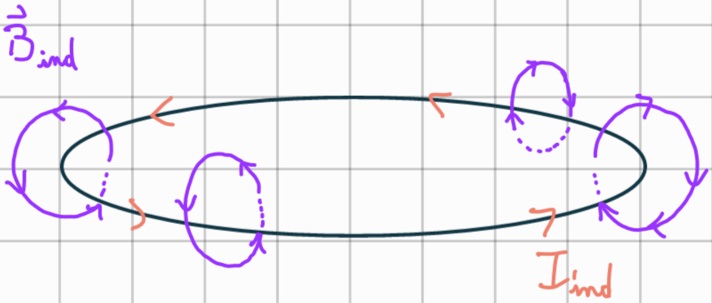


a)

La Ley de Faraday-Lenz nos dice que la corriente que se induce en un circuito deberá generar un campo magnético que se oponga al flujo de campo magnético externo. En nuestro caso, el flujo de campo magnético externo sobre el anillo se verá de la siguiente forma



Por lo tanto, la corriente inducida en el anillo deberá fluir en sentido anti-horario, ya que de esta manera se generará un campo magnético que se opone al flujo del campo magnético externo



b)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = IR$$

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Elegimos $\hat{z}$ como la normal de la superficie. Esto, en adición a la geometría, nos da que

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \vec{B} \cdot \hat{z}\, r\, dr\, d\varphi$$

Pero ¿cómo es **B**?

En general

$$\vec{B}(r,\varphi,z) = B_r(r,\varphi,z)\,\hat{r} + B_\varphi(r,\varphi,z)\,\hat{\varphi} + B_z(r,\varphi,z)\,\hat{z}$$

Sin embargo, se nos dice que **B** es axisimétrico, es decir, que el campo **B** no cambiará si damos vueltas en torno al eje *z*, esto implica que **B** no tiene dependecia de *φ*, o sea

$$\vec{B} = \vec{B}(r,z)$$

Y por enunciado

$$B_z = Cz$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r,z) = B_r(r,z)\,\hat{r} + B_\varphi(r,z)\,\hat{\varphi} + Cz\,\hat{z}$$

Reemplazando en

$$\Phi$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \left(B_r(r,z)\,\hat{r} + B_\varphi(r,z)\,\hat{\varphi} + Cz\,\hat{z}\right)\cdot\hat{z}\, r\,dr\,d\varphi$$

Recordando

$$\hat{r}\cdot\hat{z} = 0,\ \hat{\varphi}\cdot\hat{z} = 0 \text{ y } \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} Cz\, r\,dr\,d\varphi$$

$$\Phi = \pi a^2 C z$$

$$\Rightarrow\ -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 C\dot{z}$$

$* \ \dot{z} \equiv \frac{dz}{dt}$ (notación)

$$\Rightarrow\ -\pi a^2 C\dot{z} = IR$$

$$\boxed{I = \frac{-\pi a^2 C\dot{z}}{R}}$$

c)

$$\vec{F} = \int I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} I\,\hat{\varphi} \times \left(B_r(r,z)\,\hat{r} + B_\varphi(r,z)\,\hat{\varphi} + Cz\,\hat{z}\right) a\,d\varphi$$

Necesitamos conocer

Para esto usaremos que B_r

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

La divergencia en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}^{*} = 0 \quad y \quad B_z = Cz \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + C = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) = -Cr \quad \Big/ \int dr$$

$$r B_r = -\frac{Cr^2}{2} + A$$

$$B_r = -\frac{Cr}{2} + \frac{A}{r}$$

$\star$ $\vec{B}$ es axisimétrico, i.e., no varía al cambiar φ.

$$\vec{B}(r=0) \not\longrightarrow \infty \Rightarrow A = 0$$

$\therefore$

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} I\hat{\varphi} \times \left(-\frac{Ca}{2}\hat{r} + B_\varphi(r,z)\hat{\varphi} + Cz\hat{z}\right) a\, d\varphi$$

$\hat{\varphi} \times \hat{r} = -\hat{z}$

$\hat{\varphi} \times \hat{\varphi} = 0$

$\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{r}$

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} I\left(\frac{Ca}{2}\hat{z} + Cz\hat{r}\right) a\, d\varphi$$

$$F_r = \int_0^{2\pi} I C z \hat{r} \, a \, d\varphi$$

$$\hat{r} = \cos\varphi \, \hat{x} + \sin\varphi \, \hat{y}$$

$$\Rightarrow F_r = I C z a \int_0^{2\pi} \left(\cancelto{0}{\cos\varphi \, \hat{x}} + \cancelto{0}{\sin\varphi \, \hat{y}} \right) d\varphi$$

$$\boxed{F_r = 0}$$

$$F_z = \int_0^{2\pi} I \frac{Ca}{2} a \, d\varphi$$

$$\boxed{F_z = \pi I C a^2}$$

d)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = \pi I C a^2 \hat{z} - Mg\hat{z}$$

$$\pi I C a^2 - Mg = M\ddot{z}$$

$$\pi\left(\frac{-\pi a^2 C\dot{z}}{R}\right) C a^2 - Mg = M\ddot{z}$$

$$-\frac{\pi^2 a^4 C^2}{MR}\dot{z} - g = \ddot{z}$$

* $v_z \equiv \dot{z}$

* $\omega \equiv \dfrac{\pi^2 a^4 C^2}{MR}$

$$\dot{v}_z = -\omega v_z - g$$

Solución homogénea

$$\dot{v}_h + \omega v_h = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_h(t) = A_1 e^{-\omega t}}$$

Solución particular

$$\dot{v}_p + \omega v_p = -g$$

Ansatz

$$v_p = k \rightarrow \text{cte}$$

Reemplazando

$$\omega k = -g$$

$k = -g/\omega \Rightarrow \boxed{v_p = -g/\omega}$

Solución general

$$v_z(t) = v_h + v_p$$

$$\boxed{v_z(t) = A_1 e^{-\omega t} - g/\omega}$$

Para *t* muy grande

$$e^{-\omega t} \approx 0$$

$$\Rightarrow v_T = g/\omega$$

$$\boxed{v_T = \frac{-gMR}{\pi^2 a^4 C^2}}$$