

**Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025**

**Profesor:** Ignacio Andrade S.

**Auxiliares:** Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.

**Ayudante:** Facundo Esquivel.



# Auxiliar 21: Medios magnéticos

**P1**

Considere un cilindro conductor de largo  $L$  y radio  $R$ . Este cuenta con conductividad  $\sigma$  constante y permeabilidad magnética  $\mu$  tal que:

$$\mu(r) = \mu_0 \left( \frac{R}{r + \epsilon} \right)$$

con  $0 < \epsilon \ll R$ .

Además, se encuentra conectado a un circuito, de tal manera que existe una diferencia de potencial  $V_0$  entre sus extremos. Suponiendo que la corriente es homogénea en su interior, calcule los campos  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  y el vector de magnetización  $\vec{M}$  dentro del cilindro.

Encuentre las regiones donde el material se considera diamagnético, paramagnético y ferromagnético. ¿Cual es la corriente de magnetización?

**P2. Dona magnética**

Considere una bobina toroidal de sección transversal cuadrada con radio interior  $a$ , radio exterior  $b$  y altura  $h$ ; la cual está hecha de un material de permeabilidad  $\mu_1$  para  $\varphi \in (0, \alpha)$ , y  $\mu_2$  en el resto. En torno a la bobina se ha enrollado un alambre con corriente  $I$ , el cual da  $N$  vueltas a su alrededor.

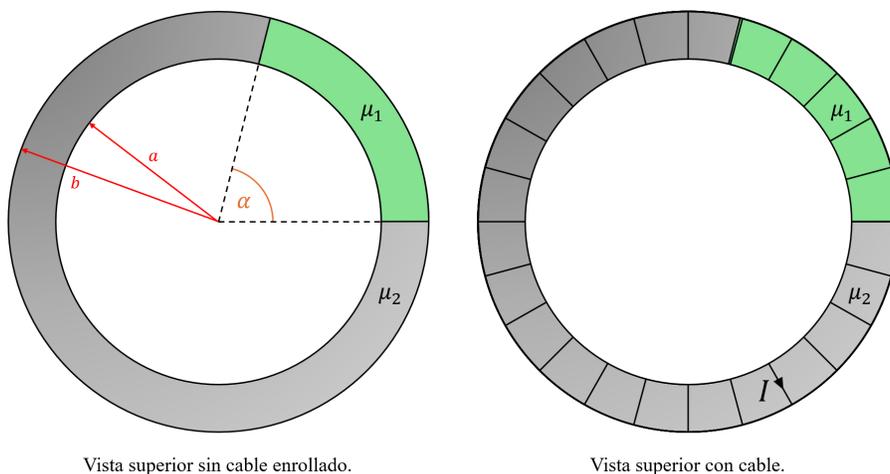


Figura 1

- a) Calcule el campo magnético y el campo  $\vec{H}$  al interior de la bobina.
- b) ¿Qué ocurre cuando  $\mu_2 \rightarrow \infty$ ? (Esto es lo que pasa en el caso de un material ferromagnético).
- c) Calcule el flujo de campo magnético a través de una sección transversal del toroide.

## Resumen

**Medios magnéticos**

**Corrientes de Magnetización:** En presencia de un campo magnético externo  $\vec{B}$ , los dipolos magnéticos de los átomos se alinean para dar lugar a un efecto neto llamado “magnetización”, originadas por  $\vec{M}$ , distinguiendo corrientes superficiales y volumétricas, que se calculan mediante:

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} \quad \vec{J} = \nabla \times \vec{M} \quad (1)$$

**Intensidad magnética:** Siguiendo con la analogía de dieléctricos, uno puede definir el vector intensidad magnética  $\vec{H}$ , el cual cuantifica los efectos de la magnetización del material, de manera que:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (2)$$

lo que permite escribir la Ley de Ampère para materiales:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{libre} \iff \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} \quad (3)$$

Notar que distinguimos  $\vec{J}_{libre}$  de  $\vec{J}_M$ , de la misma manera que distinguimos la carga libre de la carga de polarización: la corriente libre la “ponemos ahí a voluntad” (por ejemplo, mediante una batería), mientras que la corriente de magnetización es, por ejemplo, una respuesta del material ante el campo magnético externo  $\vec{B}$ .

**Medios lineales:** En general, la magnetización de un material es proporcional a la intensidad magnética. De esta manera,  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$  con  $\chi_m$  la susceptibilidad magnética del medio. Esto permite reescribir la ecuación (2) como

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (4)$$

donde  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ , que se conoce como la permeabilidad magnética absoluta del material.

**Condiciones de borde:** Las condiciones de borde para  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  en la interface entre dos medios son

$$B_2^\perp - B_1^\perp = 0 \quad \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_{libre} \quad (5)$$

**Tipos de materiales**

Los materiales se pueden clasificar según su respuesta al campo magnético externo en función de su permeabilidad magnética  $\mu$  (comparada con la del vacío  $\mu_0$ ):

- **Diamagnéticos:**

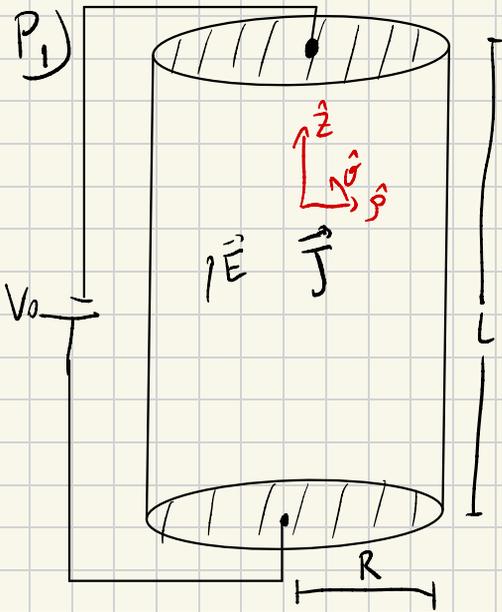
$$\mu < \mu_0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \chi_m < 0$$

- **Paramagnéticos:**

$$\mu > \mu_0 \quad \text{pero cercano a } \mu_0 \quad \text{o} \quad \chi_m > 0 \quad (\text{pequeño})$$

- **Ferromagnéticos:**

$$\mu \gg \mu_0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \chi_m \gg 1$$



Dado a que la corriente es homogénea

$\vec{J}/\sigma = \vec{E}$  es homogénea  
y en la dirección  $\hat{z}$

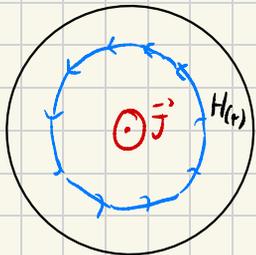
Sabemos que

$$V_0 = \int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{z} = E \cdot L$$

$$\Rightarrow \vec{E} = V_0/L \hat{z} \quad \text{al interior del cilindro}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma V_0}{L} \hat{z}$$

Primero calcularemos  $\vec{H}$  pues no depende de  $M$



Sabemos que el campo magnético tiene dirección  $\hat{\theta}$  con respecto a la corriente

$$\text{Aplicamos Ampere: } \oint H(r) = \iint \vec{J} \cdot dA$$

$$\Rightarrow H(r) \cdot 2\pi r = J \pi r^2 =$$

$$\Rightarrow H(r) = \frac{Jr}{2} \hat{\theta} \quad \forall r < R$$

La dirección la sabemos por ley de la mano derecha.

Para obtener  $\vec{B}$  simplemente multiplicamos por la permeabilidad magnética  $\mu$ .

$$\vec{B}_{(r)} = \mu_{(r)} \vec{H}_{(r)} = \mu_0 \left( \frac{R}{r+\epsilon} \right) \frac{Jr}{2} \hat{\theta}$$

Y luego el vector magnetización  $\vec{M}$  usamos

$$\vec{B}/\mu_0 = \vec{H} + \vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H}$$

$$= \frac{R}{r+\epsilon} \frac{Jr}{2} \hat{\theta} - \frac{Jr}{2} \hat{\theta}$$

$$= \frac{Jr}{2} \left( \frac{R}{r+\epsilon} - 1 \right) \hat{\theta}$$

Notemos que para  $R > r > R - \epsilon$ ,  $\left( \frac{R}{r+\epsilon} - 1 \right) < 0$  por lo que  $\vec{M}$  va en la dirección  $-\hat{\theta}$  y se opone a  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ . Y se tiene  $\vec{B} < \vec{H}\mu_0$ .

Es en esta región donde el material se denomina diamagnético.

También notemos que en  $r \ll R$  el  $\vec{M}$  se dispara pues  $\epsilon$  es una magnitud muy pequeña  $\left( \frac{R}{r+\epsilon} - 1 \right) \gg 1 \Rightarrow \vec{M} \gg \vec{H} \Rightarrow \vec{B} \gg \vec{H}\mu_0$ .

En esta región el material se denomina ferromagnético.

Espacio	{	Ferromagnético	$0 < r \ll R$
		Paramagnético	$r < R - \epsilon$
		Diamagnético	$R > r > R - \epsilon$
		Vacio	$r > R$

P<sub>2</sub>

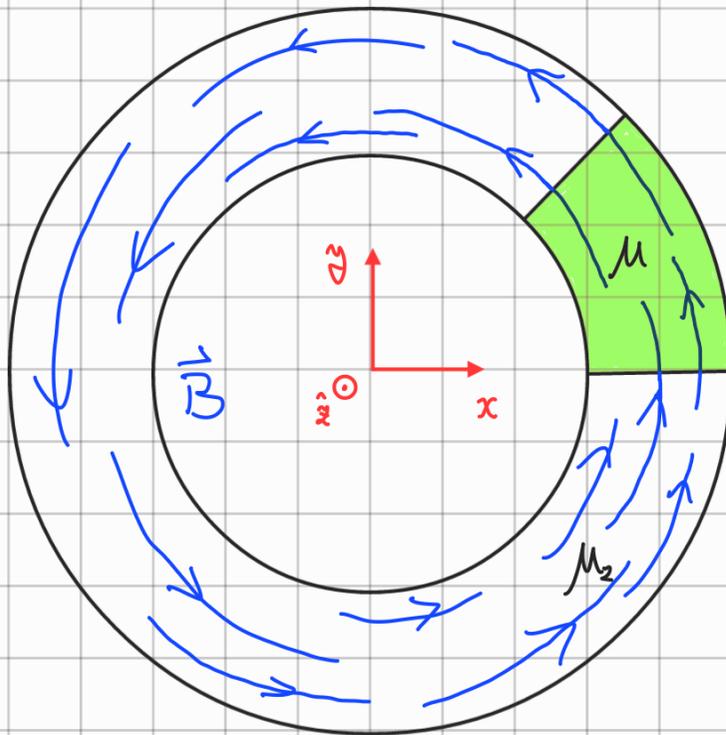
En cátedra se vio que el campo al interior de un toroide tiene la siguiente forma

$$\vec{B} = B(r)\hat{\varphi}$$

Y como **H** es proporcional a **B** mediante una constante

$$\vec{H} = H(r)\hat{\varphi}$$

Visualmente



A priori, tanto **B** como **H** tienen una forma distinta en cada medio, es decir

$$\vec{B} = \begin{cases} B_1(r)\hat{\varphi}, & \varphi \in (0, \alpha) \\ B_2(r)\hat{\varphi}, & \varphi \in (\alpha, 2\pi) \end{cases}$$

$$\vec{H} = \begin{cases} H_1(r)\hat{\varphi}, & \varphi \in (0, \alpha) \\ H_2(r)\hat{\varphi}, & \varphi \in (\alpha, 2\pi) \end{cases}$$

Ahora, para poder tener más información sobre **B** y **H** podemos utilizar condiciones de borde.

$$B_2^\perp - B_1^\perp = 0 \quad (1)$$

$$H_2^\parallel - H_1^\parallel = \vec{K}_{\text{libre}} \cdot \hat{k} \quad (2)$$

El **B** total en una interface se compone de la suma entre su componente normal y tangencial, o sea

$$\vec{B} = B^\perp \hat{n} + B^\parallel \hat{t} \quad (3) \quad (\hat{t}: \text{vector tangente a la interface}).$$

Ahora notemos que el campo  $\mathbf{B}$  llega de forma perpendicular (normal) a las interfaces entre los medios, es decir, no hay componente tangencial en esas zonas. Y  $\mathbf{H}$  es proporcional a  $\mathbf{B}$ , así que tampoco posee componente tangencial en la interface, por lo tanto

$$(3) \Rightarrow \vec{B} = B^\perp \hat{n} + \cancel{B^\parallel \hat{t}} \quad \text{con } \hat{t} \rightarrow 0$$

$$\vec{B} = B^\perp \Rightarrow \vec{B}_1 = B_1^\perp \quad \text{y} \quad \vec{B}_2 = B_2^\perp$$

$$(1) \Rightarrow B_1^\perp = B_2^\perp$$

$$\boxed{\vec{B}_1 = \vec{B}_2}$$

Es decir,  $\mathbf{B}$  no cambia entre los medios, es el mismo para todo el interior del toroide, en consecuencia

$$\vec{B} = B(r) \hat{\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

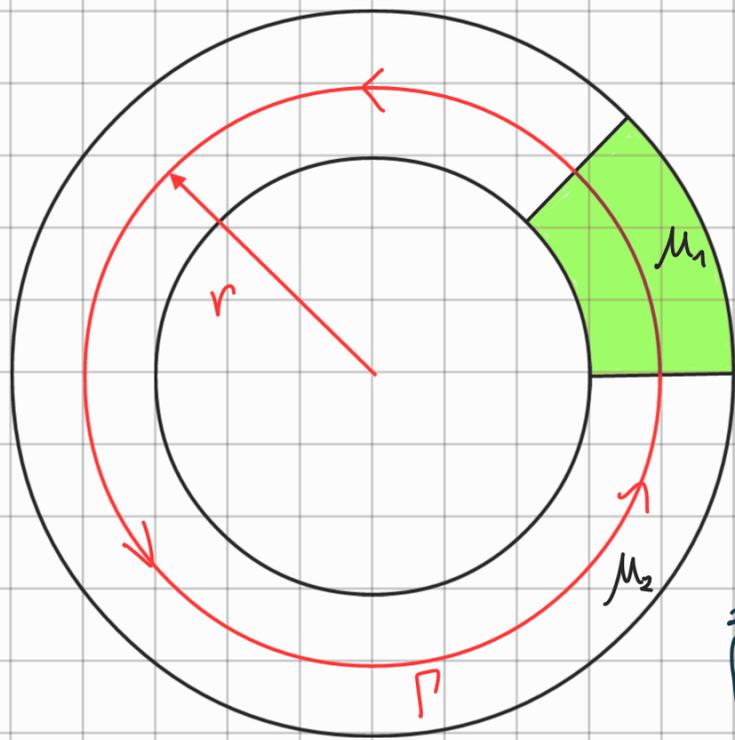
Sin embargo,  $\mathbf{H}$  aún puede ser diferente en ambos medios, por lo que este sigue siendo

$$\vec{H} = \begin{cases} H_1(r) \hat{\varphi}, & \varphi \in (0, \alpha) \\ H_2(r) \hat{\varphi}, & \varphi \in (\alpha, 2\pi) \end{cases}$$

Ahora, para encontrar  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ , podemos usar la ley de Ampère para medios magnéticos gracias a la simetría del problema

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enc}}^{(H)}$$

Para ello debemos construir un camino amperiano  $\Gamma$  que siga la simetría del campo magnético, y como este da vueltas dentro del toroide, lo más conveniente es usar un camino circular, al cual orientaremos en sentido anti-horario.



Notar que este camino se encuentra dentro del toroide.

Así podemos calcular el lado izquierdo de la ley de Ampère como

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \vec{H} \cdot \hat{\phi} r d\phi$$

Y dado que  $H$  cambia según el medio, es necesario separar esta integral según cada uno

$$\int_0^{2\pi} \vec{H} \cdot \hat{\phi} r d\phi = \int_0^{\alpha} \underbrace{H_1}_{1} \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} r d\phi + \int_{\alpha}^{2\pi} \underbrace{H_2}_{1} \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} r d\phi$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{\alpha} H_1 r d\phi + \int_{\alpha}^{2\pi} H_2 r d\phi$$

Usando que  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{\alpha} \frac{1}{\mu_1} B(r) r d\phi + \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{1}{\mu_2} B(r) r d\phi = \frac{1}{\mu_1} B(r) r \int_0^{\alpha} d\phi + \frac{1}{\mu_2} B(r) r \int_{\alpha}^{2\pi} d\phi$$

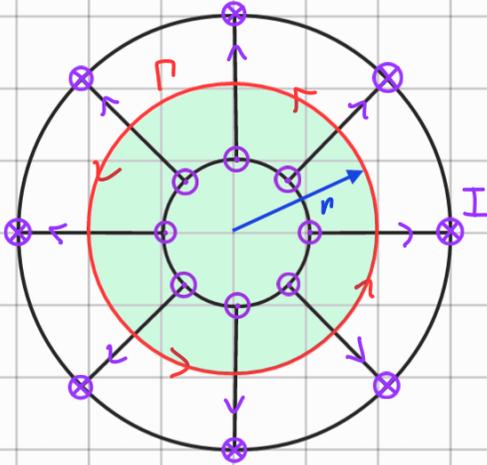
$$= \frac{1}{\mu_1} B r \alpha + (2\pi - \alpha) \frac{1}{\mu_2} B r$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = r B \left( \frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2} \right)$$

Ahora necesitamos el lado derecho de la ley de Ampère, el cual corresponde a la corriente libre enlazada. Cuando hablamos de corriente enlazada, nos referimos a la corriente que está pasando por dentro de nuestro camino amperiano; si pensamos el camino como un lazo, entonces la corriente que pasa por dentro es

la corriente enlazada. Otra manera de verlo es pensar en la corriente que atraviesa la superficie generada por el camino amperiano, como en este caso el camino es un círculo, la superficie será un disco, y toda la corriente que atraviese este disco corresponde a la corriente enlazada.

Si ahora recordamos que nuestro camino está por dentro del toroide, y que por este hay un cable enrollado con corriente, veremos lo siguiente



Veamos que la corriente que viene hacia arriba (la que está por el borde interno del toro) es la corriente que atraviesa la superficie generada por el camino, es decir, la corriente enlazada. Y como tenemos que el cable da  $N$  vueltas alrededor del toroide, habrán  $N$  aportes con corriente  $I$  a la corriente enlazada ( $N$  de esos puntitos morados), es decir

$$I_{\text{enl}}^{(0)} = NI$$

Entonces, por Ley de Ampère

$$rB \left( \frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2} \right) = NI$$

$$B(r) = \frac{NI}{\left( \frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2} \right) r}$$

Y por la simetría

$$\vec{B}(r) = \frac{NI \hat{\varphi}}{\left( \frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2} \right) r}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \frac{NI \hat{\varphi}}{\left( \frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2} \right) r}, & \varphi \in [0, \alpha) \\ \frac{1}{\mu_2} \frac{NI \hat{\varphi}}{\left( \frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2} \right) r}, & \varphi \in (\alpha, 2\pi) \end{cases}$$

b)

$$\mu_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{2\pi \cdot a}{\mu_2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{NI}{\mu_2} = 0$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_1 NI}{\alpha r} \hat{\varphi}$$

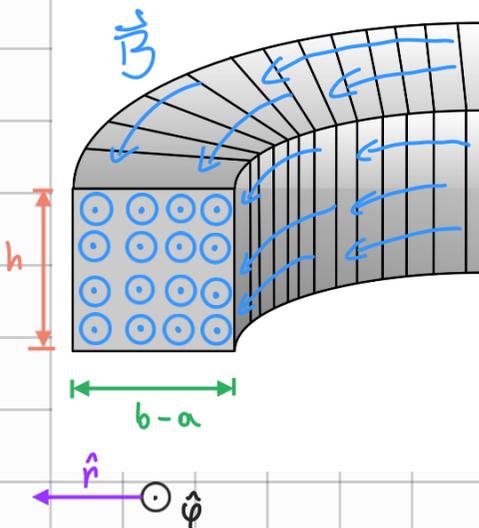
$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{NI \hat{\varphi}}{\alpha r} & , \varphi \in [0, \alpha) \\ 0 & , \varphi \in (\alpha, 2\pi) \end{cases}$$

Nótese que, aunque  $H$  sea 0 para  $\varphi$  entre  $\alpha$  y  $2\pi$ ,  $B$  no es 0 en esa zona, sino que posee el valor que anotamos un poco más arriba.

c)

Flujo de campo magnético

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



Veamos que la superficie que atraviesa  $B$  corresponde a una "cara" del toroide. Orientando la superficie en el mismo sentido que la dirección de  $B$ , y al ser esta superficie un cuadrado, tendremos que el diferencial de superficie será

$$d\vec{S} = dr dz \hat{\varphi}$$

Y dado que el cuadrado tiene altura  $h$  y ancho  $b - a$

$$\Phi = \int_{-h/2}^{h/2} \int_a^b \vec{B} \cdot \hat{\varphi} \, dr \, dz$$

Finalmente, reemplazando el valor conocido para  $B$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_a^b \frac{NI}{\left(\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2}\right) r} \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} \, dr \, dz = \frac{NI}{\left(\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2}\right)} \int_{-h/2}^{h/2} \int_a^b \frac{1}{r} \, dr \, dz \\ &= \frac{hNI}{\left(\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2}\right)} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{hNI}{\left(\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2}\right)} \ln(r) \Big|_a^b = \frac{hNI}{\left(\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2}\right)} \left[ \ln(b) - \ln(a) \right] \end{aligned}$$

$$\Phi = \frac{hNI}{\left(\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2}\right)} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$