P1

a)

Para esta parte se nos pregunta por la velocidad de las partículas tal que estas salgan del selector con la misma velocidad que entraron, es decir, que su velocidad se mantenga constante.
Para saber como cambia la velocidad, debemos conocer las fuerzas que actúan sobre la partícula, las cuales se pueden obtener mediante la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Y usando la orientación de los vectores unitarios dados en el enunciado, podemos escribir

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} \qquad \vec{E} = -E_0\hat{z} \qquad \vec{B} = B_0\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -qE_0\hat{z} + q\left(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}\right) \times B_0\hat{y}$$

$$\vec{F} = -qE_0\hat{z} + qB_0\left(v_x\hat{z} + 0 - v_z\hat{x}\right)$$

$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$; $\hat{y} \times \hat{y} = 0$

$$\vec{F} = -qE_0\hat{z} + qB_0v_x\hat{z} - qB_0v_z\hat{x}$$

$$\boxed{\vec{F} = \left(qv_xB_0 - qE_0\right)\hat{z} - qv_zB_0\hat{x}}$$

Notemos que no hay fuerzas en la dirección *y*, por lo que la velocidad en ese eje se mantiene constante, así solo nos interesa lo que pase en los ejes *x* y *z*, es decir

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_z\hat{z}$$

Ahora, la velocidad y fuerzas se relacionan por la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow m\vec{a} = \left(q v_x B_0 - q E_0\right)\hat{z} - q v_z B_0 \hat{x}$$

Pero $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}$. y $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_z \hat{z}$

$\therefore$

$$m\left(\dot{v}_x \hat{x} + \dot{v}_z \hat{z}\right) = \left(q v_x B_0 - q E_0\right)\hat{z} - q v_z B_0 \hat{x}$$

Por componentes:

$$(1)\quad m\dot{v}_x = -q B_0 v_z$$

$$(2)\quad m\dot{v}_z = q B_0 v_x - q E_0$$

Sistema de EDOs acopladas 🥳

Ahora debemos imponer que la velocidad se mantenga constante, que es lo que nos pedían inicialmente

$$\vec{v} = cte. \Rightarrow \vec{a} = 0 = \dot{\vec{v}}$$

$$(1) \Rightarrow -q B_0 v_z = 0 \Rightarrow \boxed{v_z = 0}$$

$$(2) \Rightarrow q B_0 v_x - q E_0 = 0$$

$$\cancel{q} B_0 v_x = \cancel{q} E_0$$

$$\boxed{v_x = E_0/B_0}$$

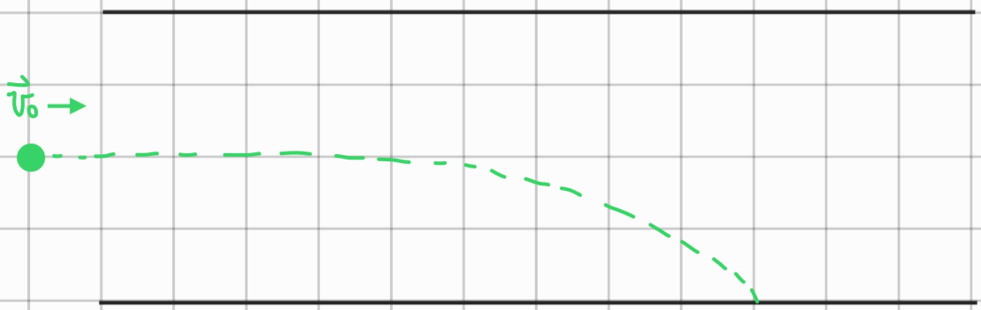
$\therefore$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{E_0}{B_0}\hat{x}}$$

Que es la velocidad inicial necesaria para que las partículas no sean desviadas.

b)

Ahora nos piden una relación entre la masa m y carga q de las partículas tal que estas logren escapar del selector sin chocar con la placa inferior.
La trayectoria de las partículas se verá como algo así



Y lo que queremos es que las partículas salgan del selector antes de chocar con la placa inferior, es decir algo como esto

Para poder escribir esta condición matemáticamente, debemos elegir un origen para el sistema de coordenadas. Si colocamos el origen justo en el punto por donde las partículas entran a las placas, la condición queda como

$$z(t=\tau) = -\frac{h}{2}$$

$$x(t=\tau) > L$$

Esto nos dice que, para un tiempo τ, donde la altura de la partícula será $-h/2$ (o sea que está a la misma altura de la placa inferior), la posición en x para ese mismo tiempo τ deberá ser mayor a L, ya que ese es el largo de las placas. En particular podemos resolver para el caso límite $x(t=\tau) = L$ y así evitar trabajar con desigualdades.
Ahora, para hacer esto, debemos conocer $x(t)$ y $z(t)$, para ello es necesario resolver el sistema de EDOs.

(1) $m\dot{v}_x = -qB_0 v_z$

(2) $m\dot{v}_z = qB_0 v_x - qE_0$

Derivando (1)

$m\ddot{v}_x = -qB_0\dot{v}_z$ (3)

Y usando (2) en (3)

$$m\ddot{v}_x = -qB_0\left(\frac{qB_0}{m}v_x - \frac{qE_0}{m}\right)$$

$$\ddot{v}_x = \frac{-q^2B_0^2}{m^2}v_x + \frac{q^2B_0E_0}{m^2}$$

Definiendo $\omega_0 \equiv \frac{qB_0}{m}$

$$\boxed{\ddot{v}_x = -\omega_0^2 v_x + \frac{q\omega_0 E}{m}}$$ (4) $\longrightarrow$ EDO inhomogénea.

Este tipo de EDOs se resuelven buscando una solución homogénea y una solución particular, finalmente la solución general será la suma de la particular y la homogénea.

Sol. homogénea:

$\ddot{v}_x^{(h)} = -\omega_0^2 v_x \longrightarrow$ MAS

$$\Longrightarrow \boxed{v_x^{(h)}(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)}$$

Sol. particular

Aquí sirve cualquier cosa que resuelva la EDO, por lo general se usa una solución de prueba la que es reemplazada en la EDO para ver si funciona bien.

Solución de prueba:

$$v_x^{(p)}(t) = K \longrightarrow \text{cte.}$$

Reemplazando en (4)

$$0 = -\omega_0^2 K + \frac{q\omega_0 E_0}{m} \Rightarrow K = \frac{qE_0}{\omega_0 m}$$

$$\therefore \quad v_x^{(p)} = \frac{qE_0}{\omega_0 m} \longrightarrow v_x^{(p)} = \frac{\cancel{q}}{\cancel{m}} \frac{E_0}{\left(\frac{\cancel{q}B_0}{\cancel{m}}\right)}$$

$$\frac{qE_0}{\omega_0 m} = E_0/B_0 \quad \star$$

$$\boxed{v_x^{(p)} = E_0/B_0}$$

Sol. general

$$v_x(t) = v_x^{(h)} + v_x^{(p)}$$

$$v_x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{E_0}{B_0}$$

Imponiendo condiciones iniciales

$$v_x(t=0) = v_0 = C_1 + \frac{E_0}{B_0} \Rightarrow C_1 = \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)$$

$$\therefore \quad v_x(t) = \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right) \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{E_0}{B_0}$$

$$\dot{v}_x(t) = \left(\frac{E_0\omega_0}{B_0} - \omega_0 v_0\right)\sin(\omega_0 t) + C_2\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

Reemplazando en (1)

$$\left(\frac{E_0\omega_0}{B_0} - \omega_0 v_0\right)\sin(\omega_0 t) + m C_2\omega_0\cos(\omega_0 t) = -qB_0 v_z(t)$$

Condición incial $t=0 \Rightarrow v_z(t=0)$

$$C_2 m\omega_0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x(t) = \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{E_0}{B_0}} \quad (5)$$

$$\boxed{\dot{v}_x(t) = \left(\frac{E_0}{B_0} - v_0\right)\omega_0\sin(\omega_0 t)} \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (1):

$$\boxed{\begin{aligned}(1)\ & m\dot{v}_x = -qB_0 v_z \\ (2)\ & m\dot{v}_z = qB_0 v_x - qE_0\end{aligned}}$$

$$m\left(\frac{E_0}{B_0} - v_0\right)\omega_0\sin(\omega_0 t) = -qB_0 v_z$$

$$\Rightarrow v_z = \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)\omega_0 \underbrace{\frac{m}{qB_0}}_{\omega_0^{-1}}\sin(\omega_0 t)$$

$$\therefore \boxed{v_z(t) = \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)\sin(\omega_0 t)} \quad (7)$$

Integrando (7)

$$z(t) = \left(\frac{E_0}{\omega_0 B_0} - \frac{v_0}{\omega_0}\right)\cos(\omega_0 t) + C_3$$

Condición inicial: $t=0 \Rightarrow z(t=0)=0$

$$0 = \frac{E_0}{\omega_0 B_0} - \frac{v_0}{\omega_0} + C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{v_0}{\omega_0} - \frac{E_0}{\omega_0 B_0}$$

$\therefore$

$$\boxed{z(t) = \left(\frac{E_0}{\omega_0 B_0} - \frac{v_0}{\omega_0}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} - \frac{E_0}{\omega_0 B_0}} \quad (8)$$

Integrando (5)

$$v_x(t) = \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{E_0}{B_0} \Big/ \int dt$$

$$x(t) = \left(v_0 - \frac{E_0}{B_0}\right)\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \frac{E_0}{B_0} t + C_4$$

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{E_0}{\omega_0 B_0}\right)\sin(\omega_0 t) + \frac{E_0}{B_0} t + C_4$$

Condición inicial:

$$x(t=0) = 0 = C_4$$

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{E_0}{\omega_0 B_0}\right)\sin(\omega_0 t) + \frac{E_0}{B_0} t$$

$$\boxed{x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{E_0}{\omega_0 B_0}\right)\sin(\omega_0 t) + \frac{E_0}{B_0} t} \quad (9)$$

Para encontrar la razón masa/carga solicitada, llamaremos τ al tiempo donde las partículas llegan a $z = -h/2$. Luego, para que las partículas logren escapar del canal, se deberá cumplir $x(t=\tau) > L$

Usando (8)

$$z(t=\tau) = -\frac{h}{2} = \left(\frac{E_0}{\omega_0 B_0} - \frac{v_0}{\omega_0}\right)\cos(\omega_0\tau) + \frac{v_0}{\omega_0} - \frac{E_0}{\omega_0 B_0}$$

$$\left(\frac{E_0}{\omega_0 B_0} - \frac{v_0}{\omega_0}\right)\cos(\omega_0\tau) = \left(\frac{E_0}{\omega_0 B_0} - \frac{v_0}{\omega_0}\right) - \frac{h}{2}$$

$$\cos(\omega_0\tau) = \frac{\cancel{\left(\frac{E_0}{\omega_0 B_0} - \frac{v_0}{\omega_0}\right)}}{\cancel{\left(\frac{E_0}{\omega_0 B_0} - \frac{v_0}{\omega_0}\right)}} - \frac{h}{2\left(\frac{E_0}{\omega_0 B_0} - \frac{v_0}{\omega_0}\right)}$$

$$\cos(\omega_0\tau) = 1 - \frac{h\,\omega_0 B_0}{2(E_0 - v_0 B_0)}$$

$$\boxed{\tau = \omega_0^{-1}\arccos\left(1 - \frac{h\,\omega_0 B_0}{2(E_0 - v_0 B_0)}\right)}$$

Ahora reemplazamos este tiempo en x(t)

$$x(t=\tau) = L = \left(\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{E_0}{\omega_0 B_0}\right)\sin(\omega_0\tau) + \frac{E_0}{B_0}\tau$$

$$L = \left(\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{E_0}{\omega_0 B_0}\right)\sin\left[\cancel{\omega_0}\,\cancel{\omega_0^{-1}}\arccos\left(1 - \frac{h\,\omega_0 B_0}{2(E_0 - v_0 B_0)}\right)\right] + \frac{E_0}{B_0}\omega_0^{-1}\arccos\left(1 - \frac{h\,\omega_0 B_0}{2(E_0 - v_0 B_0)}\right)$$

$$L = \left(\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{E_0}{\omega_0 B_0}\right)\sin\left[\cancel{\omega_0}\,\cancel{\omega_0^{-1}}\arccos\left(1 - \frac{h\,\omega_0 B_0}{2(E_0 - v_0 B_0)}\right)\right] + \frac{E_0}{B_0}\omega_0^{-1}\arccos\left(1 - \frac{h\,\omega_0 B_0}{2(E_0 - v_0 B_0)}\right)$$

$$L = \left(\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{E_0}{\omega_0 B_0}\right)\sin\left[\arccos\left(1 - \frac{h\,\omega_0 B_0}{2(E_0 - v_0 B_0)}\right)\right] + \frac{E_0}{\omega_0 B_0}\arccos\left(1 - \frac{h\,\omega_0 B_0}{2(E_0 - v_0 B_0)}\right)$$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \left(\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{E_0}{\omega_0 B_0}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{h\omega_0 B_0}{2(E_0 - v_0 B_0)}\right)^2} + \frac{E_0}{\omega_0 B_0}\arccos\left(1 - \frac{h\omega_0 B_0}{2(E_0 - v_0 B_0)}\right)}$$

No olvidar que $\omega_0 = \frac{q B_0}{m}$

Ecuación trascendental para q/m. Esta no puede ser resuelta de forma analítica y en general no posee solución única. Normalmente se resuelven de forma numérica (con un computador).