Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 20: Momento dipolar magnético

P1. Sistema anti-gravedad

Considere un cicuito constituido por una fuente de voltaje, un cable recto, un enrrollado conductor y finalmente otro cable recto conectado a tierra. Por este circuito corre una corriente desconocida I. Los cables rectos tienen una densidad de $D[kg/m]$ y el enrrollado una masa despreciable. En el centro el conductor esta enrrollado de manera que cada circulo concentrico se encuentra en el mismo plano. Las circunferencias son de R, $2R$ y $3R$. Debe considerar que el plano del enrrollado puede rotar en el eje que forman los cables rectos.

Existe en todo el espacio un campo magnetico uniforme perpendicular al cable recto y a la gravedad de magnitud B.

Determine:

a) La corriente minima necesaria para que el conductor se mantenga suspendido pese a la gravedad.

b) Dada esta corriente encuentre el torque que experimenta el enrrollado, debido al campo magnetico $\vec{B}$, en el eje de rotación señalado. Esto en funcion del angulo que forma el plano del enrrollado con el campo $\vec{B}$.

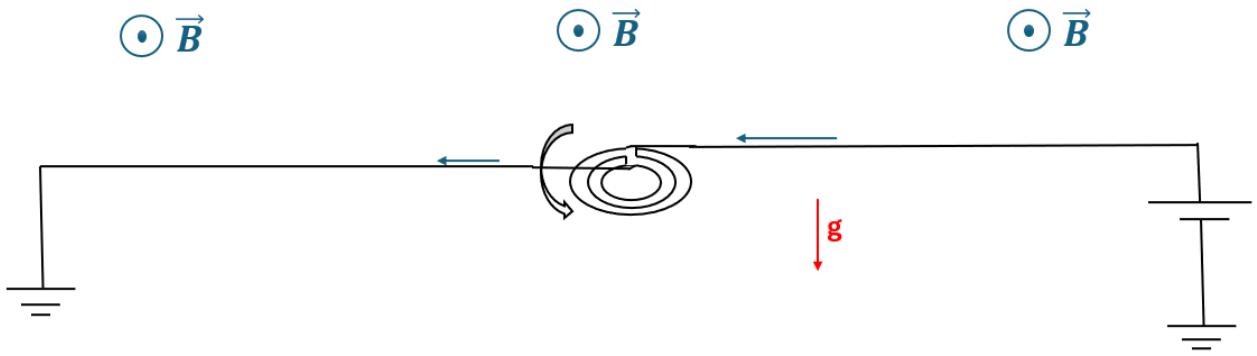


Figura 1: Circuito.

Made with Goodnotes

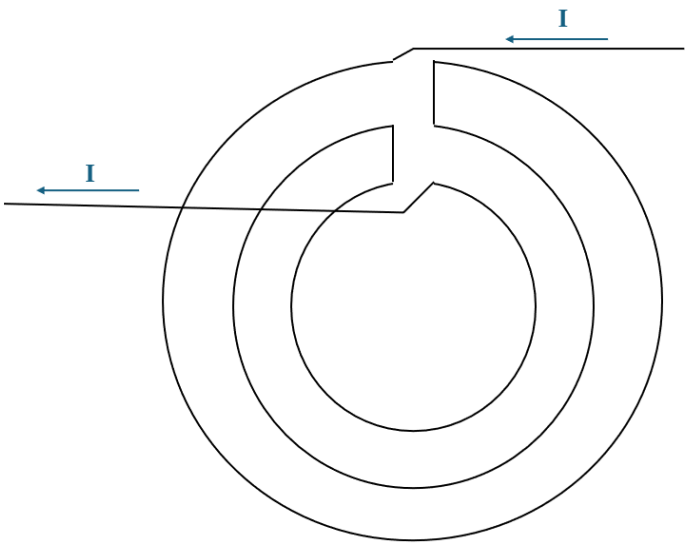


Figura 2: Enrrollado.

Made with Goodnotes

Resumen

Fuerza de Lorentz

En presencia de un campo magnético, la partícula experimenta una fuerza:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Donde q es la carga de la partícula, $\vec{v}$ su velocidad y $\vec{B}$ el campo magnético que percibe.
La fuerza de Lorentz se define como la suma de la fuerza eléctrica y la fuerza magnética:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \vec{F}_{\text{elec}} + \vec{F}_{\text{mag}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

En el caso de calcular la fuerza que experimenta un conductor con corriente I, se utiliza la siguiente expresión derivada de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = \int I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

Donde $d\vec{l}$ es el elemento de longitud en la dirección de la corriente.
Para distribuciones superficiales o volumétricas de corriente, se generaliza como:

$$\vec{F} = \iint \vec{K} \times \vec{B}\, dS \quad \text{(sobre una superficie)}$$

$$\vec{F} = \iiint \vec{J} \times \vec{B}\, dV \quad \text{(sobre un volumen)}$$

Momento Dipolar Magnético y Dipolo Magnético

El momento dipolar magnético $\vec{m}$ de una configuración viene dado por:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{J}\, dV$$

Esta ecuación se puede reducir simplemente a:

$$\vec{m} = I\vec{A}$$

En la fórmula anterior, $\vec{A}$ representa el área orientada, no el potencial vector.
Cuando aproximamos dipolarmente, se tiene que el potencial vector magnético $\vec{A}(\vec{r})$ para un dipolo puntual de momento dipolar $\vec{m}$ es:

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Al obtener el rotor de $\vec{A}$, se puede llegar a la expresión del campo magnético de un dipolo.

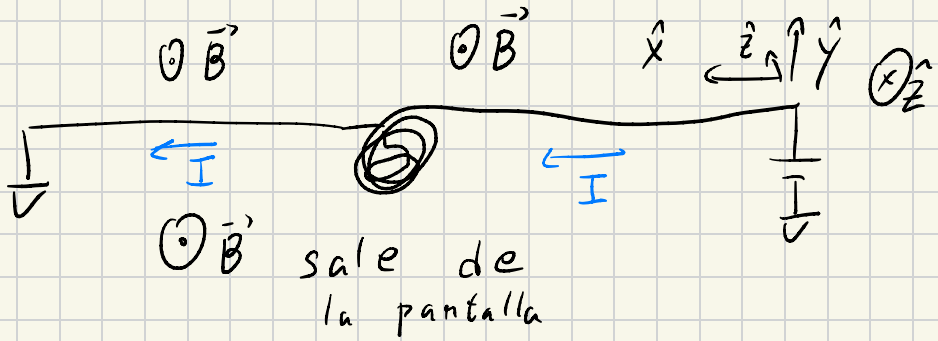
Torque en un Dipolo Magnético

La expresión para el torque en un dipolo magnético es:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

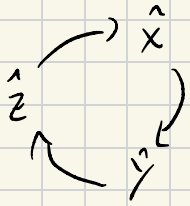
Made with Goodnotes

$$\vec{F}_{mag} = \int \vec{I}\, d\vec{l} \times \vec{B}$$



$$\vec{I} = I\hat{x}$$

$$\vec{B} = -B\hat{z}$$



$$\vec{F}_{mag} = \int I\hat{x}\, dl \times B(-\hat{z})$$

$$\vec{F}_{mg} = I B \hat{y} \int dl$$

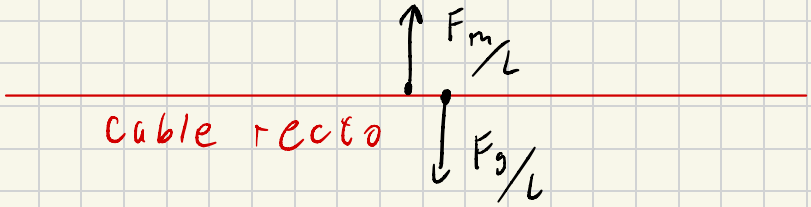
$$\vec{F} = I B \cdot L_{largo}\, \hat{y}$$

$$\Rightarrow \text{Fuerza por unidad de largo} = \vec{F}_{/L} = I B \hat{y}$$

Esta fuerza por unidad de largo magnetica debe ser al menos igual a la fuerza de gravedad por unidad de largo para que el conductor se mantenga en suspencion.

$$\vec{F}_g \text{ por unidad de largo} = \frac{\vec{F}_g}{L} = \frac{m \cdot \vec{g}}{L} = D \cdot \vec{g} = D g(-\hat{y})$$

(D: Densidad lineal (dato))



$$\frac{F_m}{L} + \frac{F_g}{L} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0$$

Made with Goodnotes

$$\Rightarrow D\,g(-\hat{y}) + B\,I\,\hat{y} = 0$$

$$\Rightarrow D\,g = B\,I$$

$$\Rightarrow I = \frac{D\,g}{B}$$

Corriente minima necesaria para que el conductor no se caiga por la gravedad.

b) Ahora que conocemos conocemos la corriente debemos calcular el torque que experimenta el enrrollado. Para esto usaremos la aproximación dipolar magnetica que cumple con:

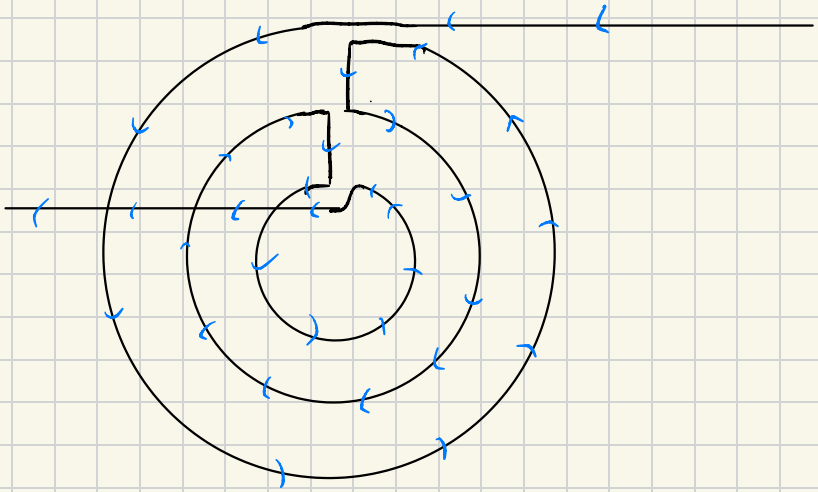
$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_{ext}$$

Con esto solo nos basta encontrar el momento dipolar magnetico del enrrollado y realizar la operacion vectorial simple.

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}' \times \vec{J}\, dV$$

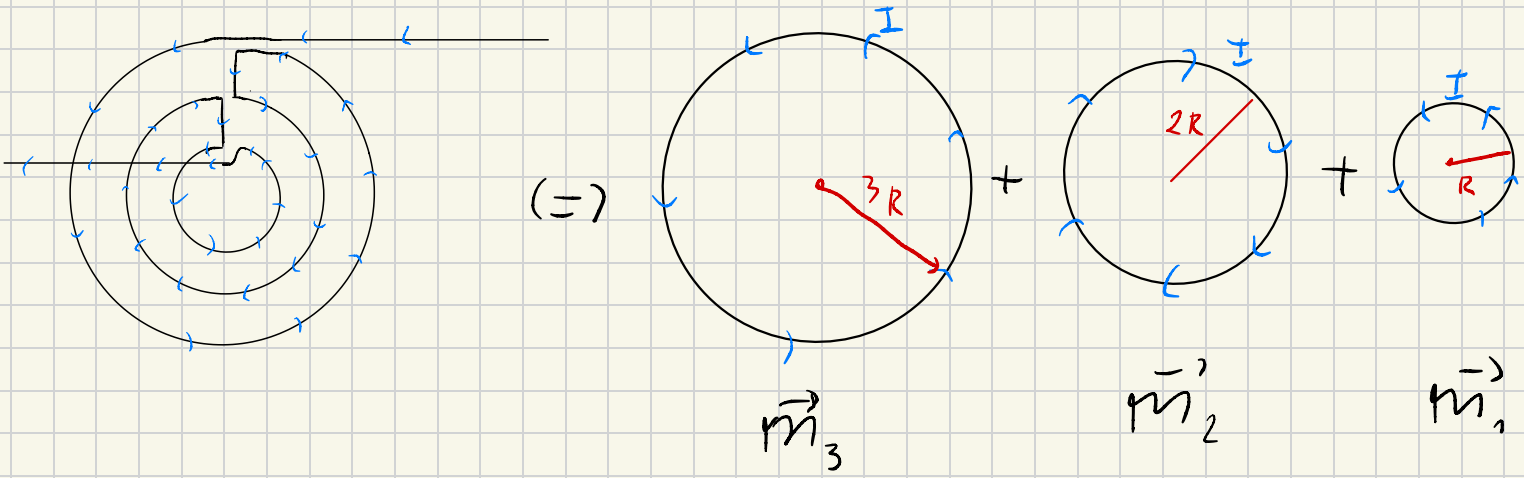
Para el caso de una espira circular: $\vec{m} = I \cdot A \cdot \hat{n}$

donde A es el area de esta $A = \pi r^2$



Made with Goodnotes

El enrrollado se puede entender como la superposición de tres espiras circulares con la misma corriente y mismo centro.



$\vec{m}_3$ $\vec{m}_2$ $\vec{m}_1$

Notemos que la espira de radio 2R tiene un sentido de la corriente opuesto a la de las otras dos. Impondremos como referencia el vector normal a las espiras resultante de usar la ley de la mano derecga con el sentido de la corriente en las espiras R y 3R.

Al ser espiras circulares $\vec{m} = I \pi r^2 \hat{n}$

$\Rightarrow \vec{m}_1 = I \pi R^2 \hat{n}$

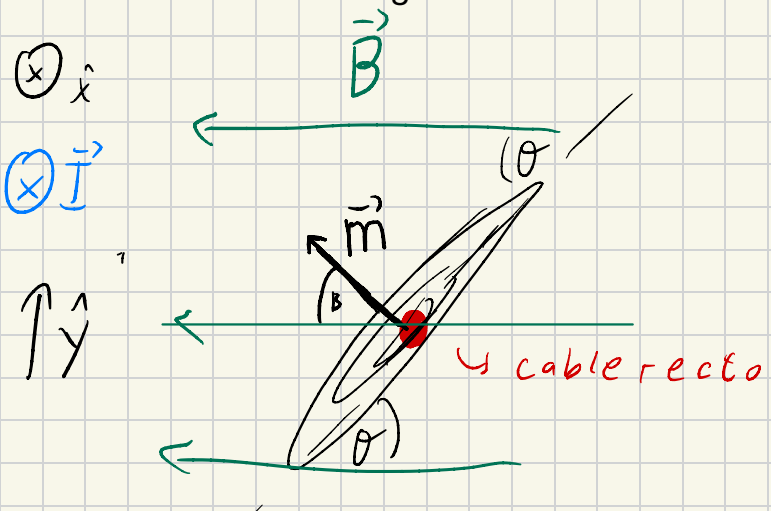
$\vec{m}_2 = I \pi 4 R^2 (-\hat{n})$ Negativo por el sentido de la corriente.

$\vec{m}_3 = I \pi 9 R^2 \hat{n}$

$\vec{m}_{total} = \sum^3 \vec{m}_i = I \pi R^2 \hat{n} (1 - 4 + 9) = 4 \pi I R^2 \hat{n}$

Made with Goodnotes

Ahora analicemos la geometria del sistema visto desde el eje de rotacion x



θ: Angulo que forma el plano con $\vec{B}$

$\beta = \pi/2 - \theta$: Angulo que forma m con $\vec{B}$

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_{ext} = m B \operatorname{sen}(\beta)$$

$$= m B \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta)$$

$$= 4\pi I R^2 B \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta)$$

$$= 4\pi \frac{Dg}{B} R^2 B \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta)$$

$$= 4\pi Dg R^2 \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta)$$

La direccion de este torque es aquella que produsca una aliniación entre m y B. Tanto en direccion como en sentido.

Made with Goodnotes