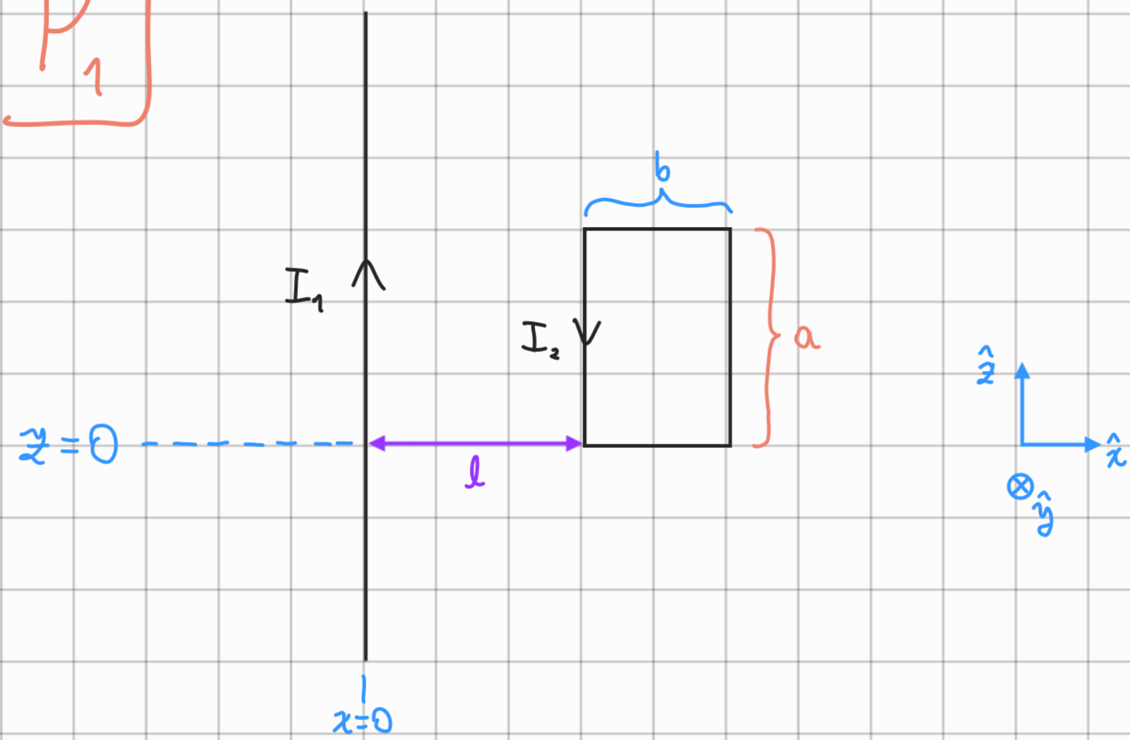
P1



La fuerza que experimenta el circuito rectangular será una consecuencia de la Fuerza de Lorentz, la cual nos dice que una carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$, sumergida en un campo magnético $\vec{B}$ experimentauna fuerza igual a:

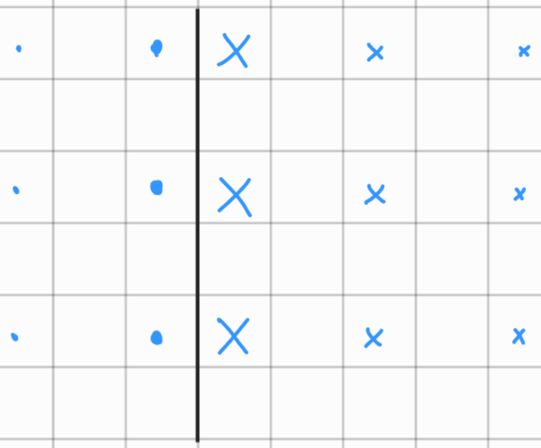
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Empecemos por el campo magnético que produce el cable infinito. Como se vio en cátedra, este cable genera un campo igual a:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

Las líneas de campo se verán de la siguiente manera:

El campo magnético se "envuelve" alrededor de la dirección en la que fluye la corriente.
Como la espira rectangular se encuentra en el plano XZ, solo nos interesa la dirección del campo **B** sobre este plano, con ayuda del dibujo de arriba podemos ver que el campo sobre este plano se verá como:



Donde los puntos indican que el campo está "saliéndo" hacia afuera de la hoja, mientras que las cruces indican que en esa zona el campo "entra" hacia la hoja. Y dada la elección de nuestros vectores unitarios, podremos decir que el campo magnético en el lado derecho del cable (que es donde está el circuito) apunta en $\hat{y}$, es decir $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{y}$

Otra forma de ver esto es considerando que:

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\left(-\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}\right)$$

Y el plano XZ corresponde a $\varphi = 0$

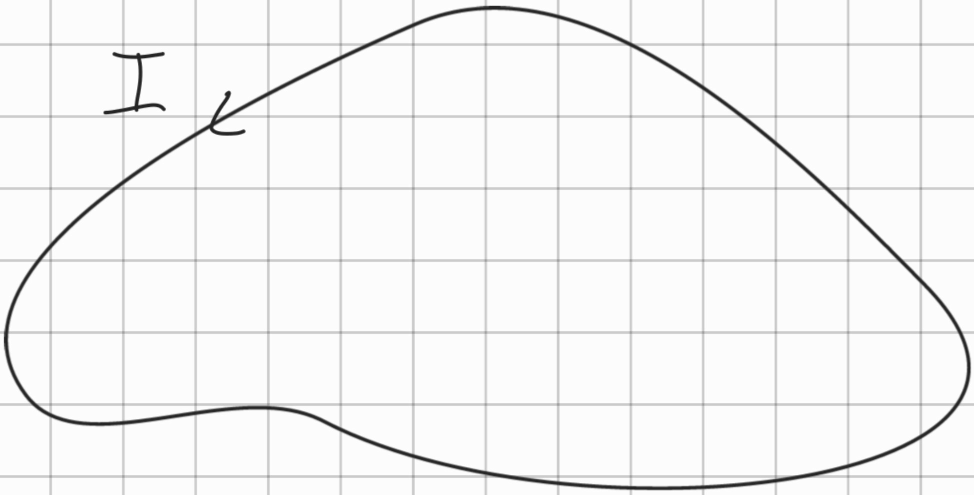
$\therefore$ el campo en este plano será

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{y}$$

Pero como solo estamos interesados en el plano XZ, y el campo magnético no depende de *z*, podemos escribir

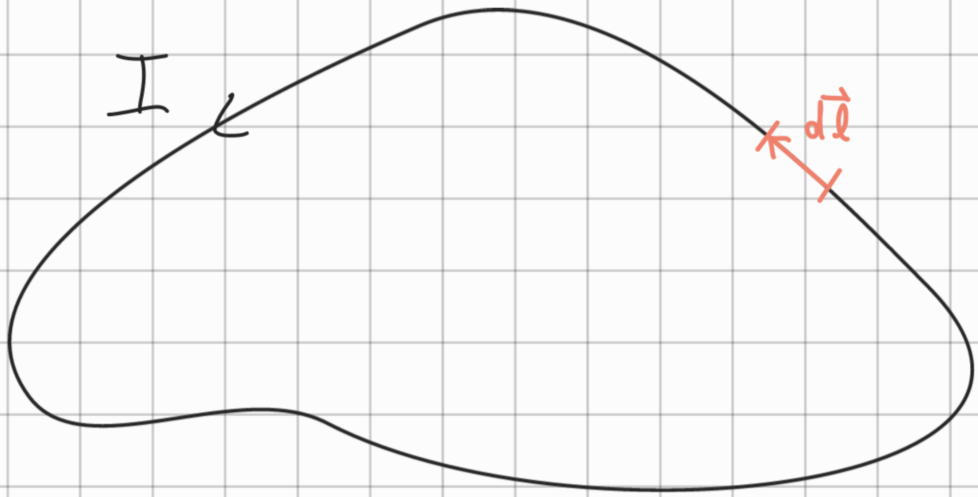
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\,\hat{y}}$$

Ahora vamos con la Fuerza de Lorentz.
Pensemos en un circuito de forma arbitraria por el que fluye una corriente *I*



Si este circuito se encuentra inmerso en un campo magnético **B**, necesariamente habrá una fuerza actuando sobre él, pues la corriente es movimiento de cargas, y sabemos que cuando una carga se mueve en un campo magnético, esta sufre una fuerza. Pero ¿cómo calculamos esta fuerza?

Tomemos un pedacito de largo dl de nuestro circuito, demosle alguna orientación, de modo que nos quede $d\vec{l}$



Este pedacito de cable posee un "pedacito" de carga *dQ*, y sabemos que además esta carga se está moviendo a lo largo del cable, pues existe una corriente *I*, la cual se define como

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Y la velocidad con la que la carga se mueve en ese punto del cable será

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

Por lo que debido a la Fuerza de Lorentz, este pedacito de cable experimentará un pedacito de fuerza que se verá como:

$$d\vec{F} = dQ\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Ahora hacemos algo de álgebra para escribir esto en términos de cosas conocidas

$$d\vec{F} = dQ\,\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = \frac{dQ}{dt}\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

Esta es la fuerza que experimenta el pedacito de cable. Ahora, para saber la fuerza que siente el circuito entero, necesitamos saber la fuerza que siente cada pedacito de este, y luego sumar todas esas contribuciones (superposición), por fortuna esto podemos hacerlo mediante integración, o sea:

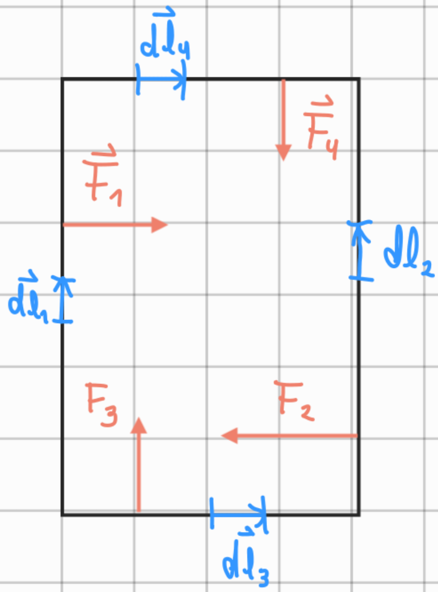
$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B} \quad \Big/ \int$$

$$\boxed{\vec{F} = \int I\,d\vec{l} \times \vec{B}}$$

Y con esta fórmula podremos calcular la fuerza que siente un circuito cualquiera que este inmerso en un campo magnético.

Volviendo a nuestro problema, el circuito tiene 4 partes, sobre las cuales podemos calcular la fuerza individualmente

y para encontrar la fuerza total solo deberemos sumar las 4 fuerzas individuales.
Las fuerzas que siente cada pedazo serán y nuestros diferenciales de camino $(d\vec{l})$ serán:



Empezamos por $\vec{F}_1$

$$\vec{F}_1 = \int I \, d\vec{l}_1 \times \vec{B}$$

Como esta línea está en $x = \ell$ y orientamos el diferencial de camino hacia arriba, nos queda

$$\vec{F}_1 = \int_0^a I \, dz \, \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \ell} \hat{y}$$

por otro lado, como la corriente fluye en el sentido **opuesto** al de la orientación del diferencial de camino (*dl*), tendremos que

$$\vec{F}_1 = \int_0^a (-I_2) \, dz \, \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \ell} \hat{y}$$

$$\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$$

$$\vec{F}_1 = -I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi l} (\hat{z} \times \hat{y}) \int_0^a dz \qquad \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$$

$$\boxed{\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi l} \hat{x}}$$

Para F_2 la línea se encuentra en $x = l + b$, mientras que que la corriente fluye en el mismo sentido de ***dl***, por tanto

$$\vec{F}_2 = \int_0^a I_2 \, dz \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (l+b)} \hat{y}$$

$$\boxed{\vec{F}_2 = \frac{-\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi (l+b)} \hat{x}}$$

En el caso de $\vec{F}_3$ tenemos que el cable está a lo largo del eje x, por lo que deberemos dejar la dependencia de *x* en el campo Por lo demás, la corriente fluye en el mismo de ***dl***, entonces

$$\vec{F}_3 = \int_l^{l+b} I_2 \, dx \hat{x} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \hat{y} \quad (\star) \qquad \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\hat{z}\int_{l}^{l+b}\frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\vec{F}_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(\frac{l+b}{l}\right)\hat{z}}$$

$\vec{F}_4$ es análogo al caso anterior, con la diferencia de que en este tramo la corriente fluye en el sentido opuesto a ***dl***, de modo que tendremos

$$\vec{F} = \int_{l}^{l+b}(-I_2)\,dx\,\hat{x}\times\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\hat{y}$$

Pero esto es simplemente $-\vec{F}_3$ $(\star)$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{F}_4 = -\vec{F}_3}$$

Finalmente, al sumar las fuerzas encontramos que la fuerza total es

$$\boxed{\vec{F}_T = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+a}\right)\hat{x}}$$

P2

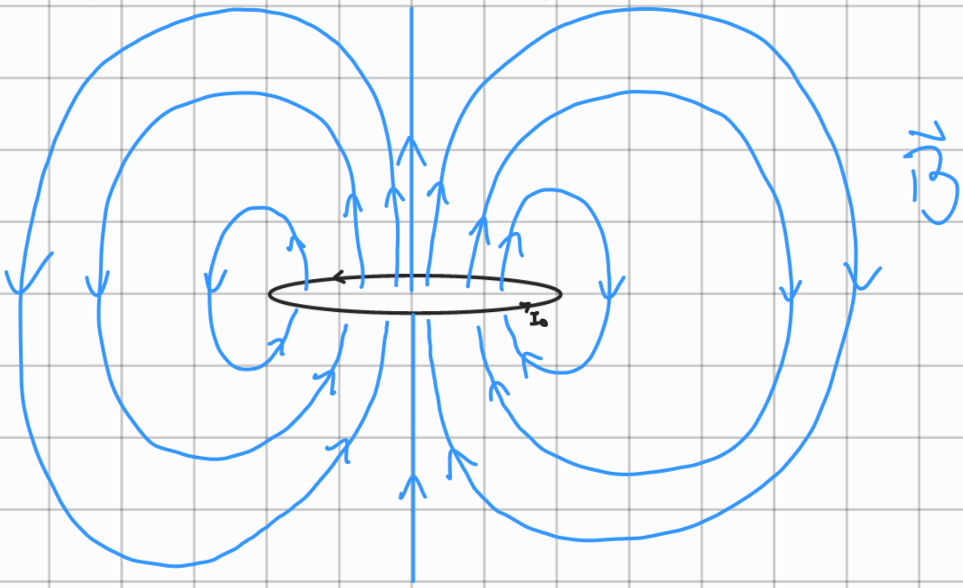
Notemos que en este sistema la espira cuadrada en el medio exprimenta 2 torques, el primero será el torque restaurador $k\theta$ proveniente del motor, y el segundo torque será el que ejercen los campos magnéticos de las espiras circulares grandes, y que nos piden es el ángulo de equilibrio, es decir, el θ tal que la suma de torques sea igual a 0

$$\boxed{\vec{\tau}_R + \vec{\tau}_M = 0}$$

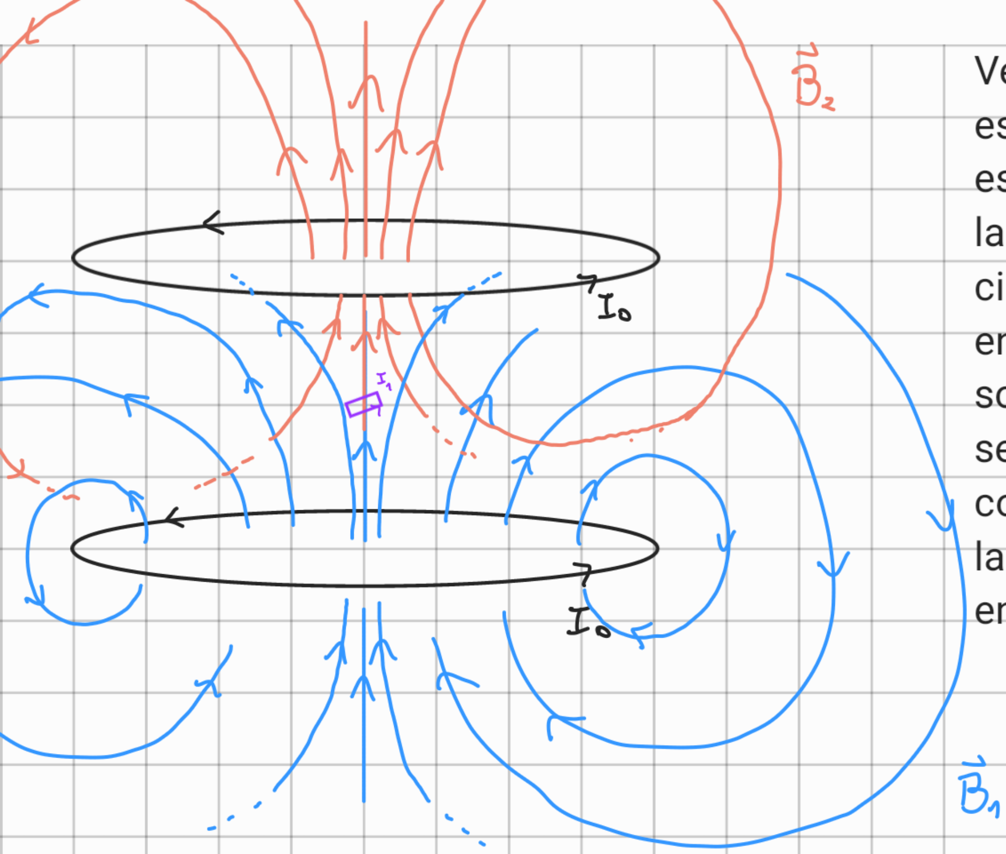
$\vec{\tau}_R$: Torque restaurador

$\vec{\tau}_M$: Torque magnético

Dado que el torque restaurador es conocido, ahora solo nos queda calcular el torque magnético, y para ello, lo primero que necesitamos saber es el campo magnético que actúa sobre la espira cuadrada. El campo generado por una sola espira circular se ve de la siguiente forma

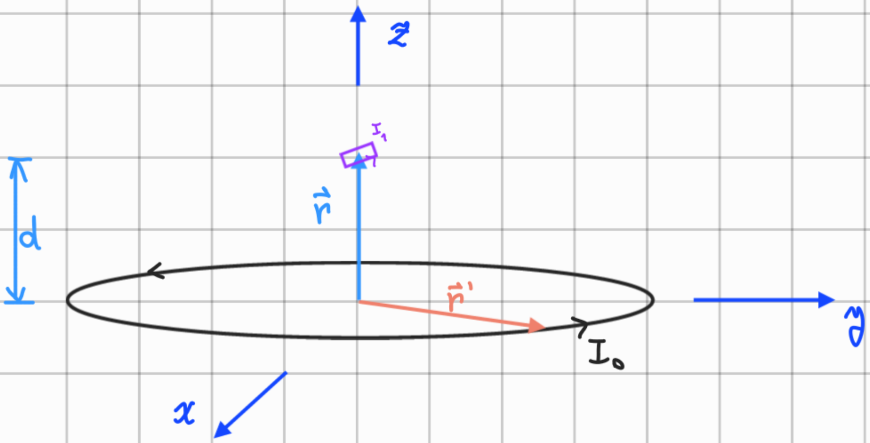


Notemos que en este caso se nos dice que los radios de las espiras ciruclares son mucho más grandes que el lado de la espira cuadrada (b >> a) y que la separación entre las espiras circulares es mucho más pequeña que estos radios (d << b).
Ahora, si dibujamos los campos generados por las espiras circulares, veremos algo como lo siguiente



Veamos entonces que como la espira cuadrada (color morado) es muy pequeña, sumado a que la separación entre espiras circulares es también pequeña, entonces el campo magnético sobre la espira cuadrada puede ser aproximado únicamente como el campo magnético que las espiras circulares generan en su eje de simetría.

Por otro lado, dado que ambas espiras circulares poseen el mismo radio, corriente y se encuentran a la misma distancia de la espira cuadrada, basta con calcular el campo que genera una de estas en su eje y luego multiplicar el resultado por 2 para incluir el campo de la segunda espira circular.
El campo de una espira en su eje lo podemos calcular mediante Biot-Savart

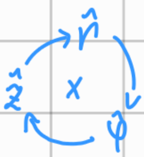


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I\, d\vec{l} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$\vec{r} = d\hat{z}$ $\qquad$ $\vec{r}' = b\hat{r}$ $\qquad$ $d\vec{l} = b\,d\varphi\,\hat{\varphi}$ $\qquad$ $|\vec{r}-\vec{r}'|^3 = (d^2+b^2)^{3/2}$

Reemplazando:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} I_0\, b\, d\varphi\, \hat{\varphi} \times \frac{d\hat{z} - b\hat{r}}{(d^2+b^2)^{3/2}}$$



$$= \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi (d^2+b^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d(\hat{\varphi}\times\hat{z}) - b(\hat{\varphi}\times\hat{r})\, d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi(d^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \cancelto{0}{d\hat{r}} + b\hat{z}\, d\varphi$$

Recordar: $\hat{r} = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}$

$$= \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi(d^2+b^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} b\hat{z}\, d\varphi = \frac{\mu_0 I_0 b}{\underset{2}{\cancel{4\pi}}(d^2+b^2)^{3/2}} \cancel{2\pi} b\hat{z}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_0 b^2}{2(d^2+b^2)^{3/2}}\hat{z}$$

$\therefore$ el $\vec{B}$ total es:

$$\boxed{\vec{B}_T = \frac{\mu_0 I_0 b^2}{(d^2+b^2)^{3/2}}\hat{z}}$$

Ahora, para calcular el torque que este campo ejerce sobre la espira cuadrada, podemos calcular el momento dipolar magnético de esta (**m**) y luego usar la relación

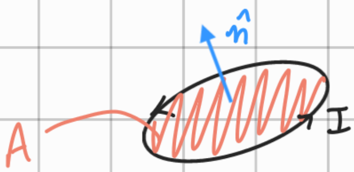
$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

El momento dipolar se calcula como

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} \vec{r}\,' \times I\,d\vec{l}\,'$$

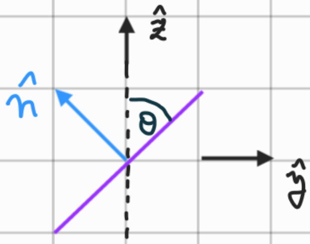
Se puede demostrar que, para circuitos planos, esta expresión es igual a

$$\vec{m} = IA\hat{n}$$

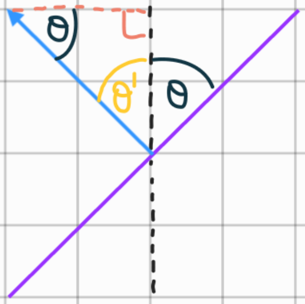


Donde *A* es el área delimitada por el circuito y $\hat{n}$ es la normal a la superficie que delimita el circuito y cuya orientación se escoge en base a la regla de la mano derecha. Ahora solo nos queda encontrar esta normal.

Observando el sistema de perfil, tenemos lo siguiente para la espira cuadrada



Por lo que podemos descomponer el vector normal en función del ángulo θ que esta forma con el eje z



θ': Complemento de θ $\left(\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta\right)$

negativo pq. el vector apunta a la izquierda, e $\hat{y}$ apunta a la derecha.

$\Rightarrow$ $\beta = \sin\theta$ y $\alpha = \cos\theta$

$$\therefore \quad \hat{n} = \sin\theta\,\hat{z} - \cos\theta\,\hat{y}$$

Así entonces

$$\vec{m} = I A \hat{n}$$

$$\vec{m} = I_1 a^2 \left(\sin\theta\,\hat{z} - \cos\theta\,\hat{y}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_M = I_1 a^2 \left(\sin\theta\,\hat{z} - \cos\theta\,\hat{y}\right) \times \frac{\mu_0 I_0 b^2}{(d^2+b^2)^{3/2}}\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 I_1 a^2 b^2}{(d^2+b^2)^{3/2}} \left(\sin\theta\,\underbrace{\hat{z}\times\hat{z}}_{=0} - \cos\theta\,\hat{y}\times\hat{z}\right)$$

$$\vec{\tau}_M = \frac{-\mu_0 I_0 I_1 a^2 b^2}{(d^2+b^2)^{3/2}} \cos\theta\,\hat{x}$$

Finalmente, en el equilibrio se cumple

$$\vec{\tau}_R + \vec{\tau}_M = 0$$

$$k\theta'\hat{x} - \frac{\mu_0 I_0 I_1 a^2 b^2}{(d^2+b^2)^{3/2}} \cos\theta'\hat{x} = 0 \quad / \cdot \hat{x}$$

θ': ángulo de eq.

$$k\theta' - \frac{\mu_0 I_0 I_1 a^2 b^2}{(d^2+b^2)^{3/2}} \cos\theta' = 0$$

$$\boxed{k\theta' = \frac{\mu_0 I_0 I_1 a^2 b^2}{(d^2+b^2)^{3/2}} \cos\theta'}$$

Esto es lo que se conoce como una ecuación trascendental para θ', pues no puede ser resuelta de forma algebráica y en general la solución no es única. Normalmente las soluciones se encuentran de forma numérica (con un computador), también existen métodos iterativos para encontrar soluciones aproximadas "a mano" (pero el computador hace lo mismo como 1 millón de veces más rápido xd).