FI2002-3 Electromagnetismo

Ejercicio 3

Profesor: Ignacio Andrade-Silva
Auxiliares: Felipe Carrasco y Pablo Guglielmetti
Ayudante: Facundo Esquivel

9 de mayo de 2025

Tiempo: 45 mins.

P1 **Condensador alterado**: Considere un condensador plano que consiste en dos placas paralelas cuadradas de lado L con cargas Q y $-Q$, respectivamente, separadas una distancia d. Una placa conductura neutra de espesor $t < d$ se coloca entre las dos placas, dejando un espacio a con la placa inferior. El resto del espacio entre las placas cargadas se encuentra en vacío.

Primero, considere la configuración que se muestra en la Figura 1(a), donde la placa conductora se encuentra completamente entre las placas.

a) (2.0 ptos.) Calcule el campo eléctrico y el potencial eléctrico en todo el espacio al interior del condensador. Ignore efectos de borde.

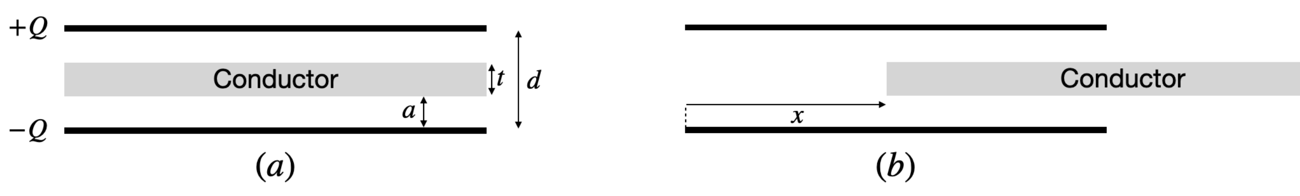
b) (1.0 ptos.) Grafique el potencial eléctrico en función de la altura con respecto a la placa inferior.

c) (1.0 ptos.) Calcule la capacitancia del sistema en esta configuración.

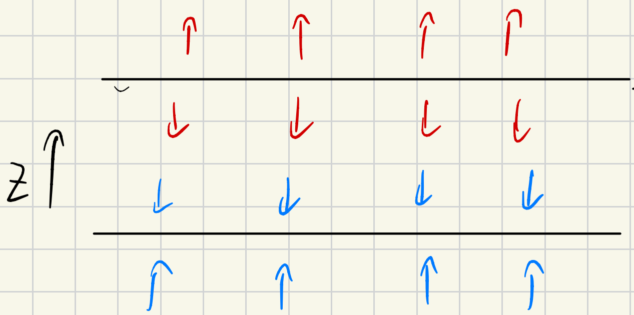
Ahora, considere que la placa conductora se ha desplazado una distancia x hacia la derecha, como se ilustra en la Figura 1(b).

c) (2.0 ptos.) Calcule la nueva capacitancia de esta configuración. Hint: piense el sistema como si se tratase de dos condensadores conectados en paralelo.

d) Pregunta Bonus (+0.5 a la nota de otro ejercicio). Calcule la fuerza siente la placa conductora en esta nueva configuración. Hint: la energía de un condensador puede calcularse como $U = Q^2/(2C)$.



Estudiemos el campo electrico que se produce antes de introducir la barra conductora:



$$+Q \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{L^2}\hat{n}$$
$$-Q \Rightarrow \sigma = \frac{-Q}{L^2}\hat{n}$$

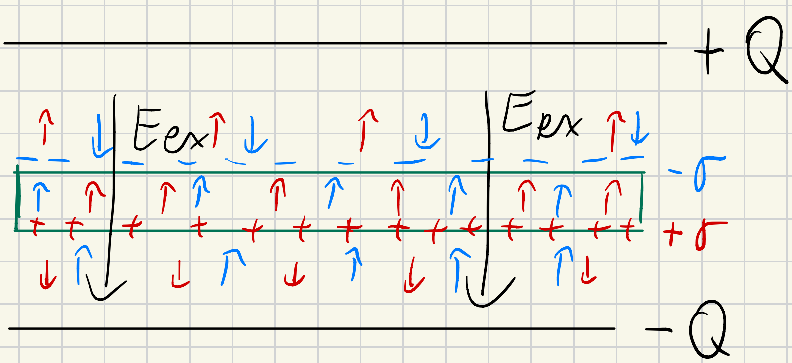
La carga se distribuye uniformemente en la placa conductora

Sabemos que el campo que produce una placa uniformemente cargada es $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$

Entre las placas los campos de ambas placas se suman al ir al mismo sentido

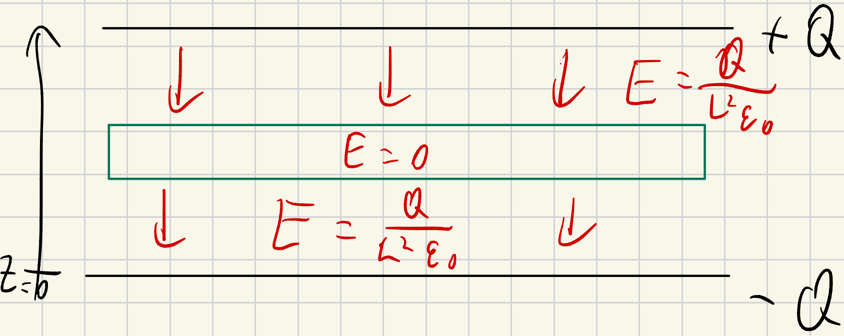
$$\vec{E}_{total} = E^{-\sigma} + E^{+\sigma} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}$$

Al introducir una barra conductora entre las placas las cargas libres de la barra se moveran en respuesta a este campo magnetico hasta que la distribucion de estas cargas libres cancele el campo dentro del conductor. Esta orientacion es la siguiente:



Se distrbuiran las cargas libres de la barra conductora en los lados superior e inferior de esta generabdo una densidad de carga superficial igual a la densidad en las placas del condensador.

De esta manera el campo producido por $+\sigma$ y $-\sigma$ dentro de la barra sera de igual magnitud y sentido opuesto al campo producido por las placas del condensador. Asi el campo dentro de la barra sera nulo. Fuera de la barra los campos producidos por $+\sigma$ y $-\sigma$ se cancelan, por lo tanto el campo fuera de la barra se mantiene inalterado por la precencia de esta.



$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{-Q}{L^2\varepsilon_0}\hat{z} & z \in [0, a] \wedge z \in [a+t, d] \\ 0 & z \in [a, a+t] \end{cases}$$

Calculamos potencial magnetico con la integral de linea del campo electrico. Usando como dl a dz.

Caso $z < a$

$$V(z) = -\int_0^z E\,dz = -\int_0^z \frac{-Q}{L^2\varepsilon_0}\,dz = \frac{Q z}{L^2\varepsilon_0}$$

Caso $a < z < a+t$

$$V(z) = -\int_0^a E\,dz - \int_a^z E\,dz = -\int_0^a \frac{-Q}{L^2\varepsilon_0}\,dz - \int_a^z 0\,dz$$

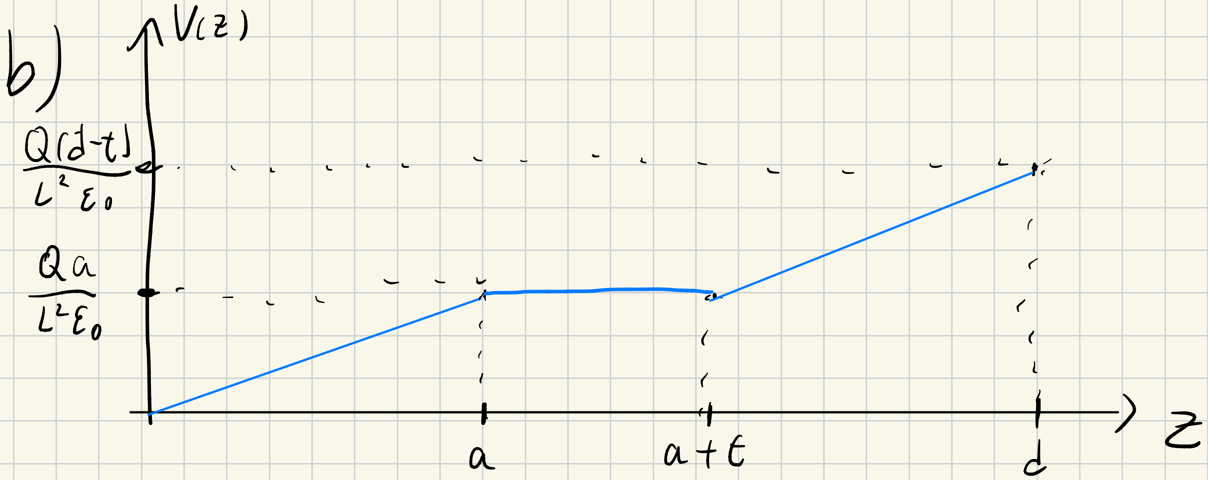
$$V(z) = \frac{Q a}{L^2\varepsilon_0}$$

Caso $a+t < z \leq d$

$$V(z) = -\int_0^a E\,dz - \int_a^{a+t} E\,dz - \int_{a+t}^z E\,dz = \frac{Qa}{L^2\varepsilon_0} + 0 + \frac{Q(z-a-t)}{L^2\varepsilon_0}$$

$$V(z) = \frac{Q}{L^2\varepsilon_0}(z-t)$$

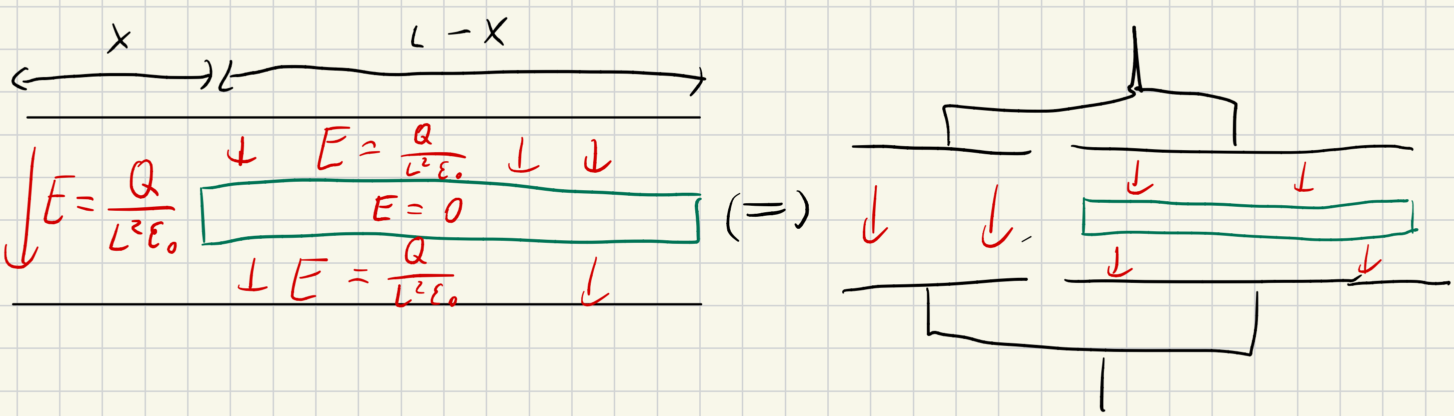
b)



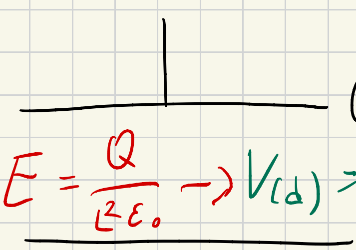
c) La capacitancia sera la carga en las placas dividido por el potencial entre las dos que equivale a el potencial en la altura d dado que usamos el potencial en la altura 0 (placa inferior) como referencia (V=0)

$$C = \frac{Q}{V(d)} = \frac{Q}{\frac{Q(d-t)}{L^2 \varepsilon_0}} = \frac{L^2 \varepsilon_0}{d-t}$$ cte y positiva

d)

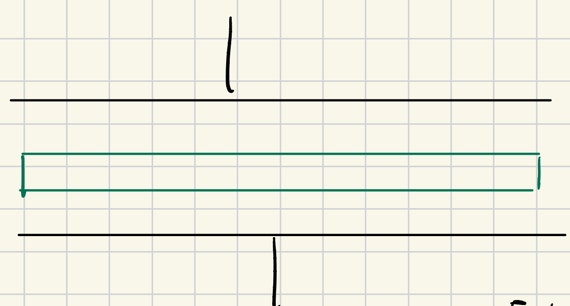


El sistema con la barra conductora desplazada equivale a dos condensadores en paralelo. El campo electrico fuera de la barra se mantendra al igual que las densidades superficiales.



$Q = \sigma \cdot L \cdot x$

$E = \frac{Q}{L^2 \varepsilon_0} \rightarrow V(d) = \frac{Q d}{L^2 \varepsilon_0}$



$Q = \sigma \cdot L(L-x)$

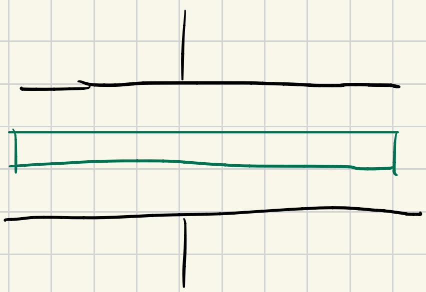
$\underbrace{V(d) = \frac{Q(d-t)}{L^2 \varepsilon_0}}_{\text{El mismo que en (C)}}$

1)

$$C_1 = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma \cdot L \cdot x}{\frac{Q\,d}{L^2 \varepsilon_0}} = \frac{\cancel{Q}/\cancel{L^2} \cdot \cancel{L}\; x}{\frac{\cancel{Q}\,d}{L^{\cancel{2}} \varepsilon_0}}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{x \cdot L \cdot \varepsilon_0}{d}$$

2)



$$C_2 = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma \cdot L \cdot (L-x)}{\frac{Q(d-t)}{L^2 \varepsilon_0}}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\frac{Q}{L^2} \cdot L(L-x)}{\frac{Q\,(d-t)}{L^2 \varepsilon_0}} = \frac{L \cdot (L-x) \cdot \varepsilon_0}{d-t}$$

Finalmente la capacitancia total es la suma en paralelo de ambas capacitancias

$$C_{total} = C_1 + C_2 = \frac{x L \varepsilon_0}{d} + \frac{(L-x) L \varepsilon_0}{d-t}$$

e) Bonus:

Para saber la fuerza que experimenta la placa al moverse en x debemos calcular la energía que gana al moverse en alguna direccion. Es decir hacer la derivada de la energia del sistema capacitivo en funcion de la posicion de la barra.

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\,\frac{x L \varepsilon_0 (d-t) + d(L-x) L \varepsilon_0}{d(d-t)}} = \frac{Q^2\, d \cdot (d-t)}{2 L \varepsilon_0 (dL - xt)}$$

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2(d-t)d}{2\cdot\varepsilon_0 \cdot L\,(dL - xt)}\right) = \frac{-Q^2(d-t)d}{2\,\varepsilon_0\, l}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{d\cdot L - xt}\right)$$

$$\vec{F} = \frac{-Q^2(d-t)d}{2\,\varepsilon_0\, L}\left(\frac{t}{(dL - xt)^2}\right)\hat{x}$$