Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar Extra 2: Magnetoestática

P1. Biot-Savart

Dos alambres rectos y muy largos que se conectan a través de un semicírculo de radio R, según se muestra en la Figura 1, portan una corriente I. Encuentre el campo magnético en el punto A, ubicado en el centro de curvatura del semicírculo.

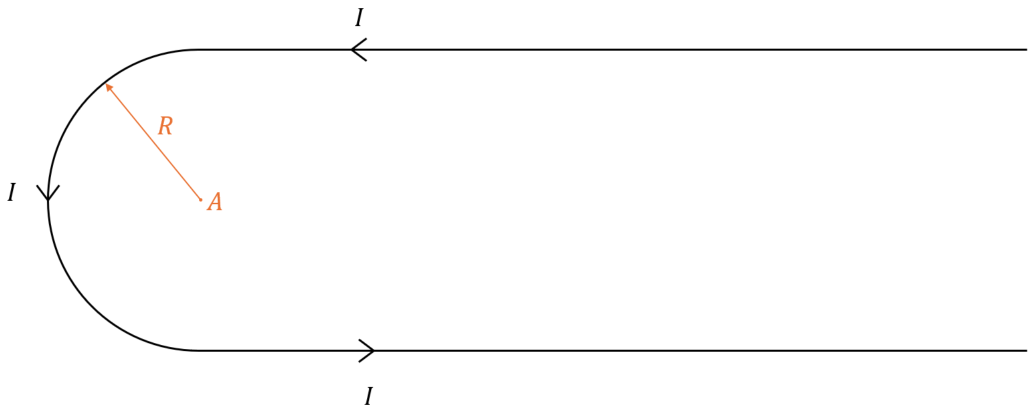


Figura 1

P2. Ley de Ampère

Considere una placa conductora infinita por donde circula una corriente superficial $\vec{K}$. Junto a ésta hay un cilindro con densidad de carga superficial σ y radio R. El eje de simetría del cilindro es perpendicular a la dirección de la corriente $\vec{K}$.
Encuentre la magnitud y el sentido de la velocidad angular del cilindro necesaria para que el campo magnetico dentro de este sea nulo. Ignore los efectos de borde.

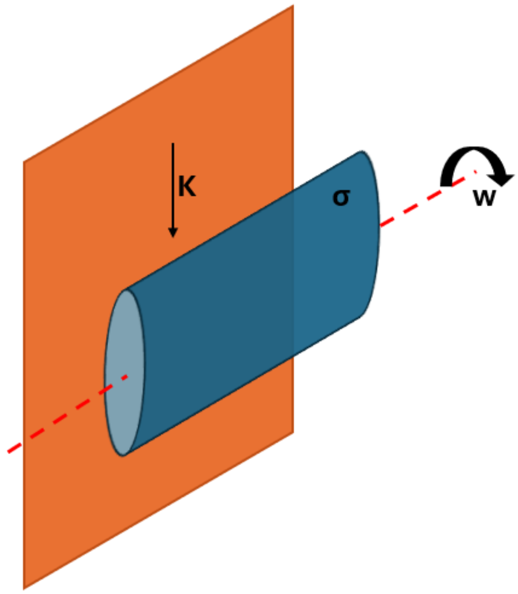


Figura 2

Figura 3: Nunca olvidar.

Resumen

Fuerza de Lorentz

La fuerza magnética que experimenta una carga puntual q que se encuentra en movimiento con velocidad $\vec{v}$ en presencia de un campo magnético externo $\vec{B}(\vec{r}')$ es

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}') \tag{1}$$

Actualmente es más común llamar Fuerza de Lorentz a toda la fuerza electromagnética que puede actuar sobre una carga q, esto es

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}(\vec{r}') + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}')\right) \tag{2}$$

La fuerza magnética neta sobre una distribución de corriente volumétrica $\vec{J}$, en presencia de un campo magnético $\vec{B}$, será

$$\vec{F} = \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}') dV' \tag{3}$$

En el caso de una distribución de corriente superficial se obtiene

$$\vec{F} = \int_S \vec{K}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}') dS' \tag{4}$$

Y si se tiene una corriente I circulando a lo largo de una curva (cable), abierta o cerrada, la fuerza magnética sobre el sistema es

$$\vec{F} = \int_\Gamma I\, d\vec{l}' \times \vec{B}(\vec{r}') \tag{5}$$

donde $d\vec{l}$ es la dirección por la que circula la corriente.

Ley de Biot-Savart

La ley de Biot-Savart nos permite calcular campos magnéticos según las corrientes presentes, ya que los campos magnéticos son producidos por corrientes. Esta ley establece:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, dl' \tag{6}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, dS' \tag{7}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, dV' \tag{8}$$

Potencial Vector

El campo magnético puede escribirse como el rotor de un potencial vector conocido como $\vec{A}$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{9}$$

Resumen

$\vec{A}$ puede ser calculado como

$$\vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \tag{10}$$

La fórmula para corrientes superficiales $\vec{K}$ y lineales I se extienden de manera análoga (casi igual que en Biot-Savart).

Ley de Ampère

De la ley de Biot-Savart, y para corrientes estacionarias ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$), se tiene que:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{11}$$

Esta ley tiene el beneficio de que nos permite lidiar con problemas de alta simetría, similar a como ocurría con la ley de Gauss. En virtud del teorema de Stokes se tiene:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enl}} \tag{12}$$

donde la corriente enlazada es:

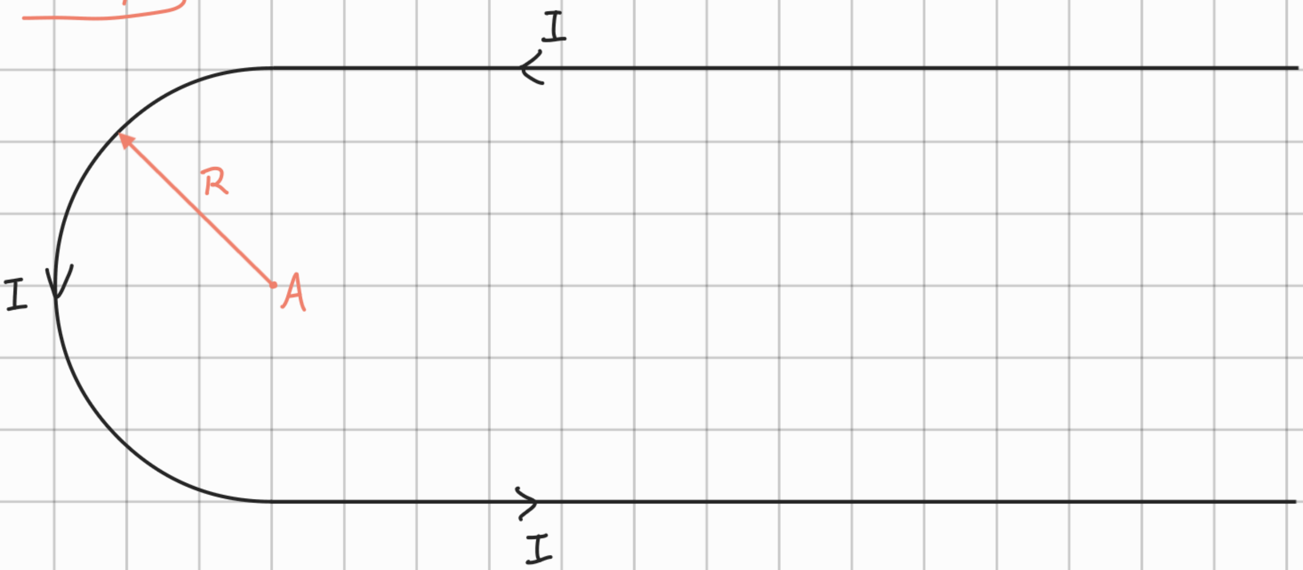
$$I_{\text{enl}} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{13}$$

Luego, si se tiene alta simetría en el problema, se puede obtener la dirección del campo magnético con la regla de la mano derecha; así, la integral es fácil de resolver y se puede despejar el campo magnético. Los casos más comunes son:

1. Alambres/cilindros (rectos) infinitos con corriente.
2. Planos infinitos con corriente.
3. Bobinas infinitas (también llamadas solenoides).
4. Bobinas toroidales.

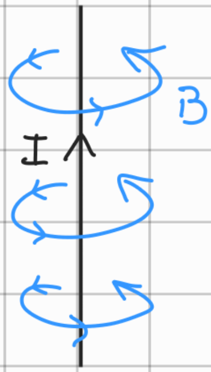
Para casos de esferas con corriente, la Ley de Ampère NO es útil en la gran mayoría de casos.

P 1



¿Cómo se verá el campo magnético?

Las líneas de campo magnético se "envuelven" alrededor del flujo se corriente, si tenemos un alambre con corriente I, el campo magnético se verá así

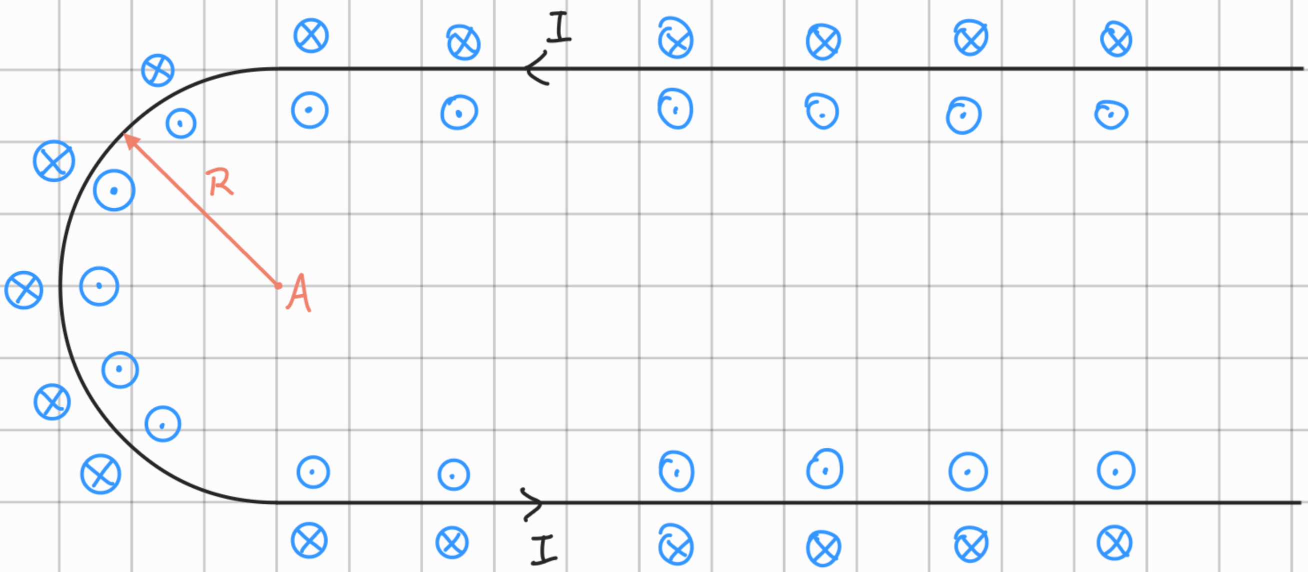


Si miramos esto perfectamente de "perfil", solo veremos flechas entrando y saliendo de la hoja (o pantalla xd). Por lo que otra manera de hacer esta ilustración es

$\odot$ Flecha que sale de la hoja.

$\otimes$ Flecha que entra a la hoja.

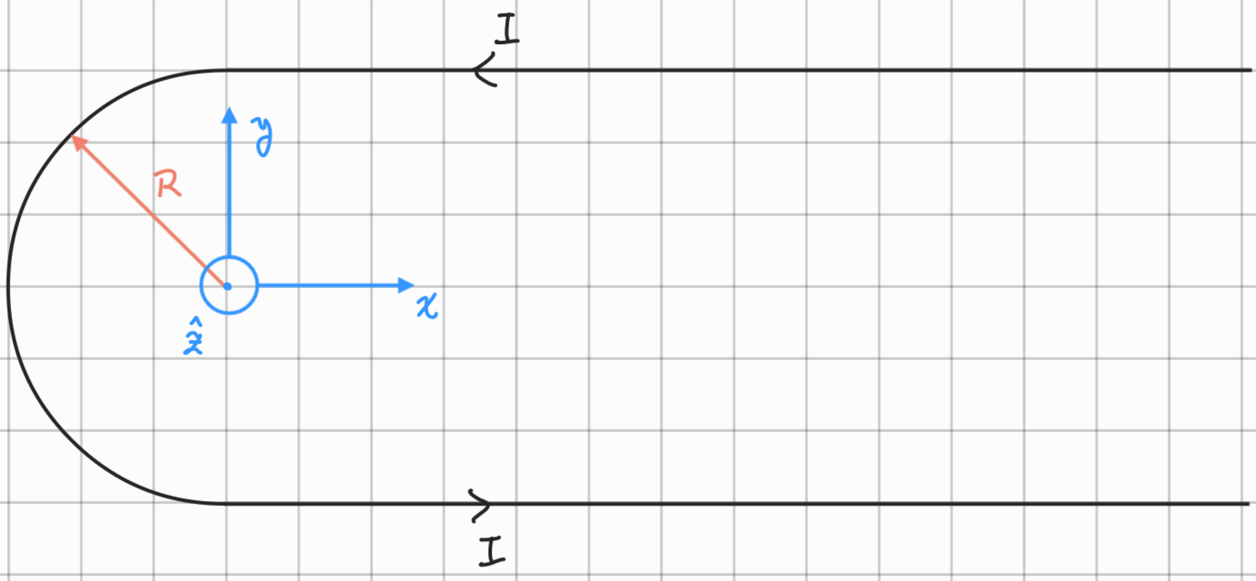
Por lo que el campo magnético del sistema que tenemos se verá así



Notemos que en la parte "interior", y en particular en el punto *A*, todas las flechas apuntan hacia afuera de la hoja, por lo que nuestro resultado del cálculo deberá ser consistente con esto.

b)

Colocamos nuestro sistema de referencia en el pto. *A*



El campo magnético lo calcularemos por definición, es decir, usando Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Gamma} I d\vec{l}\,' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Así como calculábamos el campo eléctrico por definición, debemos identificar donde está el pto. donde queremos calcular el campomagnético, donde está la corriente y además el sentido en el que esta fluye.

$\vec{r}$: Lugar donde queremos calcular $\vec{B}$.

$\vec{r}\,'$: Lugar donde está la corriente.

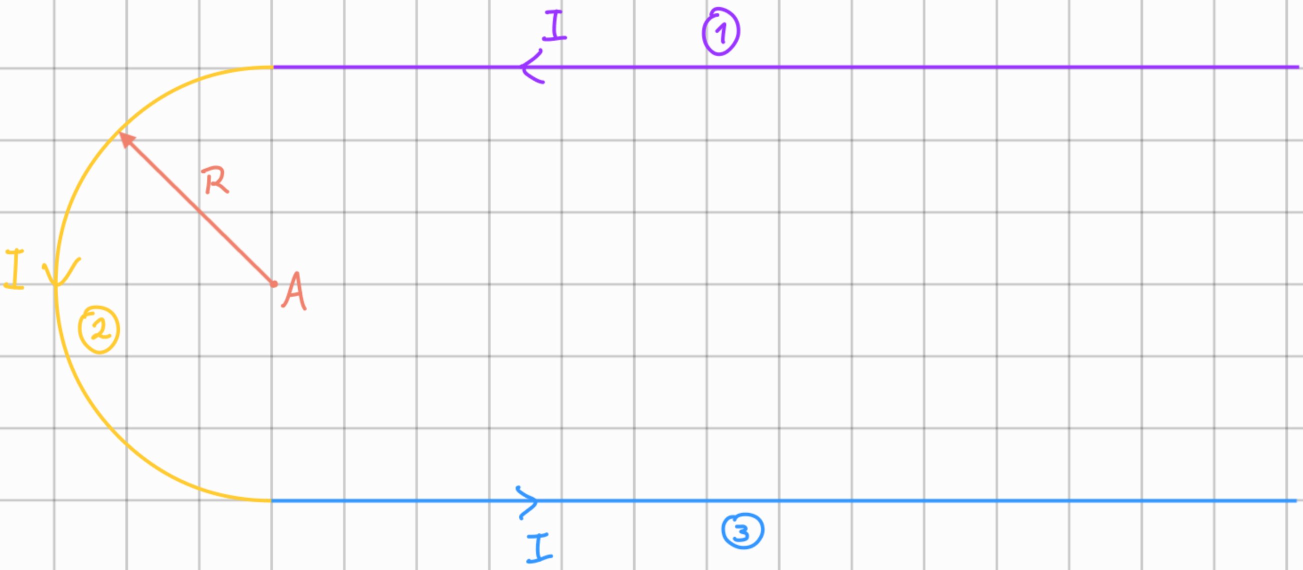
I: Corriente.

$d\vec{l}\,'$: Parametrización de la corriente y sentido en el que fluye.

Como el origen está justo donde queremos conocer el campo

$$\vec{r} = 0$$

Ahora, notemos que nuestro sistema tiene una geometría cartesiana "fusionada" con una geometría polar, por lo que no basta con un único sistema de coordenadas para resolver. De esta forma, lo que podemos hacer es usar el principio de superposición, lo que haremos será descomponer nuestras fuentes de campo magnético en 3 partes, calcularemos el campo que genera cada una, y finalmente la el campo total será la suma de cada una.
El sistema lo separaremos así:



De modo que el campo total será

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

Pero notemos una cosa. ¿Cómo son el cable 1 y 3? Se parecen mucho, ambos están a la misma altura por sobre el punto *A* y se extienden infinitamente hacia la derecha, además ambos generan una contribución al campo que apunta hacia afuera de la hoja. Es decir, ambos generan literalmente el mismo aporte en el punto *A*, por lo tanto

$$\vec{B}_1(A) = \vec{B}_3(A) \Rightarrow \vec{B} = 2\vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

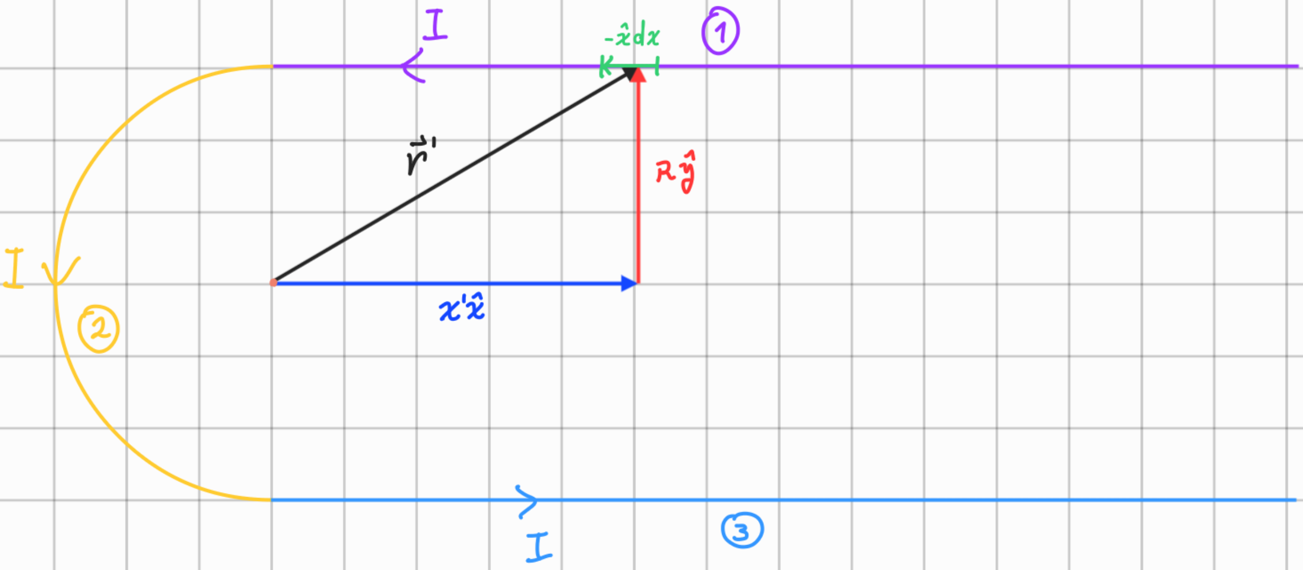
De este modo solo necesitaremos conocer el aporte $\vec{B}_1$ para saber también $\vec{B}_3$

Parametricemos entonces la corriente 1

Notemos que esta está a una altura *R* por sobre el origen, y además se extiende infinitamente hacia la derecha, por lo tanto

$$\vec{r}\,' = x'\hat{x} + R\hat{y} \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}\,' = -x'\hat{x} - R\hat{y} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = (x'^2 + R^2)^{3/2}$$

Recordar: $\vec{r} = 0$



Además la corriente fluye únicamente en la dirección x y hacia la izquierda, o sea en sentido $(-\hat{x})$ de modo que

$$I\,d\vec{l}' = I(-\hat{x})\,dx' = -I\,\hat{x}\,dx'$$

Finalmente, el cable se extiende desde el infinito positivo, hasta $x = 0$, por lo que

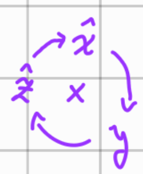
$$x' \in [0, \infty)$$

que serán los límites de integración.

$\therefore$

$$\vec{B}_1(A) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\infty -I\,\hat{x}\,dx \times \frac{(-x'\hat{x} - R\hat{y})}{(x'^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\hat{x}\times(-x'\hat{x} - R\hat{y})}{(x'^2 + R^2)^{3/2}}\,dx \,;$$



$\hat{x}\times\hat{x} = 0$

$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$

$$= \frac{+\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\infty \frac{+R\hat{z}\,dx}{(x'^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\hat{z}\int_0^\infty \frac{dx}{(x'^2+R^2)^{3/2}} \; ;$$

C.V.
$x = R\,tg\theta$
$dx = R\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\hat{z}\left.\frac{x}{R^2\sqrt{x^2+R^2}}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\hat{z}\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x}{R^2\sqrt{x^2+R^2}} - 0\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\hat{z}\,\frac{1}{R^2}$$

$$\boxed{\vec{B}_1(A) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{z}}$$

Ahora para $\vec{B}_2$ usamos coordenadas polares.

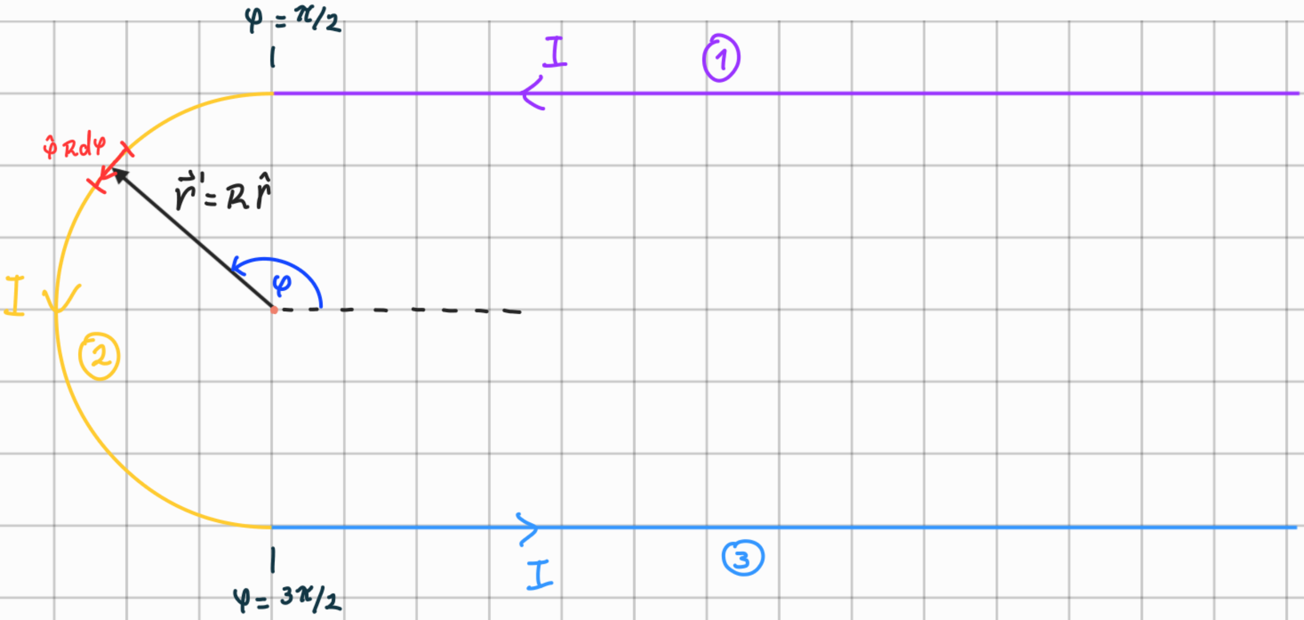
Recordemos que: $\vec{r} = 0$

Como el segundo cable está a una distancia *R* del centro, tenemos que

$$\vec{r}' = R\hat{r} \Rightarrow \vec{r}-\vec{r}' = -R\hat{r} \Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'|^3 = R^3$$

Y como la corriente fluye siguiendo un círculo de radio *R* en sentido anti-horario, se tiene que

$$I d\vec{l}' = I\hat{\varphi}R\,d\varphi$$



$$\vec{B}_2(A) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} I\,\hat{\varphi}\,\cancel{R}\,d\varphi \times \frac{-\cancel{R}\,\hat{r}}{R^{\cancel{3}}}$$

$$\hat{\varphi} \times \hat{r} = -\hat{z}$$

$$= \frac{\cancel{-}\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\cancel{-}\hat{z})\,d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\,\hat{z}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\cancel{\pi} R}\,\hat{z}\,\pi$$

$$\boxed{\vec{B}_2(A) = \frac{\mu_0 I}{4R}\,\hat{z}}$$

$$\therefore\ \vec{B}(A) = \cancel{2} \times \frac{\mu_0 I}{\cancel{4}_{2}\pi R}\,\hat{z} + \frac{\mu_0 I}{4R}\,\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{B}(A) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\hat{z}}$$

Pauta Aux Extra

La ley de Maxwell nos dice:

$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: Forma diferencial de $\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\int \vec{I} dl \times (\vec{r}-\vec{r}')$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \frac{\partial D}{\partial t} \iff \vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\int \vec{I} dl \times (\vec{r}-\vec{r}')$$

En estado estacionario: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$

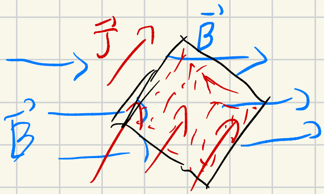
$$\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}$$

Cuando tenemos el rotor de un campo podemos usar el teorema de Stokes para simplificar los calculos

$$\oint_{\partial A} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint_A (\nabla \times B)\cdot d\vec{S} = \mu \iint_A \vec{J}\cdot d\vec{S} = \mu I$$

Para aplicar esta ley se debe definir una curva cerrada (∂A) por la cual se hace la integral de linea del $\vec{B}$.
El area (A) contenida en la curva cerrada es la cual hay que analizar cuanta

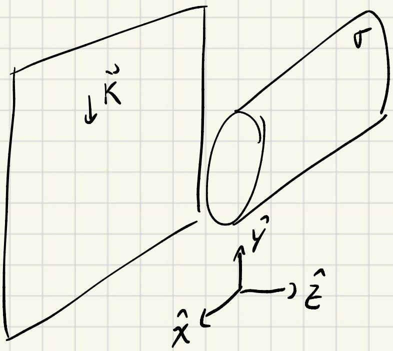
corriente traspasa:



La suma de la componente de $\vec{B}$ que recorre el contorno del cuadrado: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ Es igual al total de corriente que atravieza el cuadrado:

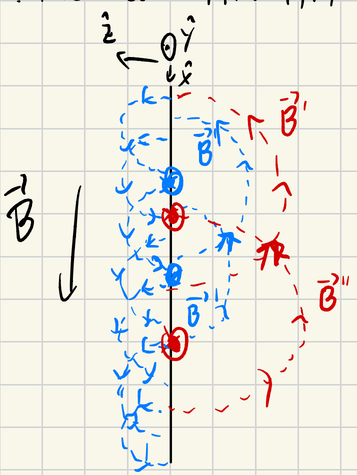
$$\mu_0 \iint \vec{J}\, d\vec{S} = \mu_0 I$$

P2)

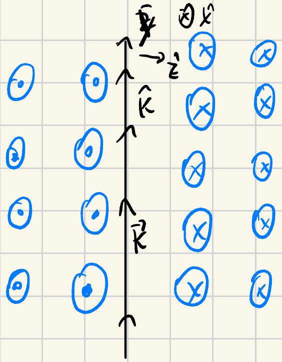


Debemos estudiar el campo magnetico que produce tanto la corriente K, como la rotacion del cilindro. Si dentro de este los campos son iguales y opuestos se anularan

I. Placa infinita:

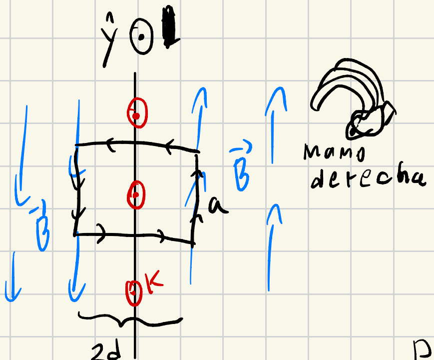


Notemos que en cualquier punto del espacio la componente normal a la placa del $\vec{B}'$ se anula con la corriente de otra seccion de la placa. Con esto concluimos que solo hay campo en $\hat{X}$



Por ley de la mano derecha podemos ver el sentido del campo

Ahora veamos la placa a travez del eje $\hat{y}$.



Tomemos la curva cerrada de un rectangulo con 2 lados de largo a paralelos al campo y 2 lados de largo 2d normales a la placa.

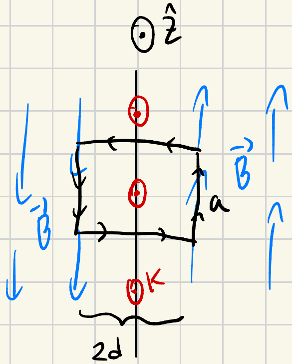
Por los lados (2d) la integral de linea $\int_{4d} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$ pues son perpendiculares al campo.

En los lados a la integral $\int_{2a} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2aB(d)$

Es igual al largo de ambos lados por la magnitud del campo a una distancia d de la placa.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{4d} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{2a} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 + 2a\,B(d)$$

Notemos que esto solo lo pudimos hacer pq al ser infinito sabemos que el campo es uniforme a una distancia d. Por simetria, como cuando usabamos Gauss,



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = I\mu = 2a B(d)$$

Ahora calcularemos la corriente que atraviesa el rectangulo.

Este sera la corriente sup. por el largo estudiado.

$$I = \int_a K\, dl = K \int_a dl = Ka$$

$$\Rightarrow \mu I = \mu K a$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I = 2\cancel{a}\, B(d) = \mu K \cancel{a}$$

$$B(d) = \frac{\mu K}{2}$$

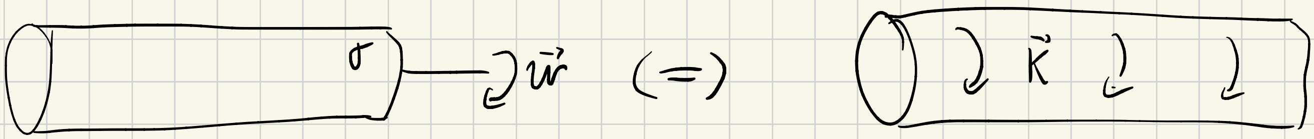
Sabemos por ley de mano derecha los sentidos.

Notemos que el $B(d)$ es independiente del d. Esto nos dice que el campo es constante en todo el espacio.

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{x} & \forall z > 0 \\ \dfrac{-\mu K}{2}\hat{x} & \forall z < 0 \end{cases}$$

→ Donde se ubica nuestro cilindro.

Ahora que conocemos el campo que produce la placa calcularemos la que produce el cilindro

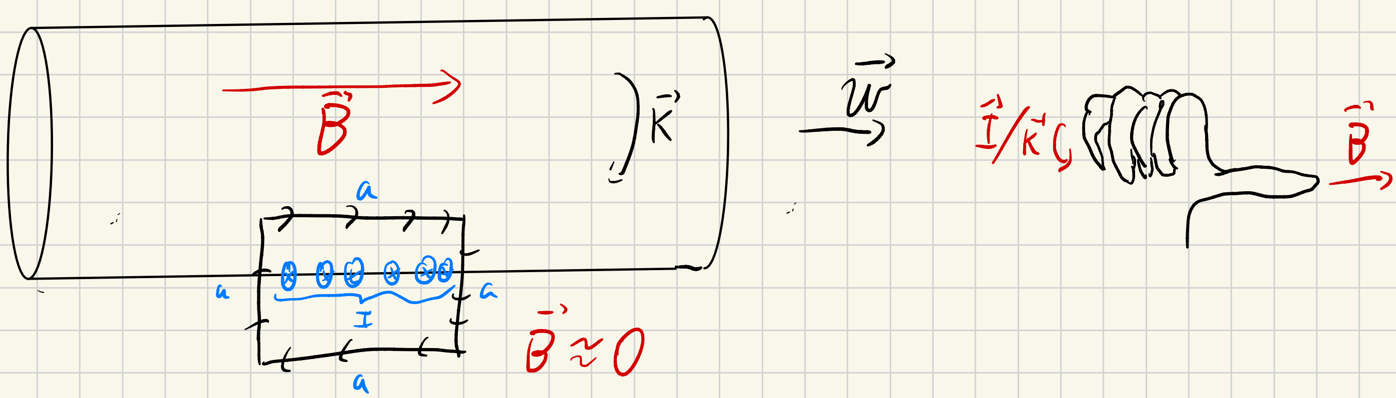


$\sigma \cdot \vec{v} = \vec{K} = \sigma \cdot R \cdot w \, \hat{\theta}$

Podemos entender el manto cargado en rotación como un manto con corriente superficial K.

Este sistema lo entenderemos como solenoide con corriente cual sabemos que tiene $\vec{B}$ uniforme dentro y $\vec{B}$ despreciable fuera.

Usamos Ampere´ para calcular el $\vec{B}$ de adentro porque es uniforme.



En un solenoide con corriente el $\vec{B}$ uniforme dentro tendra la direccion del eje de simetria y su sentido responde a la mano derecha $\vec{w} \parallel \vec{B}$

Notemos que la integral de linea de 3 de los cuatro lados de la curva cerrada seran 0. La de los lados normales al manto seran 0 pues los lados son perpendiculares al campo y la del lado fuera del cilindro sera 0 porque el campo fuera del cilindro es despreciable.
Por esto la integral de linea total de la curva es la integral de linea del lado que esta dentro del cilindro. Al ser uniforme el campo magnetico y perpendicular al lado, la integral de linea se resume a la multibplicacion entre la magnitud de B y el largo del lado (a).

$$\oint B\, dl = \int_0^a B\hat{x} \cdot dx\hat{x} = \int_0^a B\, dx = B\int_0^a dx = B \cdot a$$

Por ampere:

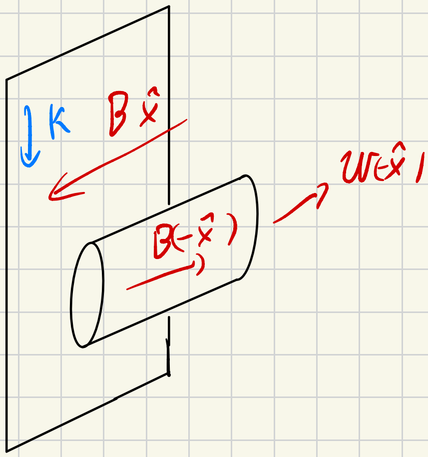
$$\oint B\, dl = \mu_0 I \iff B \cdot a = \mu_0 \int_0^a K \cdot dl$$

$$= \mu_0 K \int_0^a dy$$

$$= \mu_0 \cdot K \cdot a$$

$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 K (\hat{w})$ campo dentro de un solenoide

$\vec{B} = \mu_0 \sigma R \vec{w}$ en el mismo sentido que $\vec{w}$.



Si la velocidad angular w tiene direccion -x el campo producido por el cilindro tambien lo tendra. De esta manera este campo con el producido por la placa se contraponen. Si tienen la misma magnitud el campo dentro del cilindro sera nulo.

$$B_{cilindro}(-\hat{x}) + B_{placa}(\hat{x}) = 0$$

$$\mu_0 \sigma R \vec{w} + \frac{K\mu_0}{2}\hat{x} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \frac{K \quad -\hat{x}}{2\sigma R}$$