P1

Por la simetría: $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$

Además sabemos que $\vec{J} = g\vec{E} \Rightarrow \vec{J} = J(r)\,\hat{r}$

Dado que la conductividad cambia en el espacio, a priori **E** y **J** no son iguales en todo el espacio. De forma más general se tendría que

$$\vec{E} = \begin{cases} E_1(r)\,\hat{r}, & r \in (a, 2a) \\ E_2(r)\,\hat{r}, & r \in (2a, 3a) \end{cases} \quad (1) \qquad \vec{J} = \begin{cases} J_1(r)\,\hat{r}, & r \in (a, 2a) \\ J_2(r)\,\hat{r}, & r \in (2a, 3a) \end{cases} \quad (2)$$

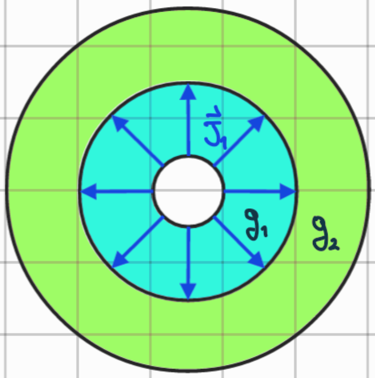
Podemos utilizar condiciones de borde sobre **J** para determinar como es esta en el espacio.
Sabemos que

$$J^{\perp}_2 - J^{\perp}_1 = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (3) \qquad g_2 J^{\parallel}_1 = g_1 J^{\parallel}_2 \quad (4)$$

Y en el estado estacionario tenemos que

$$J^{\perp}_2 - J^{\perp}_1 = 0 \quad (5)$$

Visualizemos la corriente



Notemos que la corriente llega de forma **perpendicular** a la interfaz entre los medios *g1* y *g2*, es decir, la componente paralela (o tangencial) de **J** es nula en la interface, de modo que la componente perpendicular de **J** debe ser exactamente igual al **J** total. En otras palabras

$$\vec{J} = J^{\perp} + J^{\parallel}$$

$$\text{Pero } J^{\parallel} = 0 \Rightarrow \vec{J} = J^{\perp} \quad (6)$$

Ahora, usando (5)

$$J_1^{\perp} = J_2^{\perp} \overset{(6)}{\Rightarrow} \vec{J}_1 = \vec{J}_2$$

Es decir, la corriente es igual en ambos medios.

Ahora podemos utilizar la ecuación de continuidad para despejar parte de **J**

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

En el estado estacionario

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

En esféricas

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 J_r\right) + \underbrace{\cancel{\nabla_{\varphi,\theta} \cdot J_{\varphi,\theta}}}_{0 \text{ por simetría}}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 J\right) = 0 \quad \Big/ \times r^2$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 J) = 0 \Rightarrow r^2 J = A; \quad A = \text{cte.}$$

$$\vec{J} = \frac{A}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{J} = g\vec{E} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{A\hat{r}}{g_1 r^2}, & r \in (a, 2a) \\[2ex] \dfrac{A\hat{r}}{g_2 r^2}, & r \in (2a, 3a) \end{cases}$$

Ahora para despejar la constante A usamos que la diferencia de potencial en el sistema es conocida

$$\Delta V = -\int_{3a}^{a} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{3a}^{2a} \frac{A\hat{r}}{g_2 r^2} \cdot \hat{r}\, dr - \int_{2a}^{a} \frac{A\hat{r}}{g_1 r^2} \cdot \hat{r}\, dr$$

$$= \frac{A}{g_2}\int_{2a}^{3a} \frac{dr}{r^2} + \frac{A}{g_1}\int_{a}^{2a} \frac{dr}{r^2} = \frac{A}{g_2}\left(\frac{-1}{r}\right)\Bigg|_{2a}^{3a} + \frac{A}{g_1}\left(\frac{-1}{r}\right)\Bigg|_{a}^{2a} = \frac{A}{g_2}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}\right) + \frac{A}{g_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right)$$

$$\Delta V = \frac{A}{a}\left(\frac{1}{6g_2} + \frac{1}{2g_1}\right) = \frac{(g_1 + 3g_2)}{6a g_1 g_2} A$$

Pero $\Delta V = V_0 \Rightarrow V_0 = \dfrac{(g_1 + 3g_2)}{6a g_1 g_2} A \quad (7)$

$$\Rightarrow A = \frac{6a g_1 g_2}{g_1 + 3g_2} V_0$$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{6V_0 a g_2 \hat{r}}{(g_1 + 3g_2) r^2}, & r \in (2a, 3a) \\[2ex] \dfrac{6V_0 a g_1 \hat{r}}{(g_1 + 3g_2) r^2}, & r \in (2a, 3a) \end{cases}}$$

b)

Ley de Ohm: $V = IR$ (8)

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{A}{\cancel{r^2}} \hat{r} \cdot \hat{r}\, \cancel{r^2} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = A \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$I = 4\pi A$$

(8) $\Rightarrow$ $V_0 = 4\pi A R$

$$R = \frac{V_0}{4\pi A}$$

(7) $\Rightarrow$ $R = \dfrac{\dfrac{(g_1 + 3g_2)}{6a g_1 g_2}\cancel{A}}{4\pi \cancel{A}}$

$$\boxed{R = \frac{g_1 + 3g_2}{24\pi a g_1 g_2}}$$

c)

$P = IV$

$$P = 4\pi A V_0$$

$$\boxed{P = \frac{24\pi a g_1 g_2 V_0^2}{g_1 + 3g_2}}$$

$* \; A = \dfrac{6a g_1 g_2}{g_1 + 3g_2} V_0$