Pauta C1 - otoño 2025

P1 Para resolver el problema usaremos el principio de superposición. El problema equivale a calcular el campo producido por la cinta de carga σ sin agujero, y a éste sumarle el campo producido por un disco de radio R con carga superficial $-\sigma$. (1.0 por plantear la idea)

Primero calculamos el campo eléctrico producido por la cinta. Escribimos $\vec{r} = z\hat{k}$, $\vec{r}' = x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath}$, $dq = \sigma dx'\, dy'$, entonces (1.0 por plantear la integral)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-W/2}^{W/2} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \frac{z\hat{k} - x'\hat{\imath} - y'\hat{\jmath}}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{1}$$

Al integrar en y', el último término en el numerador da cero al ser una función impar. Usando el primer hint, nos queda (1.0 por usar paridad)

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-W/2}^{W/2} \frac{x'\hat{\imath} + z\hat{k}}{x'^2 + z^2}\, dx'. \tag{2}$$

Nuevamente, por paridad, el primera término en el numerador no aporta a la integral. Usando el segundo hint obtenemos

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \tan^{-1}\left(\frac{a}{2z}\right). \tag{3}$$

(1.0 por llegar a resultado correcto)

Luego, calculamos el campo eléctrico producido por un disco con carga superficial $-\sigma$ de radio R en su eje:

$$\vec{E} = \frac{(-\sigma)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\, \rho\, \frac{z\hat{k} - \rho\hat{\rho}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}. \tag{4}$$

El término proporcional a $\hat{\rho}$ desaparece al integral en θ, por lo que nos queda (1.0 por plantear integral)

$$\begin{aligned} \vec{E} =& \frac{(-\sigma)z}{2\epsilon_0} \int_0^R d\rho \frac{\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{k} && (5) \\ =& \frac{(-\sigma)}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \hat{k}. && (6) \end{aligned}$$

Luego, el campo total en un punto $\vec{r} = z\hat{k}$ es

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{2z}\right) + \frac{z}{2\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{z}{2|z|}\right) \hat{k}. \tag{7}$$

(1.0 por llegar a resultado correcto)

P2 a) Imponemos que la carga total contenida en un cilindro de altura h y radio infinito sea cero. La carga del trozo de electrodo contenido en el cilindro es $\lambda_0 h$, y la del líquido es $\int \rho(\vec{r})\, dV$. Luego, debe cumplirse (0.5 por plantear la idea)

$$\lambda_0 h + \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \rho(\vec{r})\, r\, dr = 0 \tag{8}$$

Debemos resolver la integral

$$\int_0^{\infty} r \exp(-r/w) dr = w^2 \int_0^{\infty} u\, e^{-u}\, du. \tag{9}$$

Resolviendo por partes

$$\int u\, e^{-u}\, du = -u\, e^{-u} - e^{-u} + cte \tag{10}$$

(1.0 por resolver la integral) Luego,

$$\lambda_0 = -2\pi\rho_0 w^2. \tag{11}$$

(0.5 por llegar a relación correcta)

b) Asumiendo que el campo eléctrico es de la forma $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\hat{r}$ (simetría cilíndrica), aplicamos la ley de Gauss en el mismo cilindro de altura h: (1.5 por plantear Gauss correctamente)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\lambda_0 h + \int \rho(r)\, dV\right) \tag{12}$$

$$2\pi r h E_r(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\lambda_0 h + 2\pi h \int_0^r r\, e^{-r/w} dr\right) \tag{13}$$

La integral del lado derecho ya la resolvimos. Luego, nos queda

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} e^{-r/w}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{w}\right)\hat{r} \tag{14}$$

(1.5 por resolver y llegar a resultado correcto)

c) El potencial eléctrico queda expresado (1.0)

$$V(r) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\int_{+\infty}^{r} e^{-r/w}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{w}\right) dr. \tag{15}$$

En este caso, a diferencia del alambre solo, puede tomarse el cero de potencial en el infinito ya que la integral converge. (si se fija el cero de potencial en un radio r_0 arbitrario, también es válido).

P3 aquí modifiqué un poco la asignación de puntajes.

a) (3.0) en este item. restar puntaje si no diferenció entre D_1 y D_1. Aprovechando la simetría esférica y planteamos $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Usando Gauss:

- $r < a$: $\vec{E}(r < a) = 0$, ya que no se encierra carga.
- $a < r < b$: La carga encerrada es Q. Al haber dieléctricos nos conviene usar la Ley de Gauss para medios materiales. La condición de borde $E_{1t} = E_{2t}$, nos plantea que el campo eléctrico debe ser el mismo en ambos dieléctricos, por lo que el vector desplazamiento no puede ser el mismo. Supondremos que hay un vector desplazamiento $\vec{D}_1$ en el dieléctrico 1 y $\vec{D}_2$ en el dieléctrico 2. Luego, planteando Gauss sobre una esfera de radio $a < r < b$:

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 D_1(r) + 2\pi r^2 D_2(r) = Q. \tag{16}$$

$$2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)E_1(r) = Q \tag{17}$$

Luego,

$$\vec{E}(a < r < b) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r}. \tag{18}$$

- $r > b$: $\vec{E}(r > b) = 0$, ya que la carga neta encerrada es nula.

b) (1.0) en este item Ya calculamos $\vec{E}(r)$, luego, $\vec{D}(r < a) = 0$, y

$$\vec{D}_1(a < r < b) = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r}, \tag{19}$$

$$\vec{D}_2(a < r < b) = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r}, \tag{20}$$

y $\vec{D}(r > b) = 0$. Los vectores polarización en los dos dieléctricos son

$$\vec{P}_1(r) = \frac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r}, \tag{21}$$

$$\vec{P}_2(r) = \frac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r}. \tag{22}$$

c) (1.0) en este item Es fácil ver que $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$. Las cargas superficiales de polarización son

$$\sigma_1 = \frac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2} \tag{23}$$

en la interfase entre el dieléctrico 1 y el semi-cascarón superior, y

$$\sigma_2 = \frac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2} \tag{24}$$

en la interfase entre el dieléctrico 2 y el semi-cascarón inferior. Notemos que no hay cargas de polarización en las interfases entre los dieléctricos, ya que los vectores polarización son radiales.

d) (1.0) en este item La diferencia de potencial ΔV está dada por

$$\Delta V = \int_a^b \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2}\hat{r} \cdot \hat{r}\, dr = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{25}$$

Luego, la capacitancia del sistema es

$$C = \frac{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}. \tag{26}$$