Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 13: Modelo RC

P1.

Considere un casquete cilíndrico grueso de radio interior R_1, radio exterior R_2 y de largo L. Este está formado por un material de conductividad σ y de permitividad ε. En $r = 0$, $r = R_1$ y $r = R_2$ existen, a lo largo de L, unas placas cilindricas idealmente conductoras. Estas son de grosor despreciable. En $r < R_1$ hay aire.
Se conectan las placas conductoras de $r = 0$ y $r = R_2$ a través de una fuente ideal de voltaje V_0.
Calcule tanto resistencia entre R_2 y R_1, como la capacitancia entre R_1 y R_0. Para luego representar el sistema como un circuito RC equivalente.

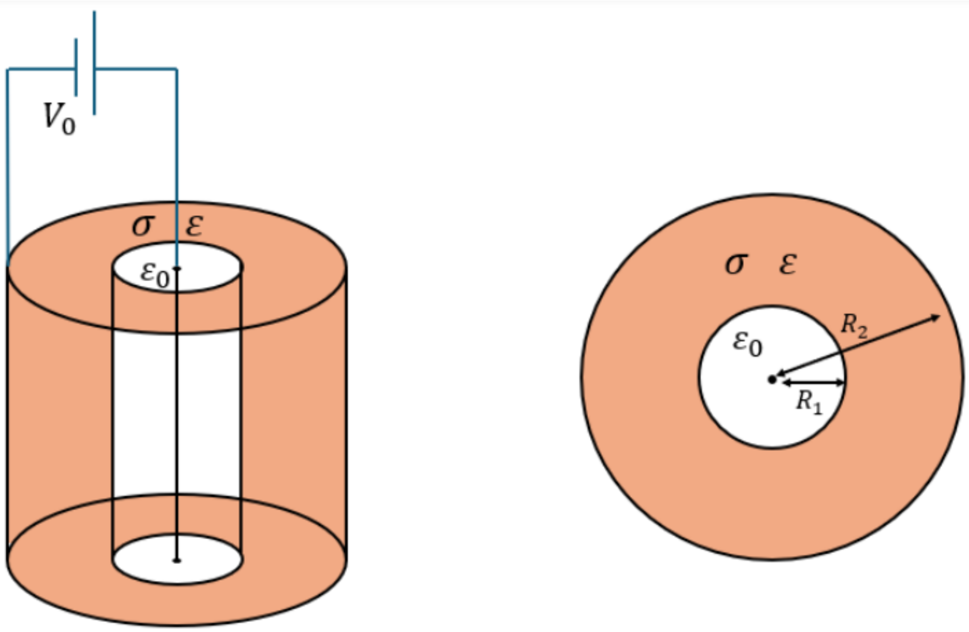


Figura 1

Resumen

Conductores

Son materiales que tienen la capacidad de reorganizar sus cargas internas en respuesta a un campo eléctrico externo, generando así un campo de igual magnitud, pero en dirección contraria, lo que resulta en su anulación. De esta forma, se cumplen lo siguiente:

1. $\vec{E} = 0$ al interior del material, y por lo tanto $\rho = 0$.
2. Es un equipotencial, o sea, todos los puntos al interior están al mismo potencial.
3. La totalidad de la carga se acumula en las superficies, generando un campo siempre perpendicular a esta, con valor $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$ donde $\hat{n}$ es la normal exterior.

Condensadores

También llamados capacitores, son dispositivos capaces de almacenar energía en forma de campo eléctrico, los cuales están conformados por dos o más conductores en forma arbitraria. La expresión de la capacidad (o capacitancia) está dada por:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

con Q la carga acumulada en la superficie de los conductores y ΔV la diferencia de potencial entre estos.

Los condensadores pueden ser conectados en serie o en paralelo (similar a las resistencias en métodos experimentales), de aquí se pueden obtener las capacitancias equivalentes como:

$$C_{serie} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}\right)^{-1} \qquad C_{paralelo} = \left(\sum_{i=1}^{N} C_i\right)$$

Energía en condensadores: La energía acumulada en un condensador formado por dos conductores de cargas Q y $-Q$, a una diferencia de potencial ΔV puede calcularse como:

$$U = \frac{Q\Delta V}{2} = \frac{C\Delta V^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

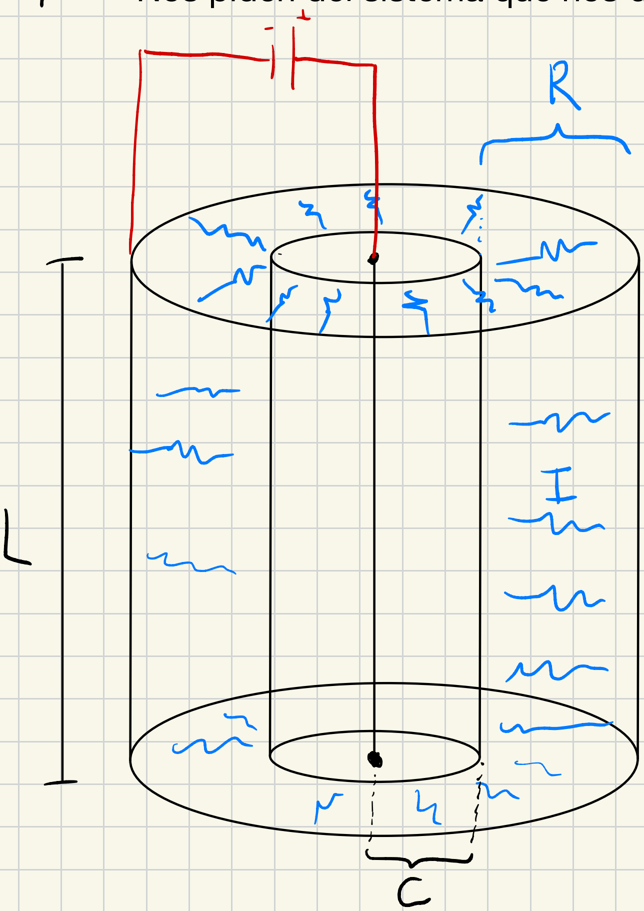
Ley de Ohm

Existen dos versiones de la ley de Ohm, una a nivel microscópico y otra a nivel macroscópico.

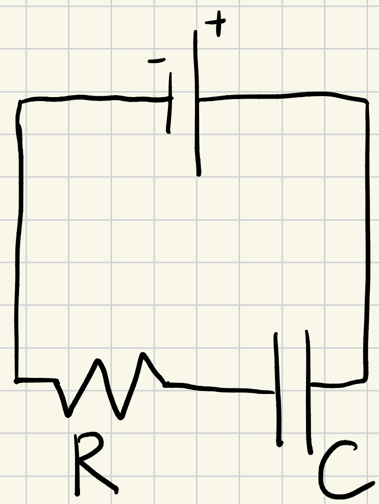
$\vec{J} = \sigma\vec{E}$	Microscópica
$V = RI$	Macroscópica

P_1

Nos piden del sistema que nos dan encontrar el circuito RC equivalente del estilo:



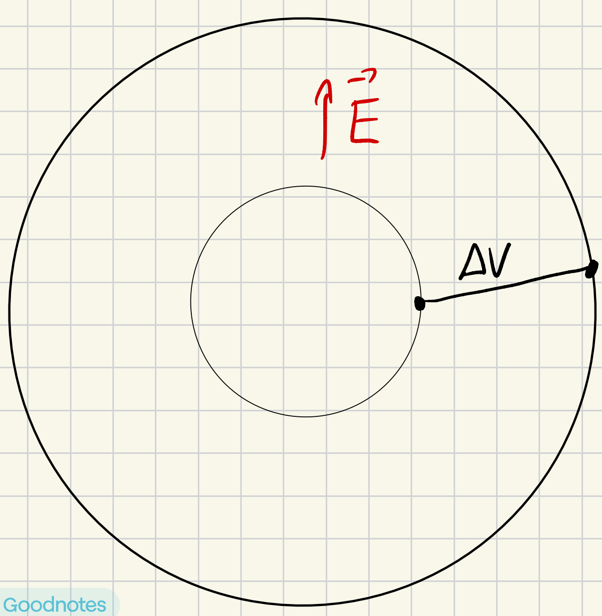
$\iff$



La parte capacitiva corresponde de R_0 a R_1. Mientras que la parte resistiva corresponde de R_1 a R_2. Debemos encontrar los valores de R y C.

Resistencia: $I = \frac{V}{R} \iff R = \frac{V}{I}$

Para la resistencia impondremos una diferencia de potencial entre la placa R_1 y la placa R_2. Luego conociendo la conductancia σ encontraremos la corriente que corre por toda la seccion, de una placa a la otra.



Si existe una diferencia de potencial es porque hay un campo E entre las placas, que por geometria podemos decir que es radial. Si es para adentro o para afuera no nos interesa para calcular la resistencia pues se calcula usando las magnitudes de I y V.

Este campo asumiremos que es de la forma E=A/r como suele ser en los cilindros. Esta adivinanza la corroboraremos si es que se cumple el regimen estacionario:

$$\nabla \vec{J} = 0 \Rightarrow I(r) = cte$$

$\vec{E} = A/r \, \hat{r}$ A es una cte la cual queremos conocer su valor.

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \, d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} A/r \, \hat{r} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta V = A \int_{R_1}^{R_2} 1/r \, dr =$$

$$= A\left(\ln(R_2) - \ln(R_1)\right) = A \ln\left(R_2/R_1\right) = \Delta V$$

$$A = \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

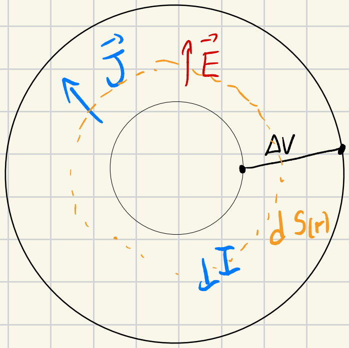
Ahora que conocemos A conocemos $\vec{E}(r)$

$$\vec{E}(r) = \frac{\Delta V}{\ln\left(R_2/R_1\right) r} \hat{r} \qquad \forall r \in [R_1, R_2]$$

conductancia

Con ley de Ohm obtendremos $\vec{J} = \hat{g} \vec{E}$

$$g = \sigma \Rightarrow \vec{J}(r) = \frac{\sigma \, \Delta V}{\ln\left(R_2/R_1\right) r} \hat{r}$$



Ya podemos verificar que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ por lo que acertamos con $E = A/r$.

Ahora calculemos la corriente total que pasa por la superficie de radio r

$$I_{(r)} = \int \vec{J} \cdot \vec{dS}_{(r)}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{L} \frac{\Delta V \sigma}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) r} \hat{r} \cdot r \, d\theta \, dz \, \hat{r}$$

$$= \frac{\Delta V \sigma}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \iint d\theta \, dz$$

$$I_{(r)} = \frac{\Delta V \sigma \; 2\pi \cdot L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \vec{J}_{(r)} \cdot \text{Area manto}_{(r)}$$

pues $\vec{J}$ es cte en $d\theta$ y dz.

Notemos que la corriente no depende de r pues es constante desde que sale de la placa R_1 hasta que llega a la placa R_2.

Ahora que encontramos la corriente producida por la diferencia de potencial impuesto en un inicio podemos calcular la resistencia del tramo R_1-R_2.

$$R = \frac{\Delta V}{I_{(\Delta V)}} = \Delta V \cdot \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\Delta V \cdot \sigma \cdot 2\pi L}$$

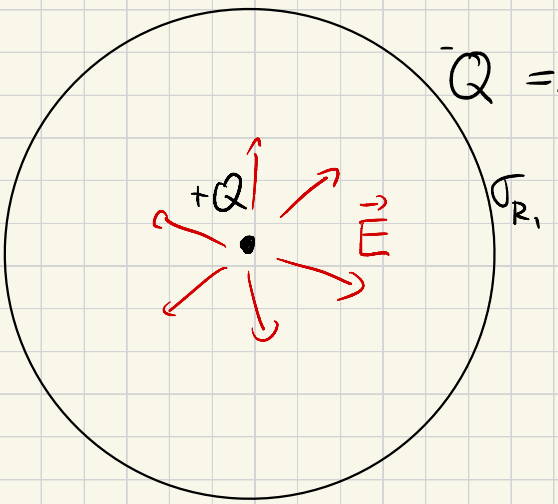
$$R = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\sigma \cdot 2\pi \cdot L} > 0$$

La resistencia siempre es positiva, si les da negativa saquenle valor absoluto.

Notemos que la resistencia solo depende de la geometria y los materiales del sistema. No depende de las condiciones electricas del sistema en el momento. Por eso es constante.

Capacitancia: $Q = CV \Rightarrow C = \frac{V}{Q}$

Para encontrar la capacitancia que existe entre R_0 y R_1 usaremos un metodo parecido al caso de la resistencia. Impondremos una carga Q un uno de los terminales y la carga opuesta -Q en el otro y veremos cual es la diferencia de potencial que se produce por estas cargas.



$-Q \Rightarrow \sigma_{R_1} = \frac{-Q}{2\pi R_2 L}$

La carga Q en R_0 producira un campo entre R_0 y R_1 mientras que la carga -Q en R_2 no generara campo entre las placas.

Calculamos $\vec{E}$ con Gauss: $E = E\hat{r}$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{(r)} \cdot \text{Area manto}_{(r)} = \frac{+Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{(r)} = \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0}\hat{r} \qquad \forall r \in [R_0, R_1]$$

Con el campo entre las placas calculamos de nuevo podemos no poner atencion a los signos pues $C > 0$ siempre.

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} E\, dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0 r}\, dr$$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln(r)\Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

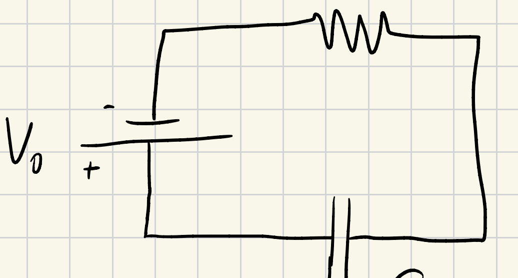
Ahora que encontramos la diferencia de potencial que se produce por la carga impuesta podemos calcular la capacitancia.

$$C = \frac{V}{Q} = \frac{Q \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi L \varepsilon_0 Q} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi L \varepsilon_0}$$

Notemos que al igual que la resistencia, la capacitancia solo depende de la geometria y los materiales del sistema. No depende de las condiciones electricas del sistema en el momento. Por eso es constante.

Con R y C modelamos el sistema como un circuito RC:

$$R_{(\sigma)} = \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\sigma 2\pi L}$$



$$C_{(\varepsilon_0)} = \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{2\pi L \varepsilon_0}$$