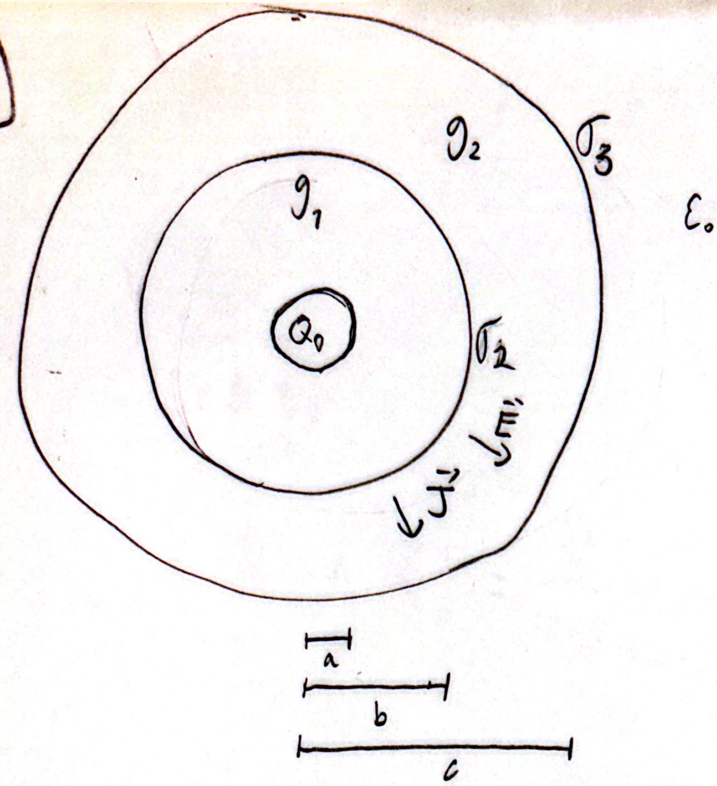
P1)



El campo sera radial por simetria esferica

La carga en la esfera de radio a la llamaremos $Q_1(t)$. En tiempo 0 es igual a $Q_0 \Leftrightarrow Q_1(t_0) = Q_0$

Esta carga $Q_1(t)$ producira un campo en $r > a$.

Usando Ley de Gauss con una superficie gaussiana esferica tenemos: $E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1(t)}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \vec{E}(r,t) = \frac{Q_1(t)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r} \quad r > a$$

Este campo producira una densidad de corriente

$$\vec{J} = g\vec{E} \quad \text{(ley de Ohm)}$$

Para el caso del medio (1) existira una densidad de corriente en $a < r < b$ de

$$\vec{J}_1(r,t) = \frac{g_1 Q_1(t)}{4\pi \ldots}$$

Esta densidad de corriente sera la que descargue la esfera central.

Para conocer la corriente I_1 que descarga $Q_1(t)$ $\Rightarrow$ $\frac{dQ_1(t)}{dt} = -I_1$ debemos integrar la $\vec{J}_1$ em toda el area transversal:

$$I_1 = -\int \vec{J}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{J}_{(r)}\, r^2\, sen(\theta)\, d\theta\, d\phi = \vec{J} \cdot Area_{(r)}$$

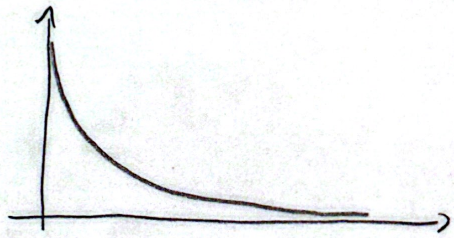
$$= \frac{-g_1\, Q_1(t)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\, 4\pi r^2 =$$

$$I_1 = \frac{-g_1\, Q_1(t)}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1(t)}{dt}$$

Vemos que la tasa de descarga de $Q_1(t)$ depende de $Q_1(t)$ por lo que planteamos una EDO.

$$\dot{Q}_1(t) + {}^{g_1}\!/_{\varepsilon_0}\, Q_1(t) = 0$$

$$\Rightarrow Q_1(t) = Q_0\, e^{-{g_1}/{\varepsilon_0} t}$$



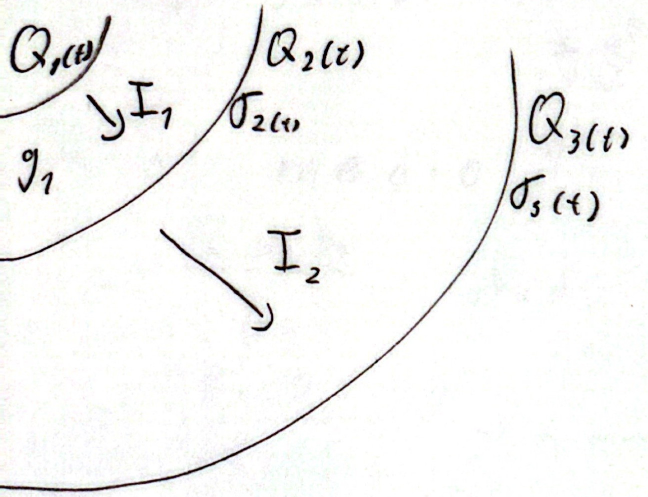
$$\Rightarrow I_1 = \frac{Q_0\, g_1}{\varepsilon_0}\, e^{-{g_1}/{\varepsilon_0} t}$$

$\forall\, t > t_0 \quad r \in [a,b]$.

El mismo analisis se puede hacer al medio 2 obteniendo

$$I_2 = \frac{Q_0\, g_2}{\varepsilon_0}\, e^{-{g_1}/{\varepsilon_0} t}$$

Para saber la carga que existe en la superficie de cada conductor debemos integrar en el tiempo las corrientes



$$Q_2(t) = \sigma_2(t) \cdot 4\pi b^2$$

$$Q_3(t) = \sigma_3(t) \cdot 4\pi c^2$$

A la carga $Q_2(t)$ le entra I_1 y le sale $I_2 \Rightarrow Q_2(t) = \int_0^t I_1 - I_2 \, dt$

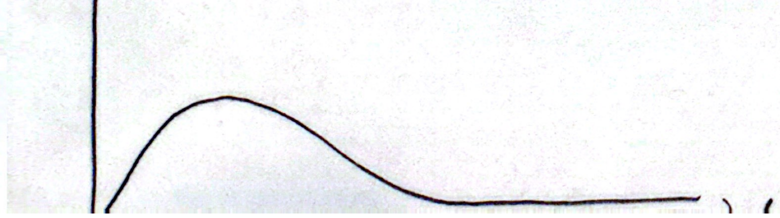
$$Q_2(t) = \int_{t_0=0}^{t} I_1 \, dt - \int_0^t I_2 \, dt = \int_0^t \frac{Q_0}{\varepsilon_0}\left(g_1 e^{-\frac{g_1}{\varepsilon_0}t} - g_2 e^{-\frac{g_2}{\varepsilon_0}t}\right) dt$$

$$Q_2(t) = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}\left(g_1\left(-\frac{\varepsilon_0}{g_1} e^{-\frac{g_1}{\varepsilon_0}t}\right)\Big|_0^t - g_2\left(-\frac{\varepsilon_0}{g_2} e^{-\frac{g_1}{\varepsilon_0}t}\right)\Big|_0^t\right)$$

$$Q_2(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{g_1}{\varepsilon_0}t} - 1 + e^{-\frac{g_2}{\varepsilon_0}t}\right)$$

$$Q_2(t) = Q_0\left(e^{-\frac{g_2}{\varepsilon_0}t} - e^{-\frac{g_1}{\varepsilon_0}t}\right)$$

Si lo graficamos en geogebra queda

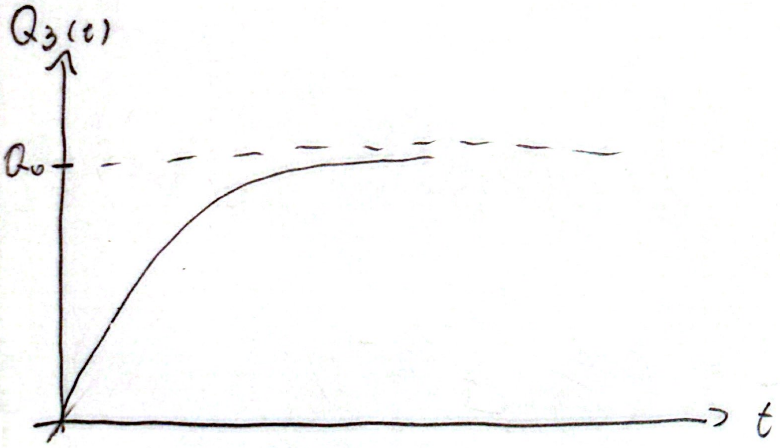


Para $Q_3(t)$ solo hay que considerar la corriente que entra I_3

$$Q_3(t) = \int_0^t I_3 = Q_0 \int_0^t \frac{g_2}{\varepsilon_0} e^{-\frac{g_2}{\varepsilon_0}t}$$

$$= Q_0 (-1) e^{-\frac{g_2}{\varepsilon_0}t} \Big/_0^t$$

$$= Q_0 \left(1 - e^{-\frac{g_2}{\varepsilon_0}t}\right)$$



Se puede verificar que

$$Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t) = Q_0 \quad \forall t > t_0$$

ara sacar la resistencia calcularemos
a del medio 1, luego la del medio 2
y las sumaremos en serie. $R = R_1 + R_2$

En el medio 1 existia una corriente

$I_1 = \frac{Q_{(t)} g_1}{\varepsilon_0}$ dado un campo electrico

$\vec{E}_1 = \frac{Q_1(t)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r}$ → Apartir de este campo obtendremos el potencial entre $r=a$ y $r=b$

$$\Delta V_{a-b} = -\int_a^b \frac{Q(t)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\,dr = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)_b^a$$

$$\Delta V_{a-b} = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Para sacar R usamos ohm: $V = I \cdot R$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{V}{I} = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\cdot\frac{\varepsilon_0}{Q(t)\, g_1} = \frac{b-a}{4\pi a b\, g_1}$$

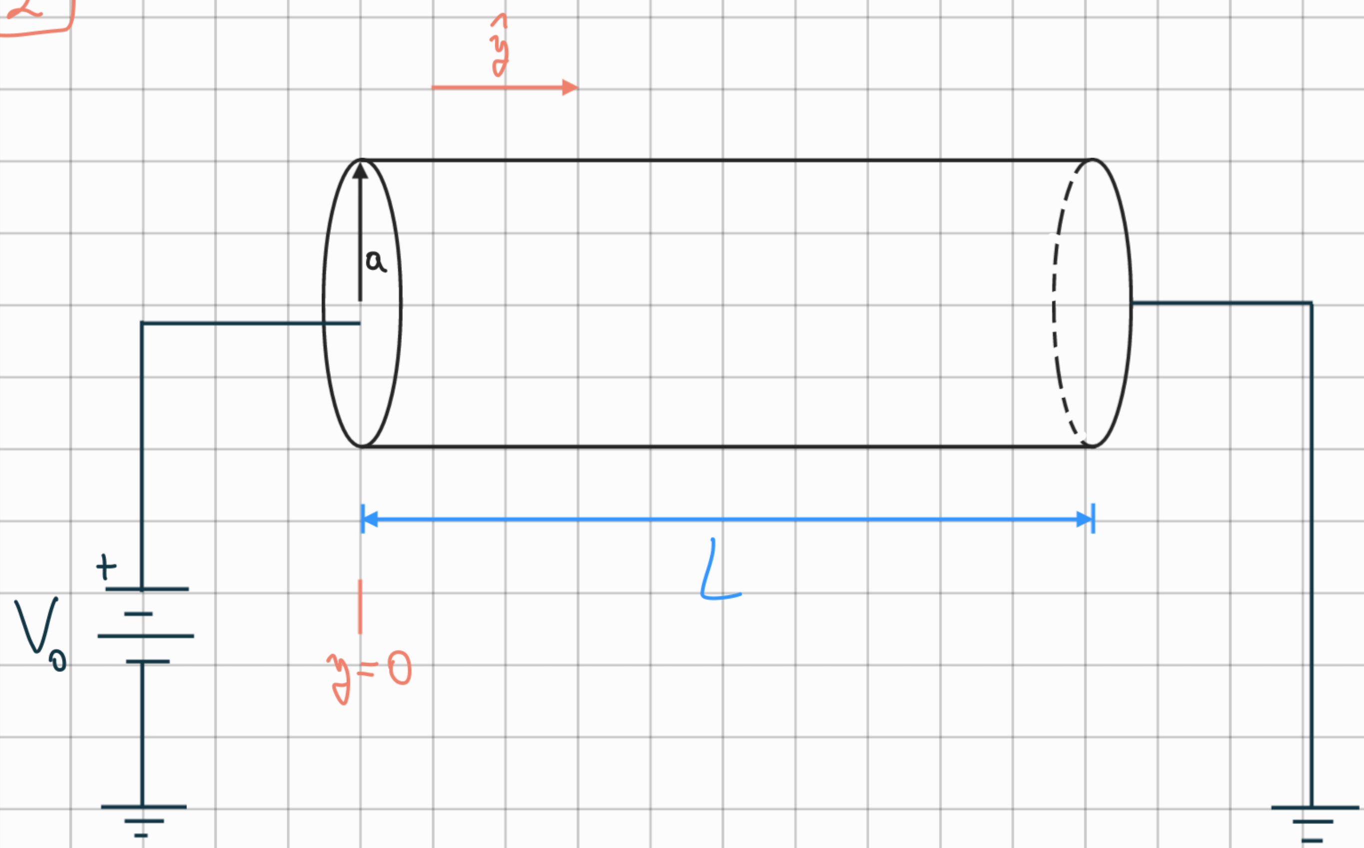
La Resistencia no depende de las condiciones temporales sino de la geometria y de la conductividad g

Notamos que para el medio 2 el metodo es analogo.

$$R_2 = \frac{c-b}{4\pi c b g_2}$$

$$R_{total} = R_1 + R_2 = \frac{b-a}{4\pi a b g_1} + \frac{c-b}{4\pi c b g_2}$$

P_2



a)

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Asumiendo el estado estacionario

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Por la simetría

$$\vec{E} = E(y)\,\hat{y}$$

Por la Ley de Ohm

$$\vec{J} = g\vec{E} \Rightarrow \vec{J} = J(y)\,\hat{y}$$

$$g \to g(y)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = \cancelto{0}{\frac{\partial J_x}{\partial x}} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial J_z}{\partial z}} = \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{J} = C\,\hat{y}$$

Por ley de Ohm

$$C\,\hat{y} = g_0\left(1 + y/L\right) E(y)\,\hat{y} \quad / \cdot \hat{y}$$

$$C = g_0\left(1 + y/L\right) E(y)$$

$$\vec{E}(y) = \frac{C\,\hat{y}}{g_0\left(1 + y/L\right)}$$

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = V(0) - V(L) = V_0$$

$$\Rightarrow \quad V_0 = -\int_L^0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_0 = \int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_0 = \int_0^L \frac{C \cancel{\hat{y}}}{g_0 (1 + y/L)} \cancel{\hat{y}} \, dy$$

$$= \frac{C}{g_0} \int_0^L \frac{dy}{(1 + y/L)}$$

C. V.

$u = 1 + y/L$

$du = \frac{dy}{L} \Rightarrow dy = L\,du$

$$= \frac{C}{g_0} \int_{a'}^{b'} \frac{L\,du}{u}$$

$$V_0 = \frac{CL}{g_0} \ln(u) \Big|_{a'}^{b'}$$

Revirtiendo el C.V.

$$V_0 = \frac{CL}{g_0} \ln\left(1 + y/L\right)\Big|_0^L$$

$$= \frac{CL}{g_0}\left[\ln\left(1+\underbrace{\frac{L}{L}}_{1}\right) - \ln\left(1+\underbrace{\frac{0}{L}}_{0}\right)\right]$$

$$= \frac{CL}{g_0}\left[\ln(2) - \cancel{\ln(1)}^{\,0}\right]$$

$$V_0 = \frac{CL}{g_0}\ln(2)$$

$$C = \frac{g_0 V_0}{L\ln(2)}$$

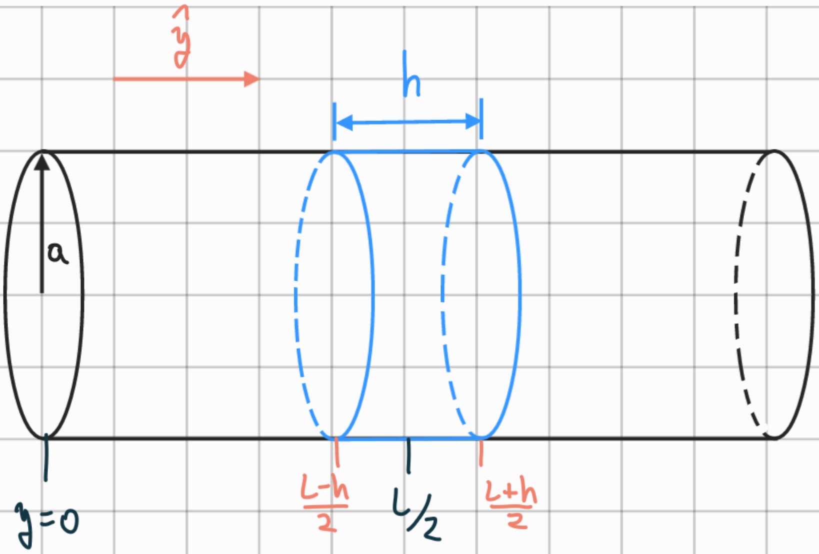
$$\Rightarrow \vec{E}(y) = \frac{\left(\frac{\cancel{g_0} V_0}{L\ln(2)}\right)\hat{y}}{\cancel{g_0}(1+y/L)} = \frac{V_0\,\hat{y}}{L\ln(2)(1+y/L)}$$

$$\boxed{\vec{E}(y) = \frac{V_0\,\hat{y}}{\ln(2)(L+y)}}$$

$$\vec{J} = g\vec{E} = g_0\left(1+y/L\right)\frac{V_0\,\hat{y}}{\ln(2)(L+y)} = \frac{\cancel{(1+y/L)}\,g_0 V_0\,\hat{y}}{\ln(2)\cdot L\cancel{(1+y/L)}}$$

$$\boxed{\vec{J} = \frac{g_0 V_0\,\hat{y}}{L\ln(2)}}$$

b)



$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV$$

$$P = \int_{\frac{L-h}{2}}^{\frac{L+h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \frac{V_0 \cancel{\hat{y}}}{\ln(2)(L+y)} \cdot \frac{g_0 V_0 \cancel{\hat{y}}}{L \ln(2)} \, r\,dr\,d\varphi\,dy$$

$$= \frac{g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \int_{\frac{L-h}{2}}^{\frac{L+h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \frac{dy}{(y+L)} \, r\,dr\,d\varphi\,dy$$

$$= \frac{g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \cancel{2}\pi \frac{a^2}{\cancel{2}} \int_{\frac{L-h}{2}}^{\frac{L+h}{2}} \frac{dy}{(y+L)}$$

C.V.

$u = y + L$

$du = dy$

$$= \frac{g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \pi a^2 \int_{a'}^{b'} \frac{du}{u}$$

$$P = \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \ln(u) \Big|_{a'}^{b'}$$

Revertimos el C.V.

$$P = \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \ln(y+L) \Big|_{\frac{L-h}{2}}^{\frac{L+h}{2}}$$

$$= \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \left[\ln\left(\frac{L+h}{2} + L\right) - \ln\left(\frac{L-h}{2} + L\right) \right]$$

$$= \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \left[\ln\left(\frac{L+h+2L}{2}\right) - \ln\left(\frac{L-h+2L}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \left[\ln\left(\frac{3L+h}{2}\right) - \ln\left(\frac{3L-h}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \left[\ln\left(\frac{\left(\frac{3L+h}{\cancel{2}}\right)}{\left(\frac{3L-h}{\cancel{2}}\right)} \right) \right.$$

$$\boxed{P = \frac{\pi a^2 g_0 V_0^2}{L \ln(2)^2} \ln\left(\frac{3L + h}{3L - h}\right)}$$