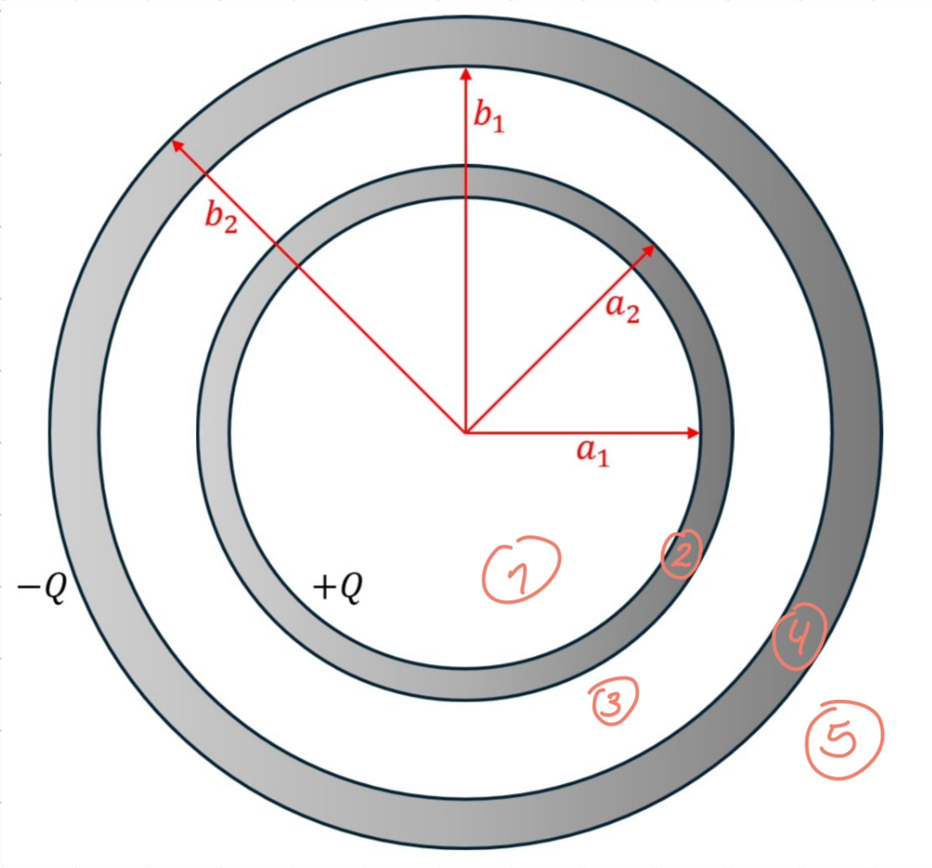
P1)

Notemos que aquí deberemos calcular el campo eléctrico en 5 zonas distintas del espacio



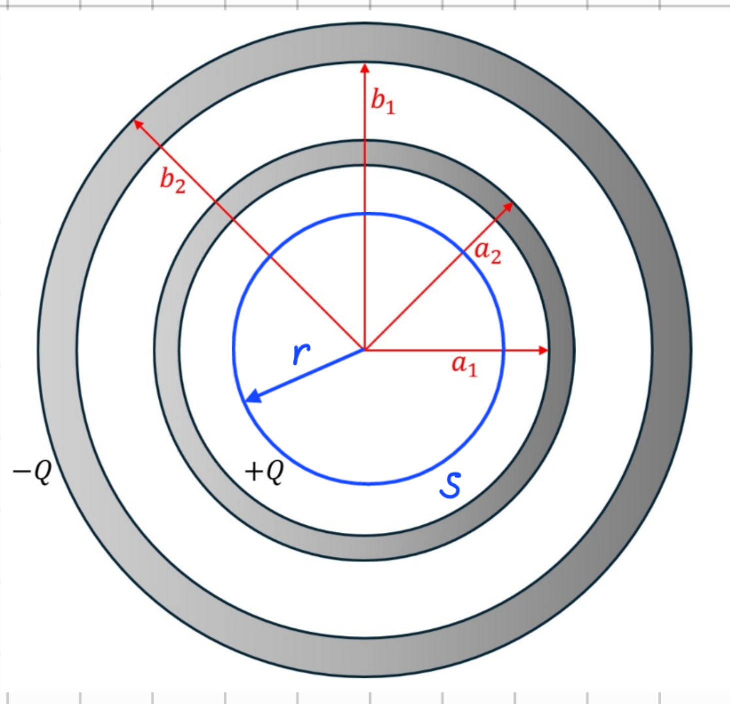
Dado que $L >> b2$ (el cilindro es "infinito"), podemos resolver mediante Ley de Gauss. Por los argumentos de simetría que ya conocemos para cilindros, tendremos que

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

Empezaremos calculando de adentro hacia afuera.

$\boxed{r < a_1}$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} E(r)\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}\, r\, d\varphi\, dz$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi r L E(r)$$

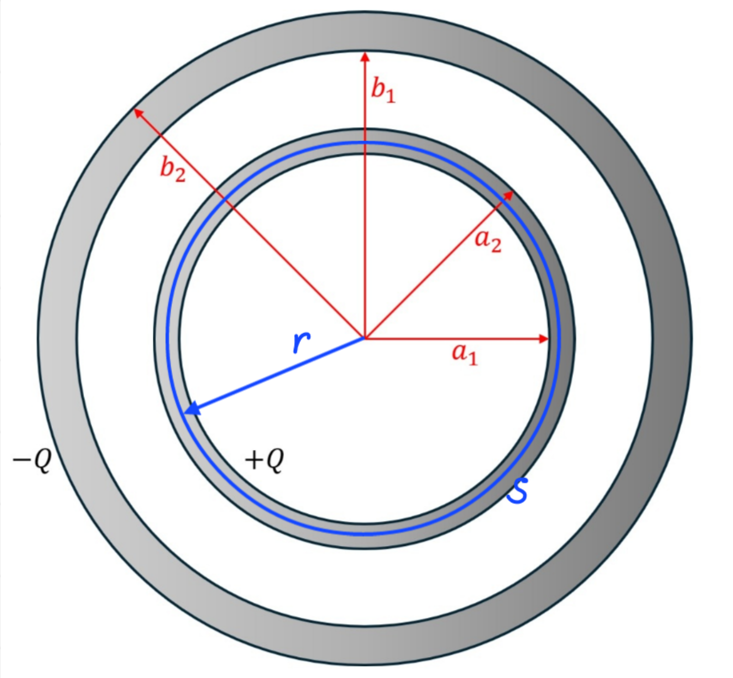
Como para $r < a1$ tenemos vacío, la carga encerrada en esa zona es 0

$$Q_{enc} = 0 \implies 2\pi r L E(r) = 0$$

$$\boxed{\vec{E} = 0} \quad r < a_1$$

$r \in (a_1, a_2)$

Notemos que aquí estamos dentro de la zona sólida (o metálica) del conductor, y una propiedad que cumplen los conductores es que dentro de ellos (en su parte metálica) el campo eléctrico es nulo, por lo tanto



$$\boxed{\vec{E} = 0} \quad r \in (a_1, a_2)$$

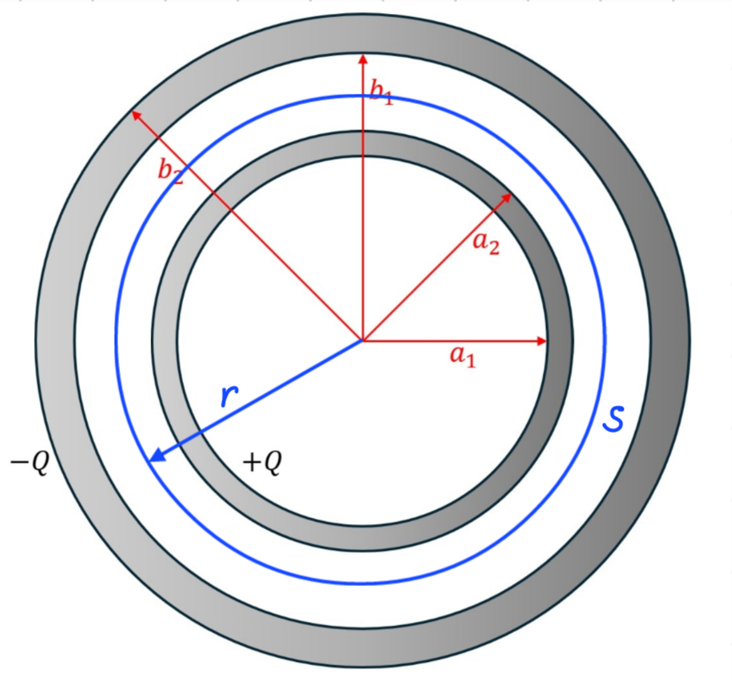
Esta es una propiedad "conocida", y para un control pueden llegar y utilizarla.

Nota ☝️🤓: Esta propiedad solo se cumple en **electrostática**, es decir, cuando no hay cosas que varíen en el tiempo, ya sean cargas en movimiento o campos variables. Si tenemos campos variables en el tiempo o cargas moviéndose, el campo eléctrico dentro de un conductor **generalmente no** será 0. Para este problema todo es estático, por lo que la propiedad sí aplica.

$r \in (a_2, b_1)$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} E(r)\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}\, r\, d\varphi\, dz$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi r L E(r)$$



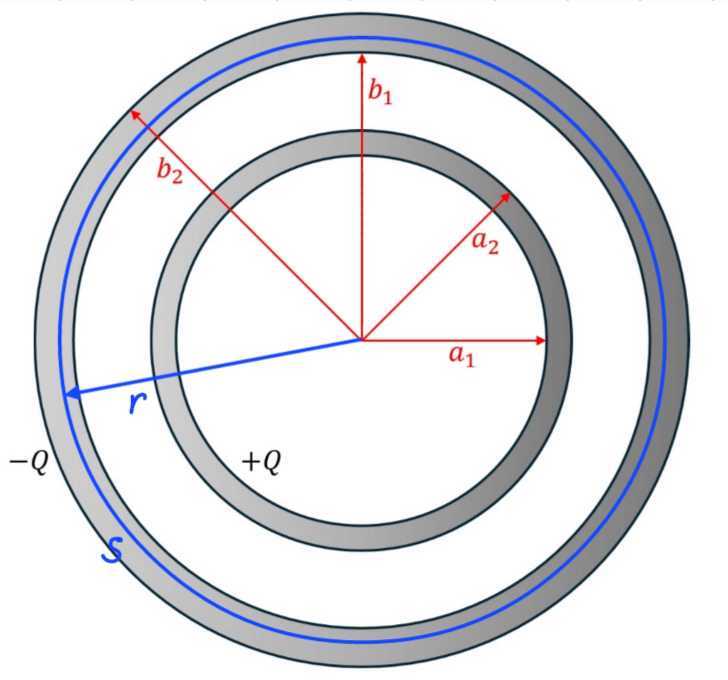
Veamos que aquí encerramos todo el manto cilíndrico interior, el cual tiene carga total *Q*, por lo que la carga encerrada será *Q*

$$Q_{enc} = Q$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi r L E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q\,\hat{r}}{2\pi L \varepsilon_0 r}} \quad r \in (a_2, b_1)$$

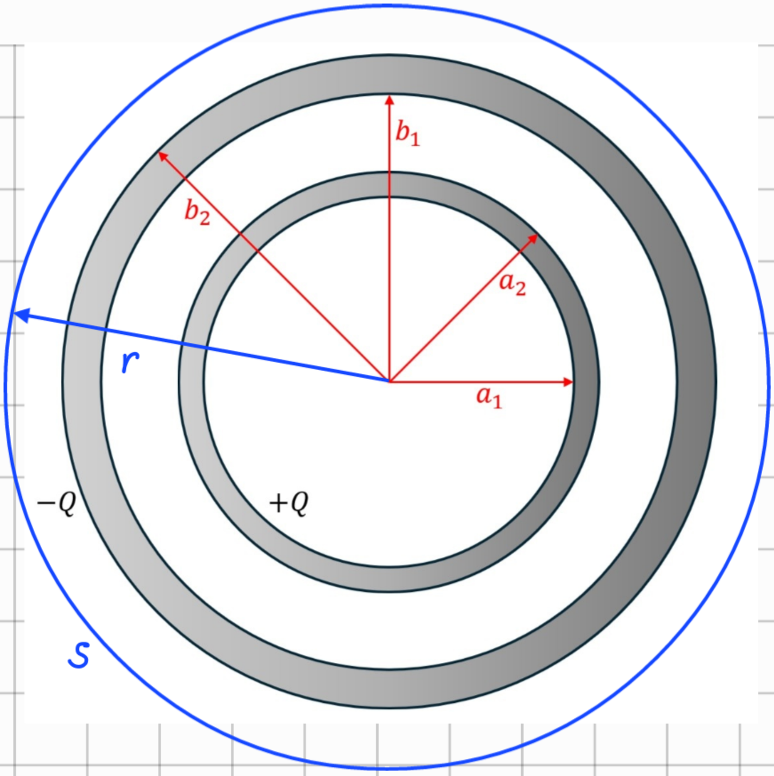
$r \in (b_1, b_2)$



Notemos que al estar nuevamente en la parte metálica de un conductor, el campo en esta zona será 0, o sea

$$\boxed{\vec{E} = 0} \quad r \in (b_1, b_2)$$

$r > b_2$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} E(r)\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}\, r\, d\varphi\, dz$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi r L E(r)$$

Fijémonos que ahora nuestra superficie encierra ambos cilindros, el que tiene carga Q y el que tiene carga $-Q$, de manera que la carga total encerrada será la suma de estas, es decir

$$Q_{enc} = Q + (-Q)$$

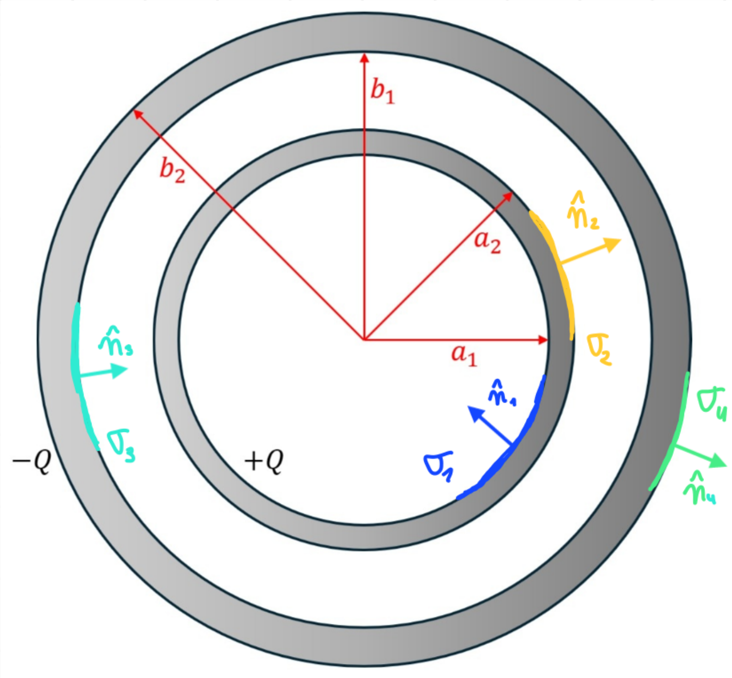
$$Q_{enc} = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi r L E(r) = 0$$

$$\boxed{\vec{E} = 0} \quad r > b_2$$

Para calcular las densidades de carga superficiales, primero debemos identificar todas las superficies en nuestro sistema. En este caso tendremos 4, las superficies de cada manto cilíndrico; notemos que las tapas no se incluyen pues el enunciado nos dice que este sistema se compone únicamente de mantos.

Superficies y respectivas normales y densidades de carga.



Para ahora calcular las densidades, podemos usar la siguiente fórmula

$$\vec{E}\Big|_{Borde} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

Esta nos dice que el campo eléctrico justo fuera del conductor, es igual a $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$ donde σ es la densidad de carga libre en la superficie del conductor y $\hat{n}$ la normal que apunta hacia **afuera** de dicha superficie

Ahora, podemos despejar σ como sigue

$$\vec{E}\Big|_{Borde} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} \quad / \cdot n$$

$$\varepsilon_0\vec{E}\Big|_{Borde}\cdot\hat{n} = \sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = \varepsilon_0\vec{E}\Big|_{Borde}\cdot\hat{n}}$$

Solo nos queda identificar el campo justo afuera de cada superficie y las normales respectivas.

Para σ1 tenemos que el campo justo fuera de este es el que calculamos en el interior de todo ($r < a1$), el cual es 0, por lo tanto

$$\sigma = \varepsilon_0 0 \cdot \hat{n}$$

$$\boxed{\sigma_1 = 0}$$

Para σ2, el campo es el que existe para $r \in (a_2, b_1)$ el cual es

$$\vec{E} = \frac{Q\hat{r}}{2\pi L\varepsilon_0 r}$$

Ahora debemos evaluar en el borde, y como esta superficie se encuentra en $r = a2$

$$\vec{E}\Big|_{Borde} = \frac{Q\hat{r}}{2\pi L\varepsilon_0 a_2}$$

Y como esta superficie tiene normal radial hacia afuera $\hat{n} = \hat{r}$

Por lo tanto

$$\sigma_2 = \varepsilon_0 \frac{Q\hat{r}}{2\pi L \varepsilon_0 a_2} \cdot \hat{r}$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{Q}{2\pi L a_2}}$$

Para σ3 la superficie está en $r = b1$, mientras que la normal apunta radial hacia **adentro** esto es $(-\hat{r})$, de modo que

$$\sigma_3 = \varepsilon_0 \frac{Q\hat{r}}{2\pi L \varepsilon_0 b_1} \cdot (-\hat{r})$$

$$\boxed{\sigma_3 = \frac{-Q}{2\pi L b_1}}$$

Finalmente, para σ4 usamos el campo que existe fuera del cilindro, pero como este es 0, al evaluar tendremos que

$$\boxed{\sigma_4 = 0}$$

b)

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Aquí, Q es el módulo de la carga presente en alguna de las placas, por lo que

$$Q = Q$$

$$\Delta V = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta V = -\int_{b_1}^{a_2} \frac{Q\hat{r}}{2\pi L \varepsilon_0 r} \cdot \hat{r}\, dr$$

$$\Delta V = \frac{-Q}{2\pi L\varepsilon_0} \ln(r)\Big|_{b_1}^{a_2} = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0} \ln(r)\Big|_{a_2}^{b_1} = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\left[\ln(b_1) - \ln(a_2)\right]$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{Q\ln\left(\frac{b_1}{a_2}\right)}{2\pi L\varepsilon_0}}$$

$$\therefore \quad C = \frac{\cancel{Q}}{\left(\frac{\cancel{Q}\ln\left(\frac{b_1}{a_2}\right)}{2\pi L\varepsilon_0}\right)}$$

$$\boxed{C = \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln(b_1/a_2)}}$$

c)

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \ / \nabla\cdot(\ )$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot(\varepsilon\vec{E})$$

$$\rho_l = \varepsilon\nabla\cdot\vec{E}$$

Si ε **no depende del espacio** (como en este caso), lo podemos sacar de la divergencia.

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho_l/\varepsilon$$

Notemos que esta es la Ley de Gauss en forma diferencial, pero ahora con una densidad de carga libre y la permitividad ε de algún material.
Esta ley puede ser pasada a forma integral, de modo que con ella podemos resolver el problema igual que como hicimos antes, pero cambiando ε_0 por ε, de modo que en el resultado final solo debemos hacer ese mismo cambio, es decir

$$\boxed{C = \frac{2\pi L\varepsilon}{\ln(b_1/a_2)}}$$

La gracia de esto es que en general $\varepsilon > \varepsilon_0$, de modo que si llenamos un capacitor con dieléctrico, la capacitancia del sistema aumenta, y puede aumentar sustancialmente. Por ejemplo, la permitividad del agua es unas 80 veces la permitividad del vació, por lo que llenar un capacitor con agua (destilada) aumentaría su capacitancia 80 veces, lo cual puede resultar muy útil.
Ojo, el agua destilada no conduce la electricidad, así que el riesgo de corto circuito es bajo, pero sí aceleraría el proceso de oxidación (por eso solo es un ejemplo).

P2

Dado que se nos dice que $d + x << a$, podemos aproximar estas placas como si fuesen infinitamente grandes. Ahora, nosotros ya conocemos el campo eléctrico generado por **una** placa infinita, y este vale

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{Por encima de la placa.} \\ \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{Por debajo '' '' ''.} \end{cases}$$

donde σ es la densidad de carga presente en la placa.
Como las placas están dispuestas verticalmente, podemos escribir:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} & \text{A la derecha de la placa.} \\ \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} & \text{A la izquierda '' '' ''.} \end{cases}$$

Notemos que no conocemos σ, pero sí conocemos el área de las placas (A) y puesto que estas son conductoras, la densidad de carga se distribuirá uniformemente sobre su superficie, por lo tanto

$$\sigma_1 = \frac{Q}{A} \qquad \sigma_2 = \frac{-Q}{A}$$

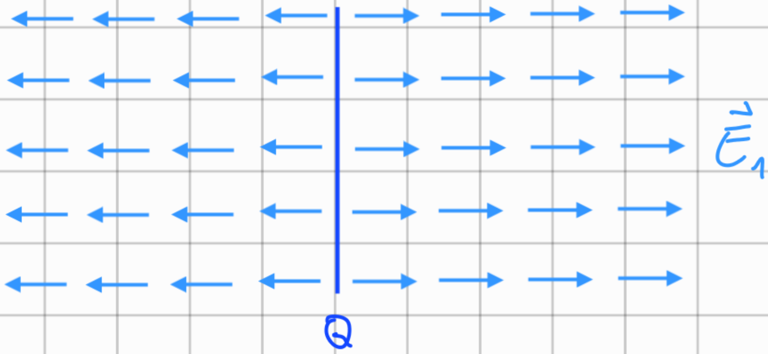
Ahora notemos que tenemos 2 placas, por lo que el campo total será la suma de ambos.
Si colocamos el origen $x' = 0$ sobre la placa izquierda, tenemos que los campos serán

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{-Q\hat{x}}{2\varepsilon_0 A} & x' < 0 \\ \frac{Q\hat{x}}{2\varepsilon_0 A} & x' > 0 \end{cases} \qquad \vec{E}_2 = \begin{cases} \frac{Q\hat{x}}{2\varepsilon_0 A} & x' < d + x \\ \frac{-Q\hat{x}}{2\varepsilon_0 A} & x' > d + x \end{cases}$$

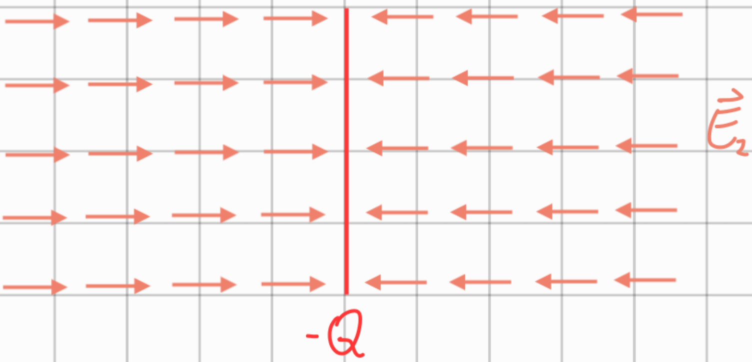
Así el campo total es

$$\vec{E}_T = \begin{cases} 0 & x' < 0 \\ \frac{Q\hat{x}}{\varepsilon_0 A} & x' \in (0, d + x) \\ 0 & x' > d + x \end{cases}$$

Otra forma de ver esto es dibujando las líneas de campo. Para la placa con carga positiva tenemos

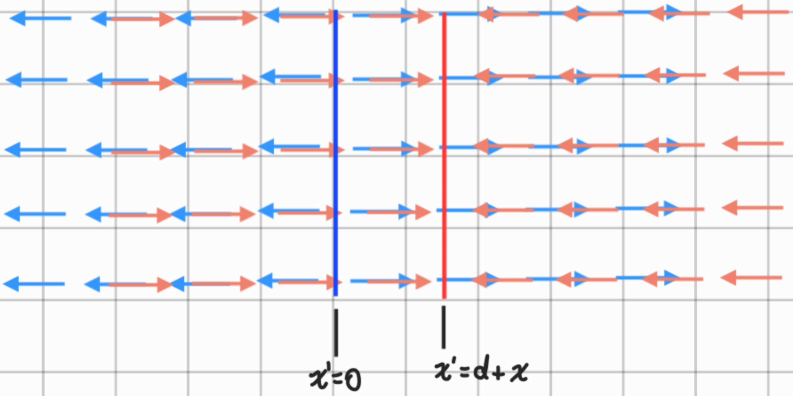


y para la placa con carga negativa

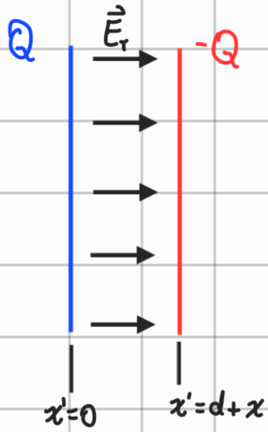


Vea que como la carga es negativa en la placa, el campo eléctrico apunta hacia ella.

Entonces, al tener las dos placas



Notemos que entre las placas los campos de ambas apuntan en el mismo sentido, por lo que se suman, pero por fuera los campos van en sentidos contrarios, de modo que se cancelan, por lo que nos quedamos solo con



Conociendo el campo entre las placas, podemos calcular la diferencia de potencial entre ellas

$$\Delta V = -\int_{d+x}^{0} \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\hat{x}\cdot\hat{x}\,dx = \int_{0}^{d+x} \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\,dx = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\int_{0}^{d+x} dx$$

$$\Delta V = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}(d+x)$$

Ojo, la capacitancia se define como una magnitud positiva, así que si la diferencia de potencial le llega a quedar negativa, puede tomar el valor absoluto de su resultado para escribir la capacitancia.

$$\Rightarrow \quad C = \frac{\cancel{Q}}{\left(\frac{\cancel{Q}}{\varepsilon_0 A}(d+x)\right)}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d+x}}$$

b)

Por la Ley de Hooke, tenemos que la placa derecha experimenta una fuerza igual a

$$F = -kx$$

Y por la segunda Ley de Newton

$$F = ma \Rightarrow ma = -kx \; \star$$

De la expresión de la capacitancia podemos despejar *x*

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d+x}$$

$$x = \frac{\varepsilon_0 A}{C} - d$$

Reemplazando en $\star$

$$ma = -k\left(\frac{\varepsilon_0 A}{C} - d\right)$$

$$\boxed{a = -\frac{k\varepsilon_0 A}{mC} + \frac{kd}{m}}$$

c)

Sabemos que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{y} \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Entonces, si conocemos C, podemos determinar $v(t)$ y $x(t)$ integrando la expresión de la aceleración.

Datazos:
Nosotros podemos medir la capacitancia, entonces si conocemos d, k, A y m, podemos determinar la aceleración de un objeto, es decir, construimos un acelerómetro. De hecho, los acelerómetros en nuestros celulares funcionan así, es lo que permite al celular saber cuando está de cabeza o de lado, o lo que le permite contar nuestros pasos a un reloj inteligente ("smart-watch" para los gringos).
Y si nuestro acelerómetro registra la aceleración lo suficientemente rápido, podemos calcular su velocidad y posición a partir de ella integrando, esta integración no es analítica, sino que numérica (o sea que se resuelve con un computador), pero eso no es complicado, y de hecho se ha hecho, la NASA utilizó el acelerometro de un celular para construir un sistema de navegación provisorio para un drón en Marte.

El chiste es que electro no es solo "considere una esfera cargada, calcule el campo en todo el espacio 😴", sino que posee aplicaciones reales y MUY útiles.

Sin la teoría electromagnética usted no podría estar leyendo esto en primer lugar.