Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 11: Conductores

P1. Esfera con cavidades

Dos cavidades esféricas de radios a y b son perforadas al interior de una esfera conductora no cargada de radio R. Al centro de cada cavidad se coloca una carga puntual q_a y q_b respectivamente.

a) Encuentre las densidades de carga superficial σ_a, σ_b y σ_R.

b) ¿Cuál es el campo fuera del conductor?

c) ¿Cuál es el campo dentro de cada cavidad?

d) ¿Cuál es la fuerza sobre q_a y q_b?

e) ¿Cuál de estas respuestas cambiaría si colocásemos una tercera carga q_c cerca del conductor?

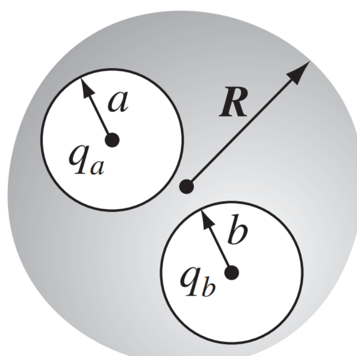


Figura 1: Esfera con cavidades.

P2.

Considere cuatro placas conductoras delgadas y paralelas de area A. Todas estan separadas con la placa siguiente por una distancia d. Entre las placas de los extremos se conecta una fuente de potencial (batería) de V_0. Considerando una carga neta nula en todos los conductores y despreciando los efectos de borde, calcule:

a. La carga inducida en cada cara de cada placa.

b. La capacitancia del sistema.

Luego se conectan ambas placas centrales entre si. Calcule la nueva capacitancia del sistema.

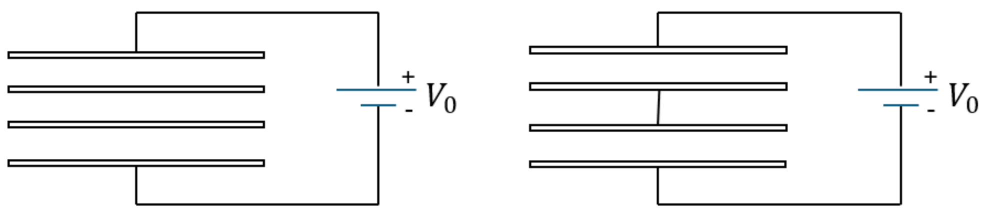


Figura 2

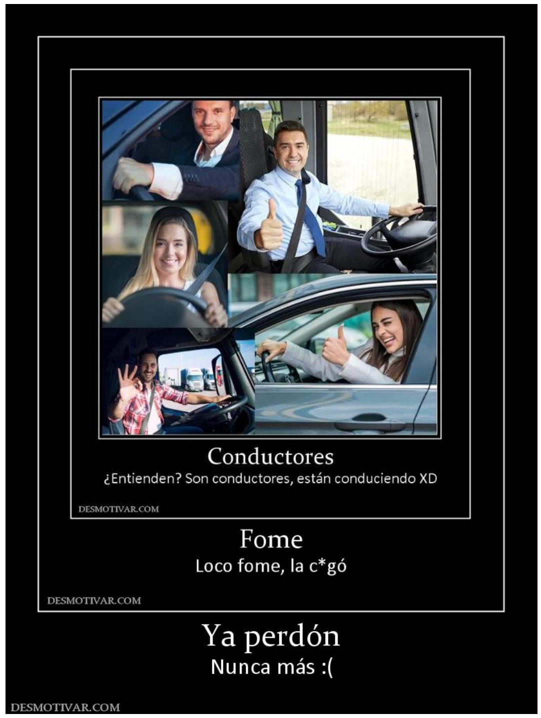


Figura 3: Conductores XDD.

Resumen

Conductores

Son materiales que tienen la capacidad de reorganizar sus cargas internas en respuesta a un campo eléctrico externo, generando así un campo de igual magnitud, pero en dirección contraria, lo que resulta en su anulación. De esta forma, se cumplen lo siguiente:

1. $\vec{E} = 0$ al interior del material, y por lo tanto $\rho = 0$.
2. Es un equipotencial, o sea, todos los puntos al interior están al mismo potencial.
3. La totalidad de la carga se acumula en las superficies, generando un campo siempre perpendicular a esta, con valor $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$ donde $\hat{n}$ es la normal exterior.

Condensadores

También llamados capacitores, son dispositivos capaces de almacenar energía en forma de campo eléctrico, los cuales están conformados por dos o más conductores en forma arbitraria. La expresión de la capacidad (o capacitancia) está dada por:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

con Q la carga acumulada en la superficie de los conductores y ΔV la diferencia de potencial entre estos.

Los condensadores pueden ser conectados en serie o en paralelo (similar a las resistencias en métodos experimentales), de aquí se pueden obtener las capacitancias equivalentes como:

$$C_{serie} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \right)^{-1} \qquad C_{paralelo} = \left(\sum_{i=1}^{N} C_i \right)$$

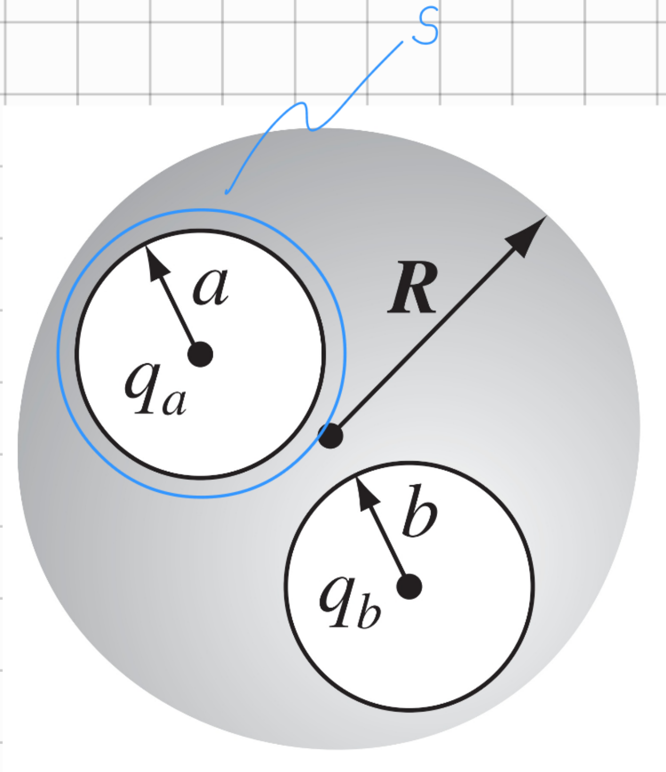
Energía en condensadores: La energía acumulada en un condensador formado por dos conductores de cargas Q y $-Q$, a una diferencia de potencial ΔV puede calcularse como:

$$U = \frac{Q\Delta V}{2} = \frac{C\Delta V^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

P1

a)

Para encontrar σ_a encerramos la cavidad donde se encuentra q_a con una superficie esférica ***S*** imaginaria



La Ley de Gauss nos dice que

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Ahora, la presencia de la carga q_a inducirá una carga sobre la superficie de la cavidad, por lo que la carga encerrada por nuestra superficie imaginaria será

$$Q_{enc} = q_a + q_{inducida}$$

Por otro lado, sabemos que el campo eléctrico dentro del conductor debe ser cero, de forma que si midiéramos el campo en la superficie imaginaria que colocamos, veríamos que el campo es 0 sobre toda esta superficie, por lo que no puede haber flujo de campo eléctrico atravesándola

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Y por la Ley de Gauss

$$0 = q_a + q_{inducida}$$

$$\Rightarrow q_{inducida} = -q_a$$

Debido a que la carga q_a se encuentra justo en el centro de la cavidad, la carga inducida se distribuirá de forma uniforme sobre esta, por lo tanto

$$\sigma_a = \frac{-q_a}{A_a}$$

Donde A_a corresponde al área de la cavidad, y debido la cavidad es una esfera de radio a

$$\boxed{\sigma_a = \frac{-q_a}{4\pi a^2}}$$

De forma totalmente análoga podremos encontrar que

$$\boxed{\sigma_b = \frac{-q_b}{4\pi b^2}}$$

Ahora vamos con σ_R. Sabemos que el conductor tiene una carga total nula, por lo que la carga inducida en su superficie exterior deberá corresponder a menos la carga inducida sobre la superficie de las cavidades en su interior, en otras palabras

$$Q_{total} = 0 \Rightarrow q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el interior}}} + q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el exterior}}} = 0$$

$$q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el exterior}}} = -q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el interior}}}$$

Y gracias a lo que realizamos antes ya conocemos la carga inducida en el interior del conductor

$$q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el exterior}}} = -\left(-q_a - q_b\right)$$

$$q_{\substack{\text{inducida en}\\ \text{el exterior}}} = q_a + q_b$$

La densidad de carga inducida en la parte exterior de la esfera se distribuirá de manera uniforme, pues la influencia asimétrica de una de las cargas *q* se verá cancelada por la distribución de carga -*q* sobre la superficie de la cavidad (si le cuesta entender esta explicación, intente quedarse con la idea de que el campo en la superficie exterior del conductor se distribuye de manera uniforme), por lo tanto

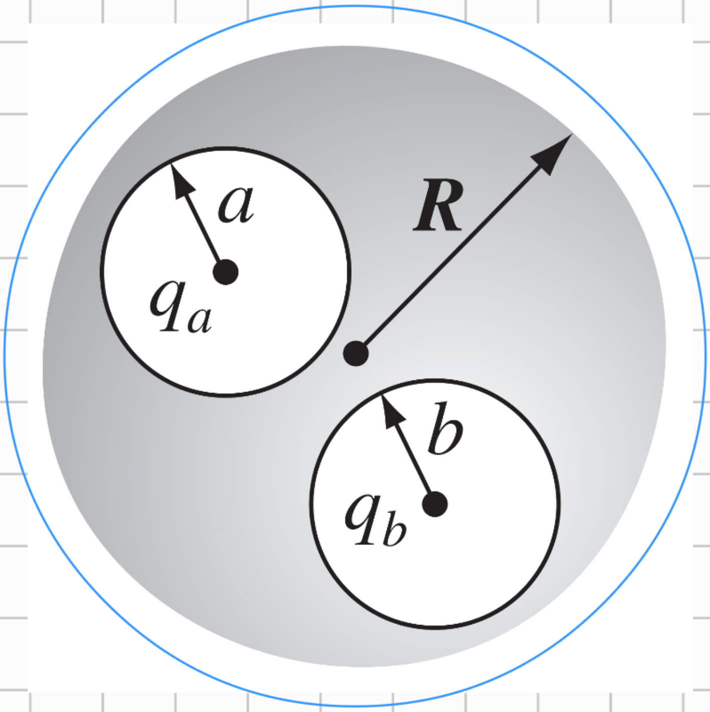
$$\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{A_R}$$

Donde A_R al área de la superficie exterior del conductor, y debido a que este es una esfera

$$\boxed{\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}}$$

b)

Empezamos encerrando todo el conductor con una superficie imaginaria



Dado que el conductor posee carga total nula, la carga encerrada corresponderá únicamente a las cargas puntuales, es decir

$$Q_{enc} = q_a + q_b$$

Por otro lado, sabemos que la carga se encuentra distribuida uniformemente sobre el conductor, de modo que si diésemos vueltas alrededor de este (a una distancia fija de su centro) seguiríamos viendo lo mismo todo el tiempo, por lo que el campo eléctrico no puede tener dependencías de φ ni θ, además de no tener componentes angulares, por lo tanto el campo eléctrico tiene la siguiente forma

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$

Ahora aplicamos la Ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E(r)\,\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}\, r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{q_a + q_b}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) r^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{q_a + q_b}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{q_a + q_b}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{q_a + q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Y por los argumentos de simetría

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{q_a + q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$

c)

Dado que en las cavidades existe espacio vacío, dentro de estas existirá el campo generado por las cargas puntuales en su interior. Además, los conductores aíslan eléctricamente el espacio que se encuentre dentro de ellos, por lo que dentro de las cavidades solo podrá existir el campo eléctrico generado por las cargas presentes en dicha cavidad, o sea, dentro de la cavidad en la que se encuentra q_a solo existirá el campo generado por q_a, el campo que genere cualquier otra carga fuera de esta cavidad no podrá penetrar en ella. De manera análoga, en la cavidad donde está q_b solo existirá el campo que genera esta misma carga, por lo tanto:

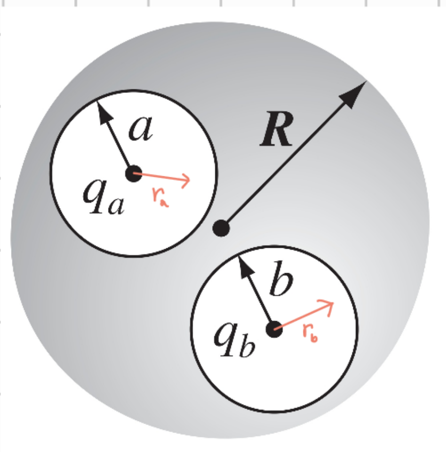
El campo en la cavidad donde se encuentra q_a es

$$\boxed{\vec{E}_a = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 r_a^2}\hat{r}_a}$$

donde r_a mide la distancia desde el centro de la cavidad y $\hat{r}_a$ es el vector unitario asociado al sistema de referencia centrado en el medio de la cavidad.

Similarmente el campo donde está la carga q_b es

$$\boxed{\vec{E}_b = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 r_b^2}\hat{r}_b}$$



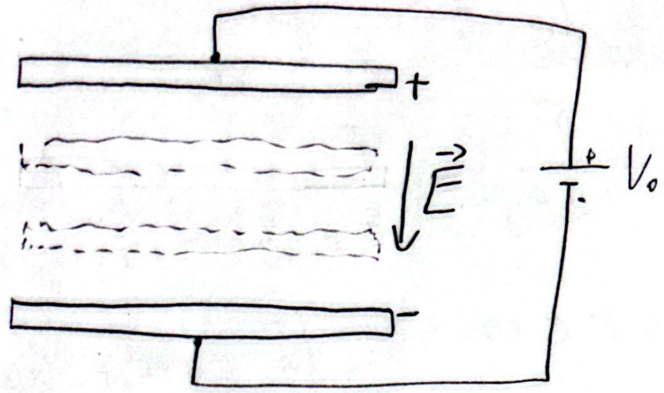
d)

Dado que el conductor aísla eléctricamente a q_a y q_b, ninguna de estas cargas "siente" a la otra, y debido a que ambas se encuentran en el centro de su respectiva cavidad al mismo tiempo que la densidad de carga inducida se distribuye uniformemente sobre su superficie, las cargas no experimentarán ninguna fuerza.

e)

Añadir una tercera carga al sistema inmediatamente haría que el campo fuera del conductor cambiase, lo que al mismo tiempo debe cambiar la distribución de carga superficial σ_R, dentro del conductor no cambia nada debido a que está eléctricamente aislado.

P2)



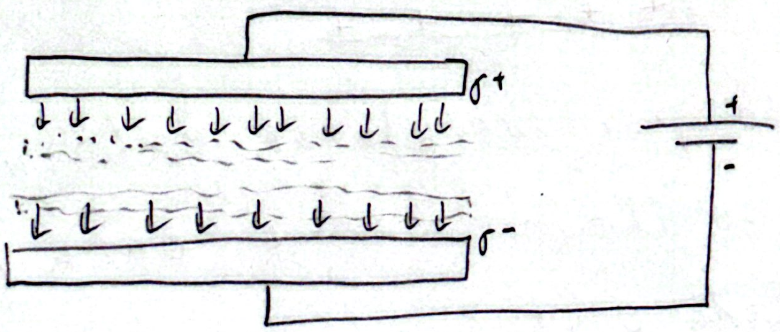
Si entre las placas externas existe un Potencial de V_0, al hacer la integral de linea $\int_+^- \vec{E} \cdot \vec{dl}$ para cualquier trayectoria obtendremos V_0

$$V_0 = \int_+^- \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Al despreciar los efectos de borde consideramos el $\vec{E}$ como el de una placa infinita

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Este campo existe porque ciertas cargas positivas se van a una placa y otras negativas a la otra. provocando densidades de carga $-\sigma^+ = \sigma^-$ pues la carga neta es 0.

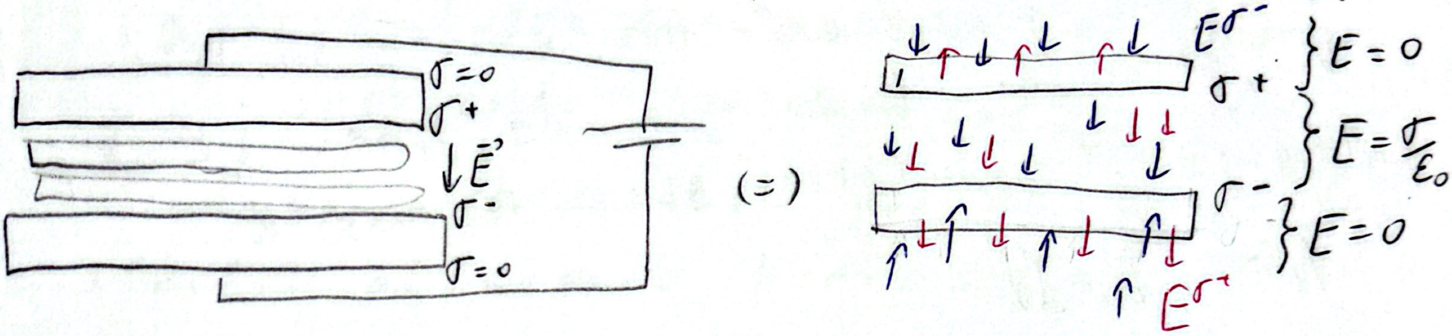


Los campos uniformes de σ^- y σ^+ se contribullen

$$E_{neto} = E^{\sigma^+} + E^{\sigma^-} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad ¿\sigma?$$

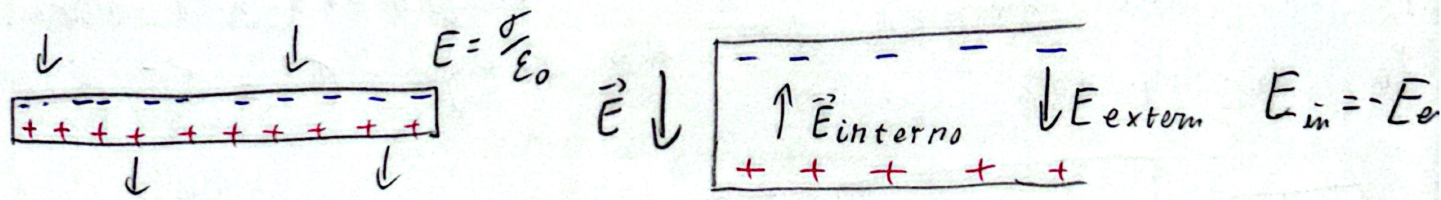
↳ Ya lo veremos

A Priori no consideraremos la contribución de las placas centrales pues son neutras.

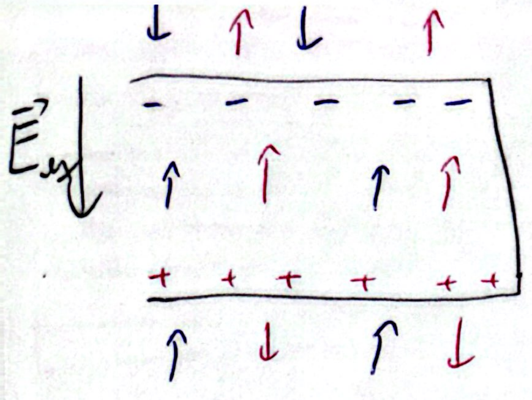


Con esta configuración en donde las caras externas de las placas externas tienen $\sigma=0$ y las caras internas σ^+ o σ^-, el campo dentro de las placas conductoras es nulo.

Veamos como se comportan las placas centrales



Debido al campo producido por las placas externas las cargas positivas se iran a una cara y las negativas a otra. Esta configuracion creara un campo interno que contrarreste al $\vec{E}_{ext}$



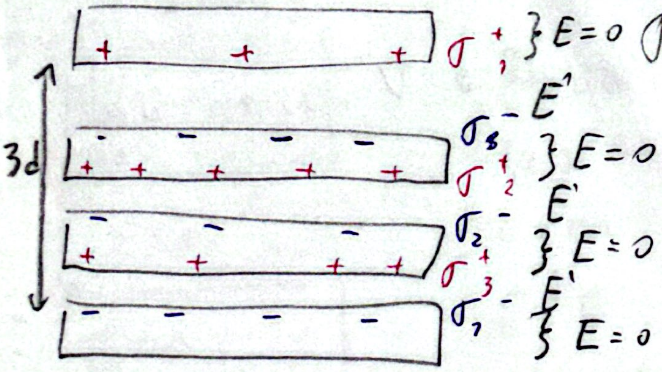
$\} \; E_{ex} + E^{\sigma^-} - E^{\sigma^+} = E_{ex}$

$\} \; E^{\sigma^+} + E^{\sigma^-} - E_{ex} = 0$

$\} \; E_{ex} + E^{\sigma^+} - E^{\sigma^-} = E_{ex}$

Sin embargo fuera de la placa el campo interno provocado por las cargas de la placa desaparece. Las placas centrales no afectan al campo fuera de ellas

Analogamente pasa lo mismo con la otra placa central



$\sigma_1^+ = \sigma_2^+ = \sigma_3^+ = -\sigma_1^- = -\sigma_2^- = \sigma_3^+$

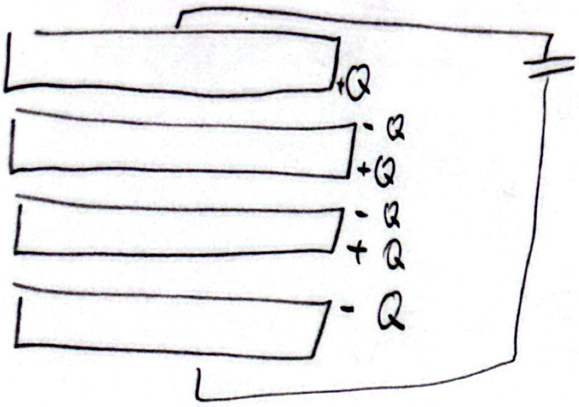
$$E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Obtengamos el valor de σ

$V_0 = \int_+^- \vec{E} \cdot \vec{dl}$ como trayectoria usamos la recta paralela a $\vec{E}$ que es cte (sale de la int

$$V_0 = E \int_+^- dl = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} 3d \Rightarrow \sigma = \frac{V_0 \varepsilon_0}{3d}$$

Para obtener la carga, $Q = \sigma \cdot Area = \dfrac{V_0 \varepsilon_0 A}{3d}$

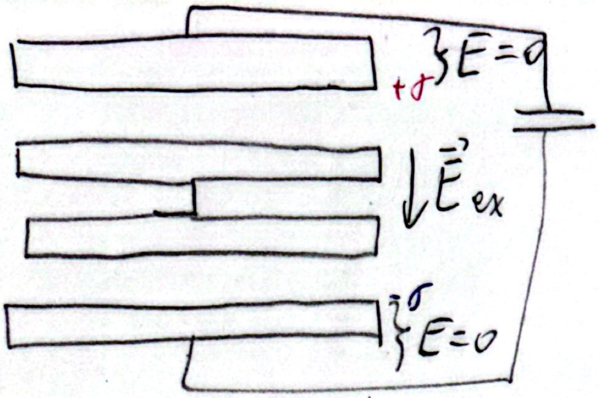


$$Q = \frac{V_0 \varepsilon_0 A}{3d}$$

La capacitancia del sistema se refiere a cuanta carga va a almacenar uno de los terminales conectados (placa externa) dado un potencial.

$$Q_{(V)} = \underbrace{C}_{\text{Capacitancia: definicion}} V = \frac{\varepsilon_0 A}{3d} V \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{3d}$$

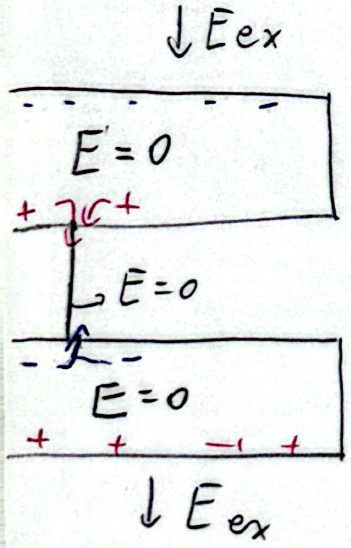
Notemos que C no depende de Q o V sino de la geometria.



Ahora que ambas placas centrales podemos seguir argumentando por las densidades de las placas externas.

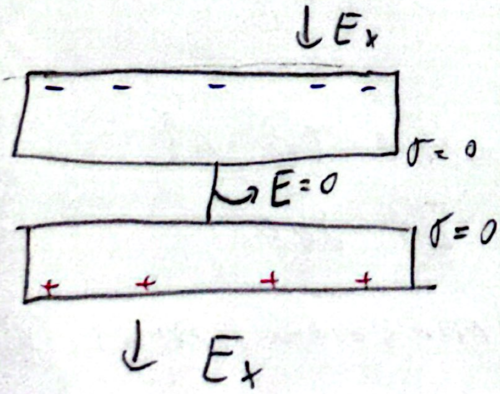
Así existe un campo $\vec{E}$ nulo dentro de las placas y un $\vec{E}_{ex} = \sigma / \varepsilon_0$ entre ellas.

Veamos que sucede con las placas centrales.



Podemos darnos cuenta que las caras que estaban en los caras interiores ahora acelerados por el campo E_{ex} se movera ala otra placa

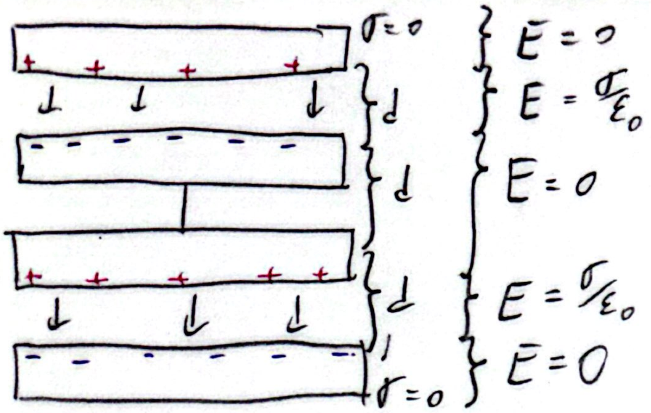
$$E^{\sigma^{\pm}} = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0}$$



$$E_{ex} + E^{\sigma^-} - E^{\sigma^+} = E_{ex}$$

$$E_{ex} - E^{\sigma^-} - E^{\sigma^+} = 0$$

$$E_{ex} + E^{\sigma^+} - E^{\sigma^-} = E_{ex}$$



Con esta configuración todos los conductores satisfacen que tienen campo nulo.

Notamos que el campo $E_{ex} = \sigma/\varepsilon_0$ ahora existe en 2 de los tramos d.

$$V_0 = \int_+^- \vec{E}\, dl = \int_+^d \sigma/\varepsilon_0 \, dl + \int_d^{2d} 0 \, dl + \int_{2d}^{3d} \sigma/\varepsilon_0 \, dl$$

$$V_0 = \frac{\sigma 2d}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = \frac{V_0 \varepsilon_0}{2d} =$$

$$\Rightarrow Q = \sigma \cdot A = \frac{V_0 \varepsilon_0 A}{2d}$$

$$\Rightarrow \pm Q(V) = C \cdot V = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} V$$

$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$$

La capacitancia del sistema aumento al conectar las placas centrales. Es decir ahora el terminal conectado almacena mas carga dado un potencial.