Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 10: Preparación para el Control 1

P1.
Considere un cilindro con densidad de carga dada por: $\rho = \rho_0 z$ Donde z es la distancia a el area transversal central del cilindro, positiva hacia un lado y negativa hacia el otro. Además existe un campo electrico externo de magnitud E uniforme. Este forma un angulo β con el eje de simetría. (ver figura). Calcule:

a) La fuerza y el torque que va a experimentar el cuerpo debido al campo externo. En funcion de β.

b) Energia del dipolo debido al campo externo. ¿Cual es el trabajo maximo que puede hacer el campo externo sobre el dipolo?

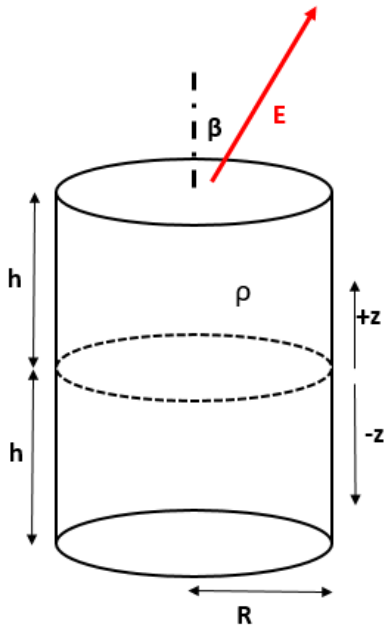


Figura 1: Cuerpo cargado .

P2. Superposición

Un plano infinito con densidad de carga superficial uniforme σ se encuentra pegado a un bloque infinito de grosor d y con densidad de carga volumétrica uniforme ρ, como se muestra en la Figura 1.
Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.

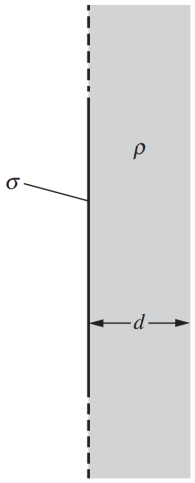


Figura 2: Plano y bloque infinitos cargados.

Resumen

Ley de Gauss

La ley de Gauss en su forma diferencial es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

Realizando una integral de volumen y aplicando el teorema de la divergencia se llega a la forma integral de la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

La ley de Gauss es siempre válida, pero es muy útil cuando se tienen simetrías en el campo eléctrico. Para asumir las simetrías correctas, hay que observar qué simetrías tiene ρ, ya que $\vec{E}$ imita esas simetrías.

Dipolos

Un sistema tiene comportamiento de dipolo si su momento monopolar es nulo (esto es, carga total nula) y momento dipolar no nulo. Para cargas puntuales, el momento dipolar viene dado por:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i \tag{3}$$

Para una distribución continua de carga:

$$\vec{p} = \int_{\text{distrib}} \vec{r}\, dq(\vec{r}) \tag{4}$$

Dipolo en un campo eléctrico externo

Fuerza sobre un dipolo:

$$\vec{F}_{\text{dipolo}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{E} \text{ es uniforme} \\ (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E} & \text{si } \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \end{cases}$$

Torque sobre un dipolo:

$$\vec{\tau}_{\text{dipolo}} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_-$$

Para un campo uniforme:

$$\vec{\tau}_{\text{dipolo}} = \vec{p} \times \vec{E}$$

(El dipolo siempre tiende a alinearse con el campo eléctrico externo $\vec{E}$).

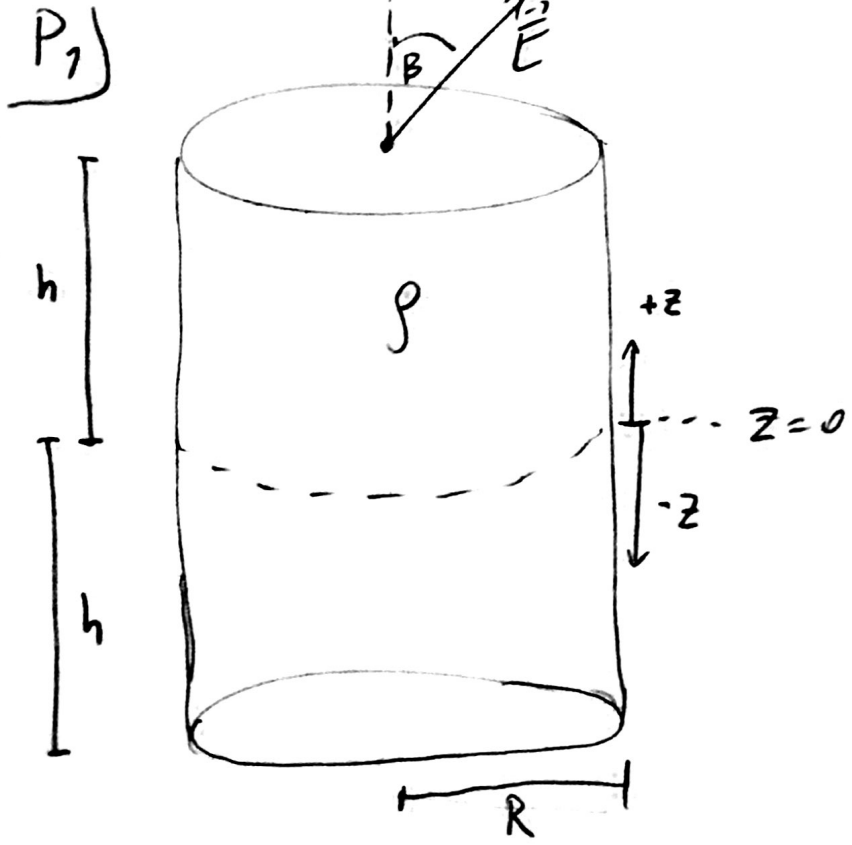
Energía de un dipolo (debido a un campo externo):

$$W_{\text{dipolo}} = (+q)V\left(\frac{\vec{a}}{2}\right) + (-q)V\left(-\frac{\vec{a}}{2}\right) = q\left[V\left(\frac{\vec{a}}{2}\right) - V\left(-\frac{\vec{a}}{2}\right)\right]$$

Usando aproximaciones de primer orden, esto se puede simplificar a:

$$W_{\text{dipolo}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

P1)



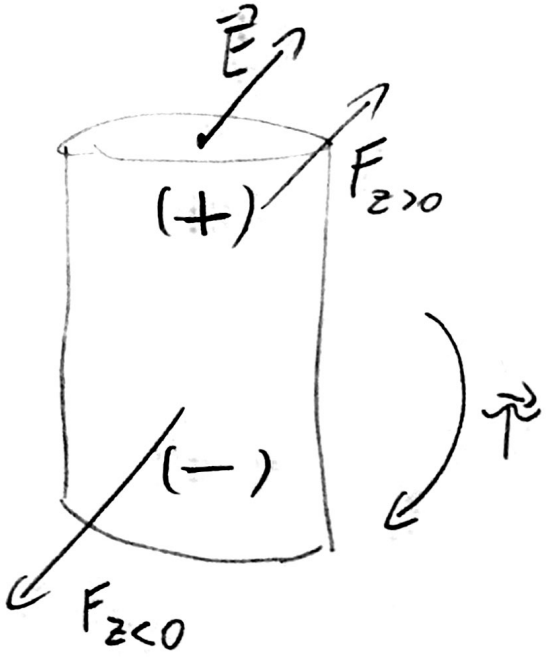
$$\rho_{(z)} = \rho_0 z$$

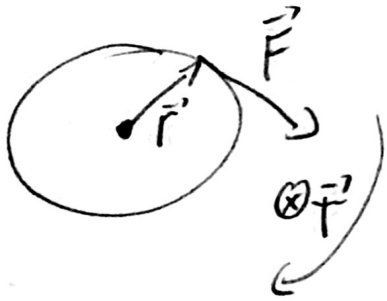
Nos damos cuenta que en $z<0$ el cilindro tiene distribucion igual y opuesta a $z>0$. Concluimos por simetria que la carga total es nula.

La Fuerza que ejerce el compo $\vec{E}$ sera para un sentido en $z>0$ y para el Opuesto en $z<0$

$$F_{neta} = F_{z<0} + F_{z>0} = Q_{z<0}E + Q_{z>0}E = E(Q_{z>0} + Q_{z<0})$$
$$= Q_{total}E = 0$$

Pues el cuerpo es neutro.





Sin embargo estas fuerzas al actuar en distintos puntos del cuerpo producirán un Torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{\tau}_{neto} = \sum \vec{r} \times \vec{F} \text{ o } \int \vec{r} \times d\vec{F}$$

$$F = q\vec{E}$$

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times \vec{F} = \int \vec{r} \times dq\vec{E} = \int dq\, \vec{r} \times \vec{E}$$

Consideramos $\vec{E}$ igual en todo el cuerpo

$$\vec{\tau} = \underbrace{\left(\int \vec{r}\, dq\right)}_{\vec{p}} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

con $\vec{p} = \int \vec{r}\, dq$ o $\sum \vec{r}\, q$

dq: distribución de carga

q: cargas puntuales

El momento dipolar $\vec{p}$ lo usaremos para sacar el Torque

$$\vec{p} = \int \vec{r}\, dq = \int \vec{r}\, \rho_{(z)}\, dV = \int \vec{r}\, \rho_{(z)}\, r\, d\theta\, dr\, dz$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= r\hat{r} + z\hat{z} \\ \rho_{(z)} &= \rho_0 \end{aligned}\right\} \vec{p} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_{-h}^{h} \rho_0 (r\hat{r} + z\hat{z})\, z\, r\, d\theta\, dr\, dz$$

$\int_0^{2\pi} \hat{r}\, d\theta = 0$

$$\vec{p} = 2\pi\rho_0 \int_0^{R}\int_{-h}^{h} r\, z^2\, dr\, dz\, \hat{z} = 2\pi\rho_0 \frac{R^2}{2} \int_{-h}^{h} z^2\, dz\, \hat{z}$$

$$= \frac{\pi\rho_0 R^2}{3} z^3 \Big|_{-h}^{h} \hat{z} = \frac{2\pi\rho_0 R^2 h^3}{3} \hat{z}$$

El momento dipolar $\vec{p}$ siempre apunta hacia los cargas positivas

Con nuestro $\vec{p} = \frac{2\pi\rho_0 R^2 h^3}{3}\hat{z}$ podemos calcular el Torque.

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}} = pE\,\mathrm{sen}(\beta)$$

$$\tau = \frac{2\pi \rho_0 R^2 h^3 E}{3} \operatorname{sen}(\beta)$$

para ver el sentido de la rotacion que ocurre en el plano que genera $\vec{p}$ y $\vec{E}$ usamos regla de la mano derecha o direccion de las fuerzas.

La energia del sistema correspondera al trabajo que puede hacer el campo $\vec{E}$ sobre el dipolo hasta llegar a un estado de referencia.

$$U_{(x)} = \overbrace{U_{ref}}^{0} + W_{x \to ref} = \int_{\theta}^{\theta_{ref}} \vec{\tau}\, d\theta + \int_{x}^{x_{ref}} \underbrace{F \cdot dl}_{0}$$

$$U_{(\theta)} = \int_{\theta}^{\theta_{ref}} pE \operatorname{sen}(\theta) d\theta = -pE\cos(\theta)\Big|_{\theta}^{\theta_{ref}}$$

Conveniente usaremos $\theta_{ref} = \pi/2 \Rightarrow U_{(\pi/2)} = 0$

$$\Rightarrow U_{(\theta)} = pE\overbrace{\cos(\pi/2)}^{0} - pE\cos(\pi/2) = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

$$\boxed{U = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

En nuestro caso $U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = \frac{-2\pi \rho_0 R^2 h^3 E}{3} \cos(\beta)$

Notemos que el estado de energía maximo es en $\beta = \pi \Rightarrow U_{(\pi)} = \frac{-2\pi R^2 h^3 \rho_0 E}{3} \cos(\pi)$

$$U_{(\pi)} = \frac{2\pi R^2 \rho_0 E h^3}{3}$$

Y el minimo es en $\beta = 0$

$$U_{(0)} = \frac{-2\pi \rho_0 R^2 h^3 E}{3}$$

Por lo tanto el maximo trabajo que puede ejercer el $\vec{E}$ sobre el dipolo es:

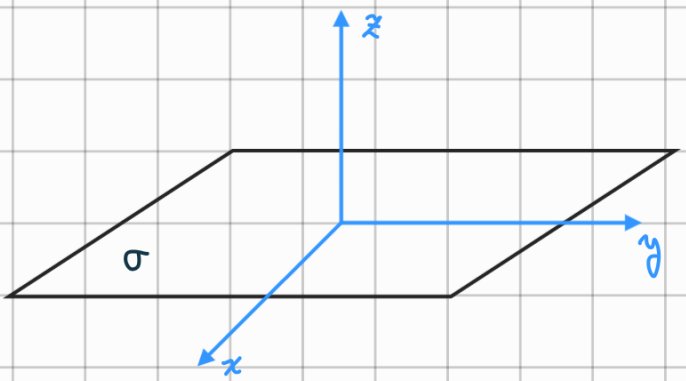
$$W = U_{max} - U_{min} = U_{(\pi)} - U_{(0)}$$

$$W_{max} = \frac{4\rho_0 \pi R^2 h^3 E}{3}$$

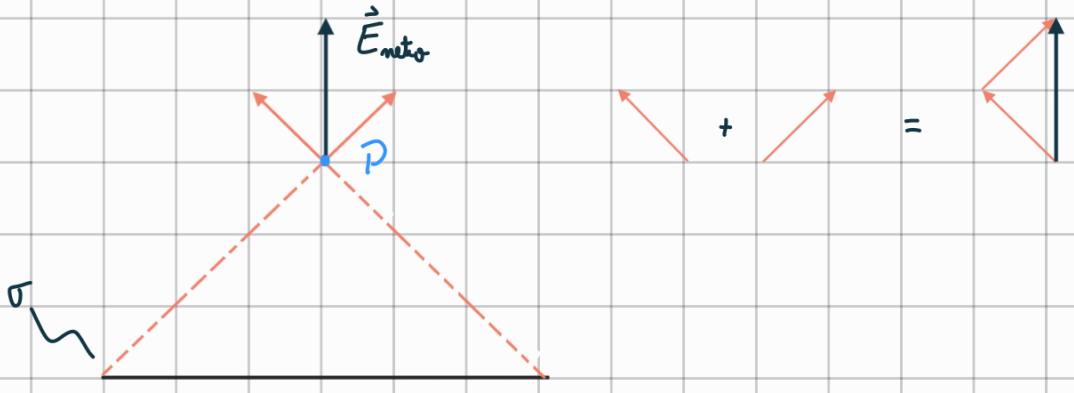
P2

Este problema puede ser resuelto mediante el principio de superposicion, es decir, primero calcularemos el campo electrico generado por la placa, y luego por el bloque, finalmente el campo total sera la suma de ambos.

Para calcular el campo de la placa, vamos a empezar centrando nuestro sistema de coordenadas en el centro de esta



Pensemos ahora en como se debería ver el campo para un punto *P* por sobre la placa

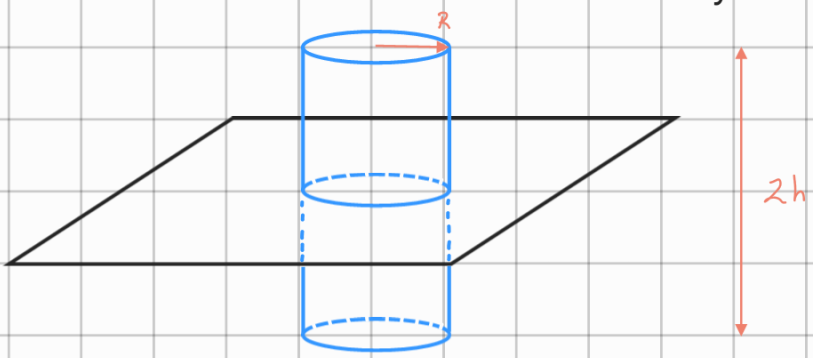


Podemos notar que para cada aporte del campo que provenga desde el lado izquierdo, existirá otro que vendrá desde el lado derecho que anulará la componente horizontal del campo. Y esto se cumple para cualquier punto sobre la placa, pues dado que esta es infinita, si nos movemos hacia la izquierda o la derecha, el plano se seguirá extendiendo infinitamente en todas las direcciones.
También podemos pensar esto como que, dado que el plano es infinito, no importa donde nos coloquemos, siempre estaremos en su centro.
Este mismo análisis se puede realizar para un punto por debajo de la placa, donde se encuentra el mismo comportamiento para el campo, solo que ahora este apuntará en el sentido opuesto, o sea, hacia abajo.
Por otro lado, la densidad de carga es uniforme, o sea que esta no cambia con la posición, de modo que el campo no podrá tener dependencias de *x* ni de *y*.

Así concluimos que

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} E(z)\hat{z} & z > 0 \\ E(z)(-\hat{z}) & z < 0 \end{cases}$$

Teniendo esto, podemos usar la Ley de Gauss para calcular el campo eléctrico. Empecemos por dibujar nuestra superficie Gaussiana, para este caso lo más conveniente es usar un cilindro el cual tendrá un radio R y altura $2h$



La Ley de Gauss nos dice ahora que el flujo de campo eléctrico que atraviesa a este cilindro es igual a la carga encerrada por el cilindro, dividida por ϵ_0

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Calculemos el lado izquierdo.
Veamos que el cilindro se compone de 3 superficies, las tapas superior e inferior (T1 y T2) y el manto (M), por lo que podemos calcular el flujo que atraviesa al cilindro calculando el flujo que atraviesa a cada superficie por separado, o sea

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{T_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int_M \vec{E} \cdot d\vec{S}_3$$

El diferencial de superficie para las tapas es

$$dS = r\,dr\,d\varphi$$

Por otro lado, la Ley de Gauss nos dice que la superficie gaussiana escogida

debe estar orientada hacia afuera, por lo tanto

$$d\vec{S}_1 = \hat{z}\, r\,dr\,d\varphi \quad \text{y} \quad d\vec{S}_2 = (-\hat{z})\, r\,dr\,d\varphi$$

Por su parte, el diferencial de superficie para el manto es

$$d\vec{S}_3 = \hat{r}\, R\, d\varphi\, dz$$

Reemplazando

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \vec{E}\cdot\hat{z}\, r\,dr\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \vec{E}\cdot(-\hat{z})\, r\,dr\,d\varphi + \int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi} \vec{E}\cdot\hat{r}\, R\, d\varphi\, dz$$

Y antes ya dedujimos la forma de **E**, por lo que también podemos hacer ese reemplazo

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\underbrace{\hat{z}\cdot\hat{z}}_{=1}\, r\,dr\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\underbrace{(-\hat{z})\cdot(-\hat{z})}_{=1}\, r\,dr\,d\varphi + \int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi} E(z)\underbrace{(\pm\hat{z})\cdot\hat{r}}_{=0}\, R\, d\varphi\, dz$$

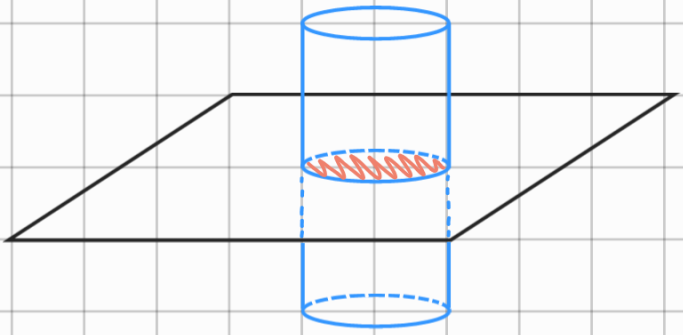
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\, r\,dr\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\, r\,dr\,d\varphi$$

*Notar que como la la tapa inferior se encuentra en $z<0$ usamos $\vec{E} = E(z)(-\hat{z})$.
Ahora podemos sacar los $E(z)$ de las integrales pues no dependen de r ni de φ

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2E(z)\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\varphi = 2E(z)\,\pi R^2$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi R^2 E(z)}$$

Ahora calculamos la parte derecha de la Ley de Gauss.
La carga encerrada corresponde a la parte naranja en el dibujo de abajo



Dado que la densidad de carga es uniforme

$$Q_{enc} = \sigma \cdot \acute{A}_{rea}$$

$$\boxed{Q_{enc} = \sigma \cdot \pi R^2}$$

También podríamos haber calculado la carga encerrada como

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \sigma \, r \, dr \, d\varphi \quad (\text{Propuesto})$$

Ahora por Ley de Gauss

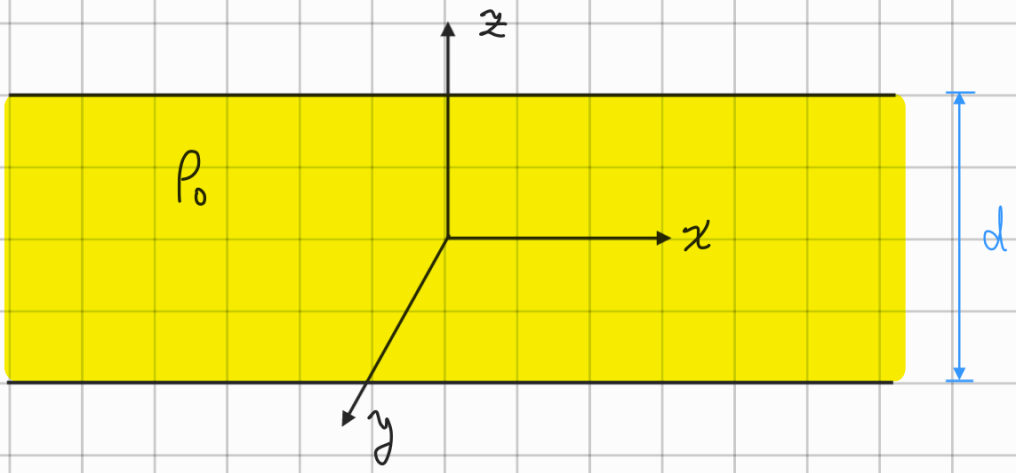
$$2\pi R^2 E(z) = \frac{\pi \sigma R^2}{\epsilon_0}$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

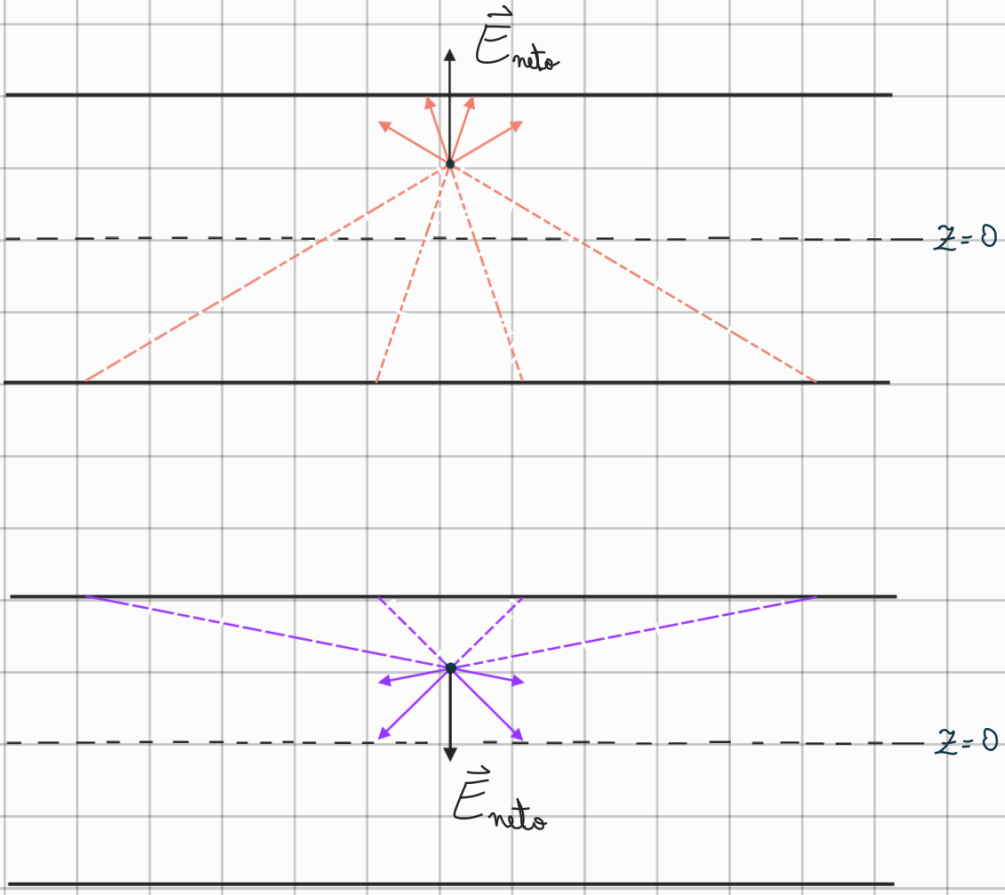
Y por los argumentos de simetría concluimos

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z > 0 \\ \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

Ahora calculamos el campo que genera el bloque.
En este caso centraremos el origen del sistema de coordenadas en el centro del bloque. Es importante notar que este origen **no** coincide con el que usamos para el plano en la parte anterior, aunque igualmente podemos calcular el campo así, solo deberemos corregir el sistema de coordenadas al final de todo



Analicemos el comportamiento del campo al interior del bloque

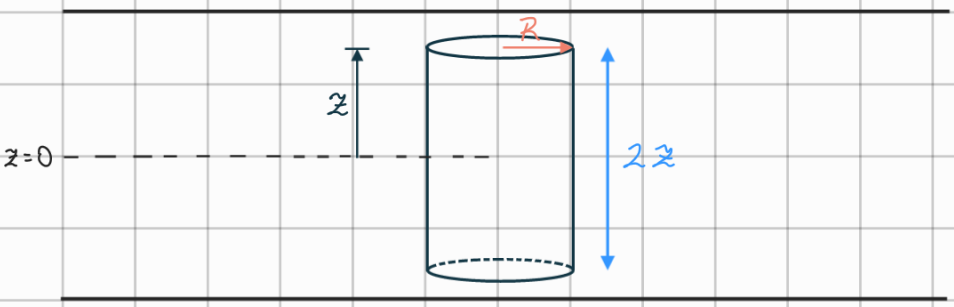


Se puede ver que las componente horizontales del campo se cancelan al igual que como ocurría con la placa infinita. Además, dado que tenemos un bloque macizo, para un punto por sobre $z = 0$ habrá más carga debajo de él que por encima, de modo que para para $z > 0$ el campo eléctrico apuntará hacia arriba.

De manera análoga se puede ver que el campo apuntará hacia abajo para $z < 0$. Además, como el bloque se extiende infinitamente en x e y, si nos movemos en estas direcciones no podremos notar ningún cambio, de forma que el campo no puede tener dependencias de estas coordenadas, por lo tanto

$$\vec{E} = \begin{cases} E(z)\,\hat{z} & z > 0 \\ E(z)\,(-\hat{z}) & z < 0 \end{cases}$$

Ahora resolvemos mediante Ley de Gauss.
Otra vez usamos como superficie gaussiana un cilindro, esta vez de radio R y altura $2z$



Al igual que en el caso de la placa, resolvemos el lado izquierdo de la Ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\underbrace{\hat{z}\cdot\hat{z}}_{=1} r'dr'd\varphi' + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\underbrace{(-\hat{z})\cdot(-\hat{z})}_{=1} r'dr'd\varphi' + \int_{-z}^{z}\int_0^{2\pi} E(z)\underbrace{(\pm\hat{z})\cdot\hat{r}}_{=0} R\,d\varphi' dz'$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\, r'dr'd\varphi' + \int_0^{2\pi}\int_0^{R} E(z)\, r'dr'd\varphi'$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi R^2 E(z)}$$

Ahora el lado derecho

$$Q_{enc} = \int_{-z}^{z}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} \rho\, r'\,dr'\,d\varphi'\,dz = \rho \cdot 2z \cdot 2\pi \frac{R^2}{2}$$

$$\boxed{Q_{enc} = 2\pi R^2 \rho z}$$

$\therefore$

$$2\pi R^2 E(z) = \frac{2\pi R^2 \rho z}{\varepsilon_0}$$

$$E(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$$

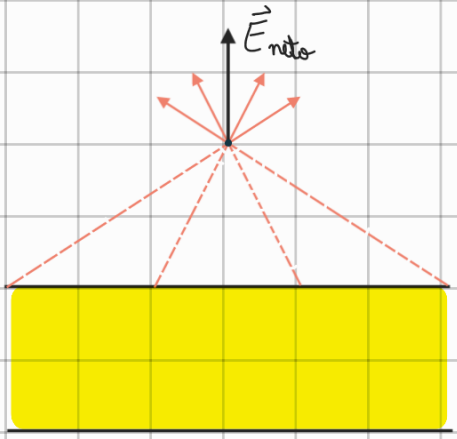
Y por los argumentos de simetría

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}\hat{z} \qquad z \in [-d/2,\ d/2]$$

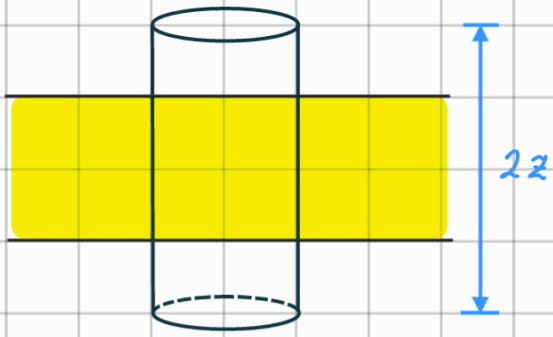
Ahora resolvemos fuera del bloque, es decir para $|z| > d/2$

De forma análoga al caso de la placa, se puede ver que el campo eléctrico fuera del bloque tiene la forma

$$\vec{E} = \begin{cases} E(z)\hat{z} & z > d/2 \\ E(z)\hat{z} & z < -d/2 \end{cases}$$



Colocamos nuestra superficie gaussiana



Aplicamos la Ley de Gauss

$$\underbrace{\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\text{análogo a parte anterior.}} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi R^2 E(z)}$$

Calculamos el lado derecho.
Notemos que solo tenemos densidad de carga dentro del bloque, o sea para $z' \in \left[\frac{-d}{2}, \frac{d}{2}\right]$ por lo que la integral en z' tendrá aquellos límites.

$$Q_{enc} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} \rho \, r' dr' d\varphi dz' = d \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} \rho$$

$$\boxed{Q_{enc} = \pi R^2 \rho d}$$

$$\Rightarrow 2\pi R^2 E(z) = \frac{\pi R^2 \rho d}{\varepsilon_0}$$

$$E(z) = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

Y por los argumentos de simetría

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z > d/2 \\ -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z < -d/2 \end{cases}$$

Así el campo producido por el bloque es

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z > d/2 \\ \frac{\rho z}{\varepsilon_0}\hat{z} & z \in [-d/2,\ d/2] \\ -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z < -d/2 \end{cases}$$

Ahora volvemos a nuestro sistema de referencia original, donde la placa se encuentra en $z = 0$

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z > d \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}(z - d/2)\hat{z} & z \in [0,\ d] \\ -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{z} & z < 0 \end{cases}$$

Finalmente, por el principio de superposición, el campo total es

$$\vec{E} = \begin{cases} \left(\frac{\rho d}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{z} & z > d \\ \left[\frac{\rho}{\varepsilon_0}(z - d/2) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right]\hat{z} & z \in [0,\ d] \\ -\left(\frac{\rho d}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{z} & z < 0 \end{cases}$$