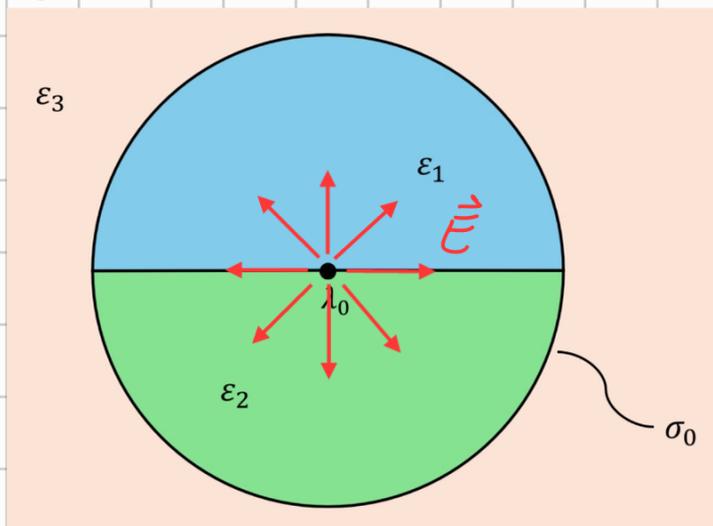


P_1



Por la simetría del sistema, el campo eléctrico deberá ser radial, y dado que el vector desplazamiento (\mathbf{D}) es proporcional al campo eléctrico, entonces \mathbf{D} también es radial.

Recordemos las condiciones de borde para dieléctricos

$$D_2^\perp - D_1^\perp = \sigma_1 \quad (1)$$

$$E_2^\parallel = E_1^\parallel \quad (2)$$

Pero si el vector \mathbf{D} es radial, entonces este no posee componente perpendicular en la interface entre ϵ_1 y ϵ_2 , es decir

$$D_2^\perp = D_1^\perp = 0 \quad (3)$$

Usando que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$(3) \Rightarrow \epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp = 0 \Rightarrow E_1^\perp = E_2^\perp = 0$$

Esto quiere decir que el campo no poseerá componente perpendicular a la interfaz entre dieléctricos, por lo que solo queda la componente tangencial (o paralela), o sea

$$\vec{E}_1 = E_1^\parallel \quad \text{y} \quad \vec{E}_2 = E_2^\parallel$$

Pero por la condición de borde (2) tenemos que

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E} \quad (4)$$

Es decir, los campos eléctricos son iguales en ambos medios dieléctricos.

Sin embargo, esto no quiere decir que \mathbf{D} sea igual en ambos medios, y de hecho, no lo es. Como se cumple $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, y ε es distinto en cada medio, \mathbf{D} tiene un valor diferente dependiendo si estamos en la parte superior o inferior, es decir

$$\vec{D} = \begin{cases} D_1(r) \hat{r}, & \varphi \in (0, \pi) \\ D_2(r) \hat{r}, & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad r < R \quad (5)$$

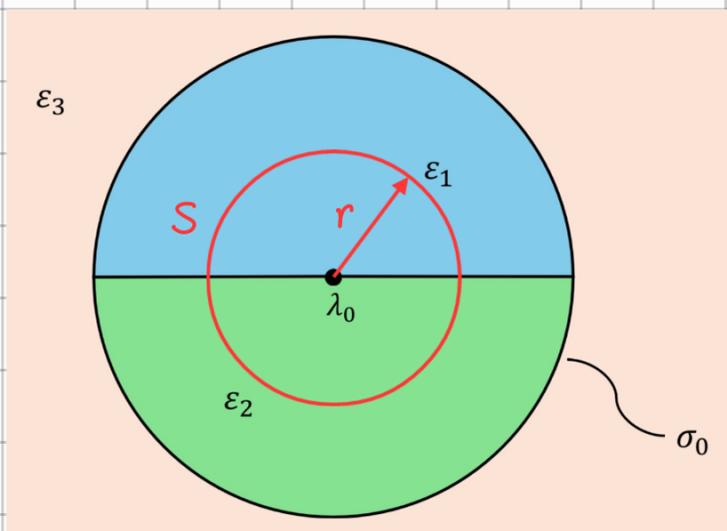
Ahora podemos usar la Ley de Gauss para determinar el vector \mathbf{D} . Dado que tenemos medios materiales, deberemos usar la Ley de Gauss generalizada, es decir

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc}^{(D)}$$

$r < R$

Primero buscamos \mathbf{D} en la zona $r < R$.

Comenzamos calculando el lado derecho, para ello hacemos una superficie gaussiana S cilíndrica de radio $r < R$.



Recordemos que como el campo es radial, entonces el flujo de campo solo pasará a través del manto de este cilindro, el flujo por la tapas es nulo. De esta manera, solo debemos calcular el flujo sobre el manto, o sea

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Y para un manto cilíndrico el $d\mathbf{S}$ es

$$d\vec{S} = \hat{r} r dy dz$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \int_{\text{Mantle}} \vec{D} \cdot \hat{r} r d\varphi dz$$

Mucho ojo, porque ahora **no** podemos llegar y reemplazar los límites de integración y decir que $\vec{D} = D(r)\hat{r}$, pues D es diferente en cada medio, por lo que debemos separar la integral para cada medio distinto. Usando (5) podemos escribir

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \int_{\text{Mantle}} \vec{D} \cdot \hat{r} r d\varphi dz = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^\pi D_1(r) \hat{r} \cdot \hat{r} r d\varphi dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_\pi^{2\pi} D_2(r) \hat{r} \cdot \hat{r} r d\varphi dz$$

$$= D_1(r)r \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^\pi d\varphi dz + D_2(r)r \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_\pi^{2\pi} d\varphi dz$$

Sacamos de las integrales todo lo que no depende de φ ni z .

$$= D_1(r)r L \pi + D_2(r)r L \pi$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = L \pi r (D_1(r) + D_2(r))$$

Ahora hacemos el lado derecho. En este caso la única carga **libre** que encierra nuestra superficie S corresponde a la carga del alambre, dado que nuestra superficie gaussiana tiene un largo L , esta encierra un pedazo del cable de largo L también, y como el cable posee una densidad de carga lineal uniforme λ_0 , la carga libre encerrada es

$$Q_{\text{enc}}^{(1)} = \lambda_0 L$$

Igualando ambos lados de la Ley de Gauss

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc}^{(1)}$$

$$\cancel{\lambda} \pi r (D_1(r) + D_2(r)) = \lambda_0 \cancel{\lambda}$$

$$D_1(r) + D_2(r) = \frac{\lambda_0}{\pi r}$$

Usando $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\epsilon_1 \vec{E}_1 + \epsilon_2 \vec{E}_2 = \frac{\lambda_0}{\pi r}$$

Pero por (4) tenemos que $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$

$$\epsilon_1 E + \epsilon_2 E = \frac{\lambda_0}{\pi r}$$

$$E(r) = \frac{\lambda_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r}$$

Y por los argumentos de simetría

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda_0 \hat{r}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r} \quad r < R$$

Y para encontrar los \mathbf{D} volvemos a usar $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ para cada zona diferente

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 \lambda_0 \hat{r}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r}, & \varphi \in (0, \pi) \\ \frac{\epsilon_2 \lambda_0 \hat{r}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r}, & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad r < R$$

Para calcular la polarización usamos $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, de donde se despeja $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$, esta también es diferente en cada medio

$$\vec{P} = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 \lambda_0 \hat{r}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r} - \frac{\epsilon_0 \lambda_0 \hat{r}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r} & \varphi \in (0, \pi) \\ \frac{\epsilon_2 \lambda_0 \hat{r}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r} - \frac{\epsilon_0 \lambda_0 \hat{r}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r} & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$\vec{P} = \begin{cases} \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) \lambda_0 \hat{r}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r}, & \varphi \in (0, \pi) \\ \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) \lambda_0 \hat{r}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r}, & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad r < R$$

$r > R$

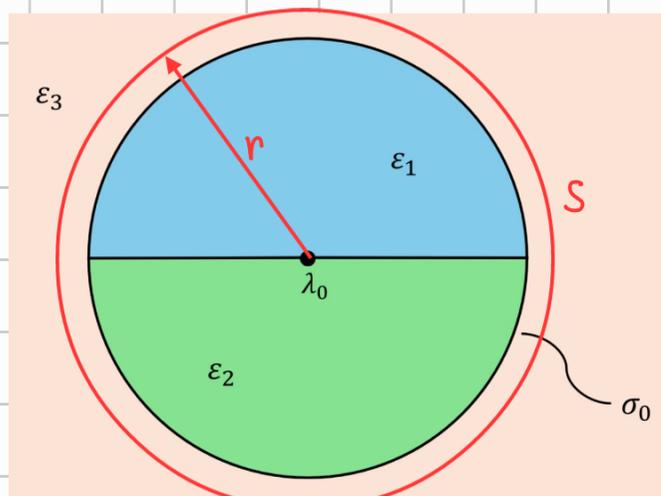
Ahora buscamos D en la zona $r > R$.

Por la simetría se puede deducir nuevamente que

$$\vec{D} = D(r) \hat{r}$$

Por lo que podemos volver a usar Ley de Gauss.

Colocamos una superficie imaginaria S de radio $r > R$



Y como ahora solo tenemos un único medio dieléctrico, D es igual para todo φ , por lo que no es necesario separar la integral de lado izquierdo de la Ley de Gauss. Así

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} D(r) \hat{r} \cdot \hat{r} r d\varphi dz = D(r)r \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} r d\varphi dz$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D(r)r 2\pi L$$

Ahora necesitamos la carga encerrada. Notemos que esta superficie S encierra dos cargas, la primera es el alambre, y la segunda la carga en el cascarón exterior de radio R . El aporte del alambre es igual a la parte anterior, por lo que solo nos falta la carga del cascarón cilíndrico, o sea

$$Q_{enc}^{(1)} = \lambda_0 L + Q_{cascarón}$$

La carga en el cascarón la podemos calcular mediante integración. Como tenemos una densidad de carga superficial σ_0 , podemos calcular la carga total integrando dicha densidad sobre el cascarón, dado que este es un cilindro de radio R y largo L , la carga presente es

$$Q_{cascarón} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \sigma_0 R d\varphi dz = \sigma_0 R \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi dz$$

$$Q_{cascarón} = \sigma_0 R 2\pi L$$

$$\therefore Q_{enc}^{(1)} = \lambda_0 L + 2\pi R L \sigma_0$$

Iguando ambos lados de la Ley de Gauss

$$D(r)r 2\pi \Delta = \lambda_0 \Delta + 2\pi R \Delta \sigma_0$$

$$D(r) = \frac{(\lambda_0 + 2\pi R \sigma_0)}{2\pi r}$$

Y por los argumentos de simetría

$$\vec{D}(r) = \left(\frac{\lambda_0}{2\pi} + R\sigma_0 \right) \frac{\hat{r}}{r} \quad r > R$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \left(\frac{\lambda_0}{2\pi} + R\sigma_0 \right) \frac{\hat{r}}{\epsilon_3 r} \quad r > R$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \left(\frac{\lambda_0}{2\pi} + R\sigma_0 \right) \frac{\hat{r}}{r} - \epsilon_0 \left(\frac{\lambda_0}{2\pi} + R\sigma_0 \right) \frac{\hat{r}}{\epsilon_3 r}$$

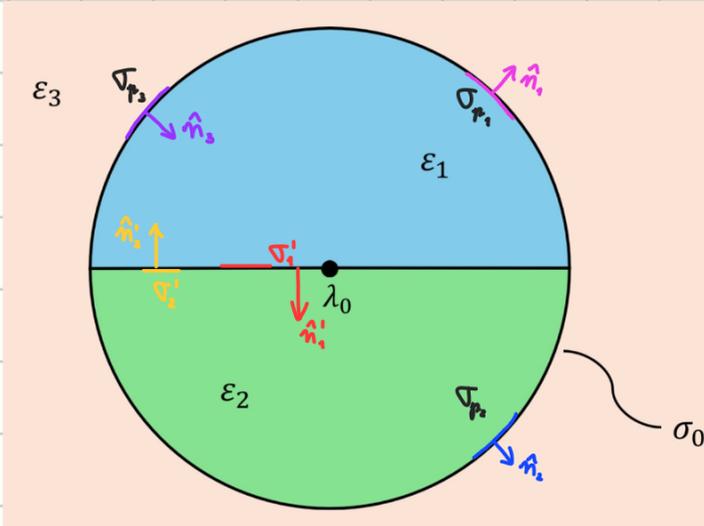
$$\vec{P} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_3} \right) \left(\frac{\lambda_0}{2\pi} + R\sigma_0 \right) \frac{\hat{r}}{r} \quad r > R$$

b)

$$\sigma_p = \vec{P} \Big|_{\text{Borde}} \cdot \hat{n} \quad (6)$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (7)$$

Para las cargas de polarización superficiales tenemos 5 interfaces



Recordemos que \vec{P} es radial, es decir que apunta en \hat{r} , pero las normales a las interfaz entre ϵ_1 y ϵ_2 son perpendiculares a \hat{r} , por lo que si realizamos un producto punto entre ambos el resultado será 0, de este modo se puede concluir que

$$\sigma_{p_1}' = \vec{P} \Big|_{\text{Borde}} \cdot \hat{n}_1' = 0$$

$$\sigma_{p_2}' = \vec{P} \Big|_{\text{Borde}} \cdot \hat{n}_2' = 0$$

Para el resto de interfaces tenemos

$$\sigma_{p_1} = \vec{P} \Big|_{\text{Borde}} \cdot \hat{n} = \vec{P} \Big|_{r=R} \cdot \hat{r} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) \lambda_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi R} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_{=1}$$

$$\sigma_{p_1} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) \lambda_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi R}$$

Aquí debemos ir reemplazando \vec{P} por los resultados que encontramos anteriormente según el lugar del espacio donde esté nuestra interfaz.

$$\sigma_{p_2} = \vec{P} \Big|_{\text{Borde}} \cdot \hat{n} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) \lambda_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi R} \hat{r} \cdot \hat{r}$$

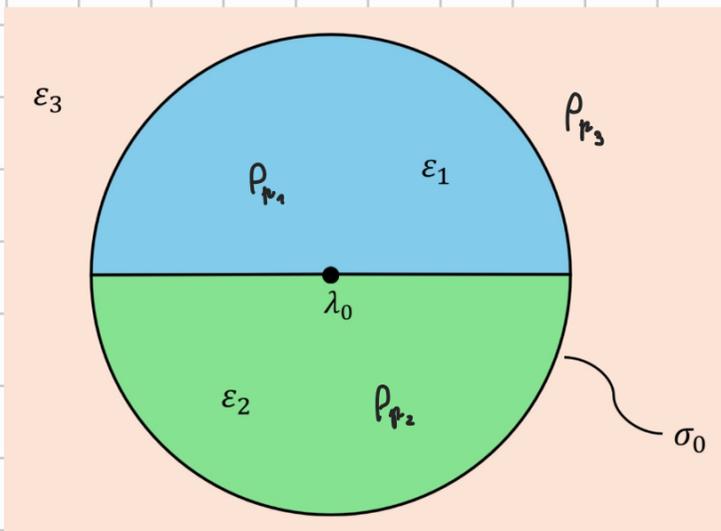
$$\sigma_{p_2} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) \lambda_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi R}$$

$$\sigma_{p_3} = \vec{P} \Big|_{\text{exterior}} \cdot \hat{n} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_3}\right) \left(\frac{\lambda_0}{2\pi} + R\sigma_0\right) \frac{\hat{r}}{R} \cdot (-\hat{r})$$

$$\sigma_{p_3} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_3} - 1\right) \left(\frac{\lambda_0}{2\pi} + R\sigma_0\right) \frac{1}{R}$$

Ojo, para encontrar las densidades de carga de polarización superficiales se toma la normal **exterior** al material, en este caso, la normal que apunta hacia **afuera** de ϵ_3 es $(-\hat{r})$, si hubiésemos tomado \hat{r} estaríamos apuntando hacia adentro de ϵ_3 .

Ahora queremos las densidades de carga volumétricas de polarización ρ_{p_i} , como su nombre lo indica, estas densidades son volumétricas, por lo que solo existen en el volumen del material, y aquí tenemos 3 volúmenes (materiales) diferentes, ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 . En principio, cada material tiene una ρ_{p_i} distinta.



$$(7) \Rightarrow \rho_{p_i} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

En coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

\vec{P} no tiene componentes en φ ni en z , y tampoco depende de dichas variables.

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_r)$$

Y reemplazamos por el \vec{P} existente en ϵ_1

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) \lambda_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) \lambda_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi} \right]$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = 0 \Rightarrow \rho_{p_1} = 0$$

Lo que está adentro de la derivada ahora no depende de r

De manera análoga

$$\rho_{r_2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) \lambda_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) \lambda_0}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pi} \right]$$

$$\rho_{r_2} = 0$$

$$\rho_{r_3} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_3}\right) \left(\frac{\lambda_0}{2\kappa} + R\sigma_0\right) \frac{1}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_3}\right) \left(\frac{\lambda_0}{2\kappa} + R\sigma_0\right) \right]$$

$$\rho_{r_3} = 0$$

P2

Dado que $R \gg d$ podemos aproximar los discos como si fuesen placas infinitas. Ahora, nosotros ya sabemos que el campo eléctrico de una placa infinita apunta únicamente en la dirección vertical y que este es independiente de la distancia al disco, o sea

$$\vec{E} = E \hat{z}$$

Por otro lado, sabemos que la diferencia de potencial entre ambos discos se puede calcular como

$$\Delta V = V_0 = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Reemplazando la forma que ya conocemos para E y usando $d\vec{l} = \hat{z} dz$ (pues E solo tiene componente en \hat{z})

$$V_0 = - \int_0^d E \hat{z} \cdot \hat{z} dz = - E \int_0^d dz = - E d$$

$$\Rightarrow E = -\frac{V_0}{d}$$

Y por los argumentos de simetría

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d} \hat{z} \quad z \in [0, d]$$

Sabemos que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \right] \left(-\frac{V_0}{d} \right) \hat{z}$$

$$\vec{D} = - \left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \right] \frac{V_0}{d} \hat{z} \quad z \in [0, d]$$

b)

Podemos calcular la polarización usando que

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -\left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R}\right] \frac{V_0}{d} \hat{z} + \epsilon_0 \frac{V_0}{d} \hat{z} \\ &= -\cancel{\epsilon_0} \frac{V_0}{d} \hat{z} - (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \frac{V_0}{d} \hat{z} + \cancel{\epsilon_0} \frac{V_0}{d} \hat{z} \end{aligned}$$

$$\vec{P} = (\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 r}{R d} \hat{z}$$

Ahora podemos calcular las densidades de polarización usando que

$$\rho_p \equiv -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_p \equiv \vec{P} \Big|_{\text{donde}} \cdot \hat{n} \quad \text{donde } \hat{n} \text{ es la normal } \underline{\text{exterior}} \text{ a la superficie.}$$

$$\rho_p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (P_r \cdot r) + \frac{1}{r} \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

Veamos que $P_r = P_\varphi = 0$

Además P_z no depende de z

$$\Rightarrow \rho_p = 0$$

Para calcular las densidades de carga de polarización superficiales debemos hacerlo para las tres superficies del cilindro, las 2 tapas y el manto. Primero vamos con la tapa inferior:

$$\sigma_{p_1} = \vec{P} \Big|_{z=0} \cdot (-\hat{z}) = (\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 r}{R d} \hat{z} \cdot (-\hat{z}) \rightarrow (-1)$$

$$\sigma_{p_1} = -(\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 r}{Rd}$$

Ahora para la tapa superior

$$\sigma_{p_2} = \vec{P} \Big|_{z=d} \cdot \hat{z} = (\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 r}{Rd} \hat{z} \cdot \hat{z}$$

$$\sigma_{p_2} = (\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 r}{Rd}$$

Finalmente el manto

$$\sigma_{p_3} = \vec{P} \Big|_{r=R} \cdot \hat{r} = (\epsilon_0 - \epsilon_1) \frac{V_0 R}{Rd} \hat{z} \cdot \hat{r}$$

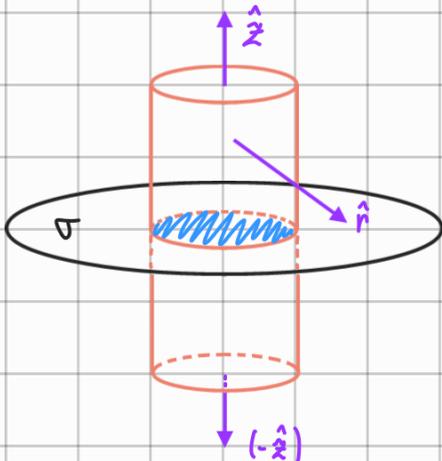
$$\sigma_{p_3} = 0$$

c)

Para determinar la carga libre total en la placa inferior podemos usar la Ley de Gauss para medios materiales

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc}^{(1)}$$

Coloquemos la superficie gaussiana sobre uno de los discos



Como ya conocemos D, por lo que podemos reemplazarlo en el lado izquierdo

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(-\left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \right] \frac{V_0}{d} \hat{z} \right) \cdot \hat{z} r dr d\varphi$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^R 0 \cdot (-\hat{z}) r dr d\varphi \quad (\text{Aquí integramos 0 porque fuera de las placas } E = 0)$$

$$+ \int_{-z}^{z'} \int_0^{2\pi} \left(-\left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \right] \frac{V_0}{d} \hat{z} \right) \cdot (\pm \hat{r}) R d\varphi dz$$

$$= \frac{-V_0}{d} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r}{R} \right] r dr d\varphi$$

$$= \frac{-V_0}{d} 2\pi \int_0^R \left(\epsilon_0 r + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{r^2}{R} \right) dr$$

$$= \frac{-2\pi V_0}{d} \left[\epsilon_0 \int_0^R r dr + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{R} \int_0^R r^2 dr \right]$$

$$= \frac{-2\pi V_0}{d} \left[\epsilon_0 \frac{R^2}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{R} \frac{R^3}{3} \right] = \pi R^2 \left(-4 \frac{V_0}{d} \left[\frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{3} \right] \right)$$

$$= \frac{-2\pi V_0}{d} \left[\epsilon_0 \frac{R^2}{2} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) R^2}{3} \right] = \frac{-\pi V_0}{d} \left[\epsilon_0 R^2 + \frac{2(\epsilon_1 - \epsilon_0) R^2}{3} \right]$$

$$= \frac{-\pi V_0}{3d} \left[3\epsilon_0 R^2 + 2\epsilon_1 R^2 - 2\epsilon_0 R^2 \right]$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{-\pi V_0 R^2}{3d} (\epsilon_0 + 2\epsilon_1) \Rightarrow Q_{enc}''' = \frac{-\pi V_0 R^2}{3d} (\epsilon_0 + 2\epsilon_1)$$

FCV.