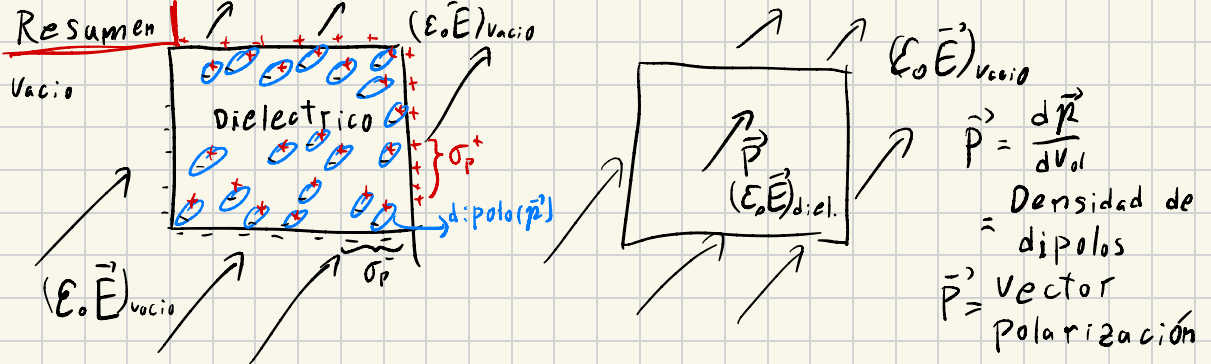


Resumen



El vector polarización se opone al campo $\vec{E}$ externo. Por lo que el campo dentro del dielectrico es menor.

El efecto de la polarización se modela con una carga virtual: Carga de polarización (Q_p)

Q_p no es una carga neta real pero si lo es su efecto en el campo $\vec{E}$.

$$Q = \underset{\substack{\text{real} \\ \text{o} \\ \text{ficticia}}}{Q_{\text{libre}}} + Q_p$$

La Q_p se relaciona con $\vec{P}$ segun las expresiones

$$\vec{P} \cdot \hat{n} = \sigma_p \rightarrow \text{como se ve en el dibujo.}$$

$$-\nabla \cdot \vec{P} = \rho_p \rightarrow \text{En caso de dielectricos y campos homogeneos o sea } \vec{P} \text{ de } \Rightarrow \nabla \cdot \vec{P} = 0 = \rho_p$$

Con esto tenemos:

$$(\epsilon_0 \vec{E})_{\text{dielectrico}} = (\epsilon_0 \vec{E})_{\text{vacio}} - \vec{P} \quad /o$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E})_{\text{diel.}} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E})_{\text{vacio}} - \nabla \cdot \vec{P} = \rho$$

También : $\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E}' = \rho = \rho_{\text{libre}} + \rho_p$ y $-\nabla \cdot \vec{P}' = \rho_p$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}')_{\text{del}} = \underbrace{\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}')_{\text{vacio}}}_{\rho_0} - \underbrace{\nabla \cdot \vec{P}'}_{\rho_p} = \rho_{\text{libre}} + \rho_p$$

$\Rightarrow$ Definimos $(\epsilon_0 \vec{E}')_{\text{vacio}} = \vec{D}$ t.q. $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}}$ Definición

$(\epsilon_0 \vec{E}')_{\text{medio}} = \vec{D} - \vec{P}'$ $\hookrightarrow$ Campo de desplazamiento eléctrico.

$\vec{E}$ es el campo que nos dice como se moveran las partículas en el medio y su valor depende del medio

$\vec{D}$ es el campo que genera las cargas (Q_0) y es independiente al medio

En general $\vec{D}$ y $\vec{E}$ tienen igual dirección y sentido

La polarización ($\vec{P}$) del medio es debido a un movimiento de carga por lo que depende de $\vec{E}$

$\vec{P} \propto \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \chi(\epsilon_0 \vec{E})$ donde χ es una constante que depende del medio

S; $\epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$\Rightarrow \vec{D} = \vec{E} \underbrace{\epsilon_0(1 + \chi)}_{\epsilon}$

$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\epsilon \rightarrow$ Permitividad eléctrica : depende del medio

$\epsilon_0 \rightarrow$ Permittividad del vacío $\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ($\Rightarrow$ en el vacío)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e = \nabla \cdot \epsilon \vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho_e / \epsilon$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

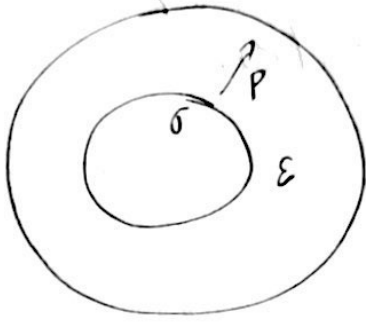
$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{D}$$

P7/



Para obtener las cargas de polarización debemos conocer $\vec{P}$

Sabemos que el campo en el dielectrico es la contribucion de la carga libre $\vec{D}$ menos la contraposición del Dielectrico $\vec{P}$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$$

Sabemos que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ siempre!!

$\Rightarrow \vec{P} = \vec{E} (\epsilon - \epsilon_0) \rightarrow$ Esto lo interpretamos como que $\vec{P}$ es la diferencia entre el campo que existiría en el vacío vs el campo que realmente existe en el dielectrico.

Como ϵ y ϵ_0 son conocidos basta con calcular $\vec{E}$ para conocer $\vec{P}$.

Para calcular $\vec{E}$ usaremos la ley de Gauss general para medios materiales.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \longrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon$$

$$\rho = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{polarizaci}}$$

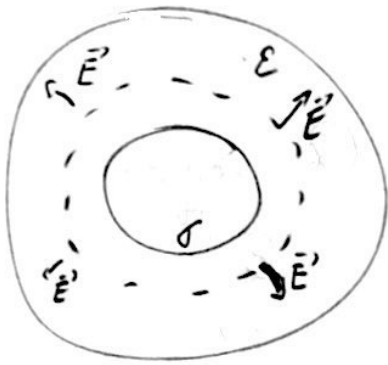
aproximación $\vec{P} \approx \vec{E}$
usada en el curso

Con $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon$ nos basta conocer las cargas libres (q, λ, σ, ρ) y la constante dieléctrica, para calcular el $\vec{E}$ como siempre lo hemos hecho.

Ley de Gauss: Dada una superficie cerrada:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint \nabla \cdot \vec{E} dV = \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \rho dV = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon}$$

Si escogemos una superficie gaussiana esférica con el mismo centro que nuestra esfera dieléctrica, podemos argumentar por simetría que el campo $\vec{E}$ es de igual magnitud y normal en cada punto de la sup. gaussiana



→ superficie gaussiana

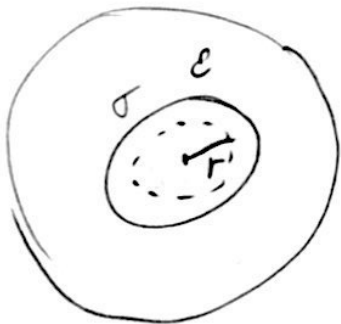
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} ds \quad \text{con } \vec{E} \cdot \hat{n} \text{ constante}$$

$$|\vec{E}| \oint ds = E(r) \cdot \text{Area}(r)$$

→ El área en donde existe flujo. En el caso de la esfera es toda el Área

$$\Rightarrow E(r) \cdot \text{Area}(r) = \frac{Q_{\text{encerrado}}}{\epsilon}$$

Caso $r < R_1$

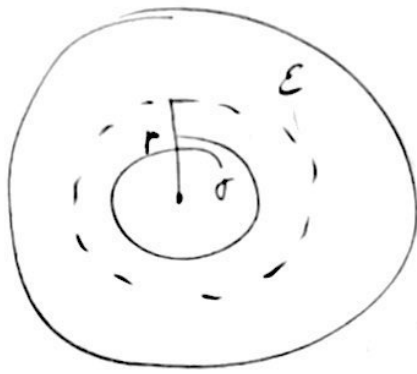


$$E(r) \cdot \text{Area}(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

$$E(r) = \frac{0}{4\pi r^2} = 0$$

→ $E = E_0$ en $r < R_1$

Caso $R_1 < r < R_2$



$$E(r) \cdot \text{Area}(r) = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon}$$

ϵ
cte dielectrica
en $R_1 < r < R_2$

$$E(r) = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\text{Area}(r) \cdot \epsilon} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon}$$

$$Q_{\text{encerrada}} = \int \sigma dS$$

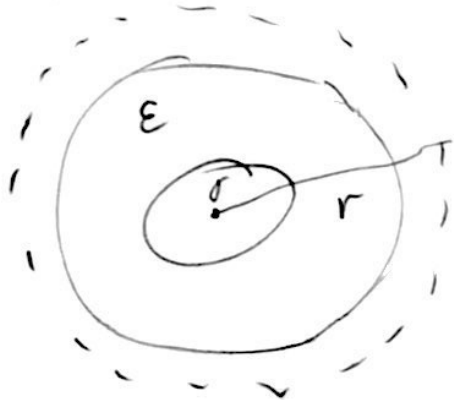
la carga σ existe en la superficie de una esfera de radio R_1

Al ser σ cte sale de la integral

$$Q = \sigma \int dS = \sigma \cdot \text{Area} = \sigma \cdot 4\pi R_1^2$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\sigma 4\pi R_1^2}{4\pi r^2 \epsilon} = \frac{\sigma R_1^2}{r^2 \epsilon}$$

Caso $r > R_2$



$$E(r) \cdot \text{Area}(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{en } r > R_2 \text{ estamos en el vacio}$$

la Q es la misma que en $R_1 < r < R_2$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{4\pi\sigma R_1^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\sigma R_1^2}{r^2 \epsilon_0}$$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{\sigma R_1^2}{r^2 \epsilon} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\sigma R_1^2}{r^2 \epsilon_0} & r > R_2 \end{cases}$$

Notemos que la ley de Gauss solo nos entrega la magnitud del campo. La dirección la obtenemos analizando la geometría.

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r) \hat{r}.$$

Ahora que calculamos $\vec{E}$ podemos obtener el $\vec{P}$

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{(\epsilon - \epsilon_0) \sigma R_1^2}{r^2 \epsilon} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_0) \sigma R_1^2}{r^2 \epsilon_0} = 0 & r > R_2 \end{cases}$$

la cte. dieléctrica

del medio es ϵ_0

→ En este caso no hay $\vec{P}$ pues este solo existe en dieléctricos

$$\vec{P}'_{(r)} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{\sigma R_1^2}{r^2} \hat{r} \quad R_1 < r < R_2$$

Para conocer las cargas de polarización usaremos $-\nabla \cdot \vec{P}' = \rho_p$ y $\vec{P}' \cdot \hat{n} = \sigma_p$

σ_p que existe en los límites del dielectrico en este caso R_1 y R_2

$$\sigma_p = \vec{P}' \cdot \hat{n} = \begin{cases} \vec{P}' \cdot -\hat{r} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{\sigma R_1^2}{R_1^2} = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon} \sigma & r = R_1 \\ \vec{P}' \cdot \hat{r} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{\sigma R_1^2}{R_2^2} & r = R_2 \end{cases}$$

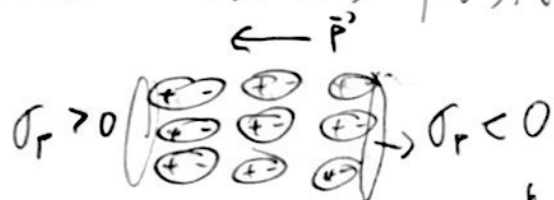
$\nabla \cdot \vec{P}' = -\rho_p$ es la carga p. que existe dentro del dielectrico.

$$\nabla \cdot \vec{P}' = \frac{1}{r^2} \frac{2}{2r} (r^2 \vec{P}'_{(r)}) = \frac{1}{r^2} \frac{2}{2r} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{\sigma R_1^2}{r^2} r^2 \right) = \frac{1}{r^2} \cdot 0$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}' = 0$$

A de dielectrico uniforme el $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}' = 0$

Pues los lados negativos de los dipolos se cancelan con los positivos del siguiente



En general se debe cumplir que

$$Q_p \text{ total} = \int \tau_p ds + \int p_p dV = 0$$

b) Nos piden calcular el potencial en el centro (origen, según nuestro sis de coor.) tomando como referencia el infinito.

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}) - \underbrace{V(\text{ref})}_0 = V(0) - V(\infty) = - \int_{\infty}^0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V(0) = \int_0^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \begin{array}{l} \text{el } d\vec{l} \text{ conveniente en este caso} \\ \text{es el que va paralelo a } \vec{E} \\ d\vec{l} = dr \cdot \hat{r} \end{array}$$

$$= \int_0^{\infty} \vec{E} \cdot \hat{r} dr = \int_0^{\infty} E(r) dr$$

$$= \int_0^{R_1} E dr + \int_{R_1}^{R_2} E dr + \int_{R_2}^{\infty} E dr$$

$$= 0 + \frac{\sigma R_1^2}{\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr + \frac{\sigma R_1^2}{\epsilon_0} \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \sigma R_1^2 \left(-\frac{2}{\epsilon} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{-2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R_2} \right) \right)$$

$$V_{(0)} = 2\sigma R_1^2 \left(\frac{1}{R_1 \epsilon} - \frac{1}{R_2 \epsilon} + \frac{1}{R_2 \epsilon_0} \right)$$