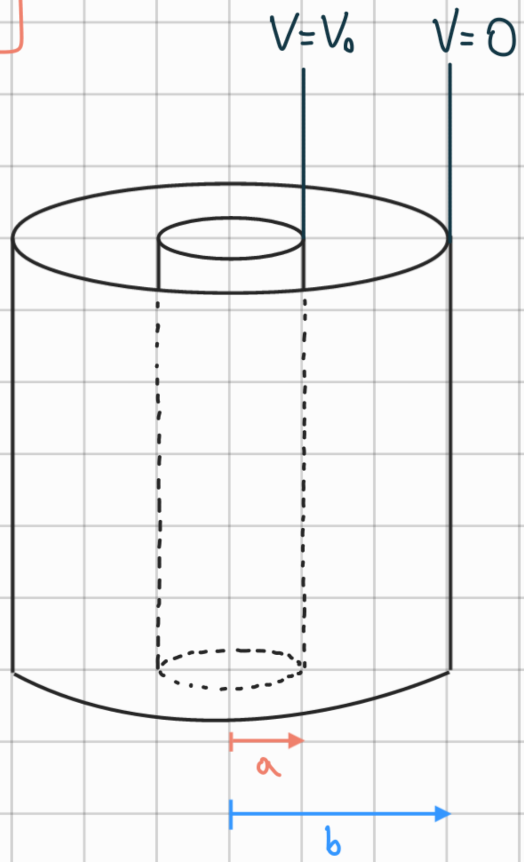
P1



Para la parte interior ($r < a$) podemos resolver mediante Ley de Gauss, pues al ser $L>>b$, el cilindro puede ser aproximado como infinitamente largo. Se puede notar de inmediato que en dicha zona la carga encerrada es igual a 0, pues se tiene un vacío. Así entonces:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

Por los argumentos de simetría que ya conocemos para cilindros infinitos, sabemos que

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} \Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} E(r)\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}\, r\, d\varphi\, dz = 2\pi r L E(r)$$

$\therefore$

$$2\pi r L E(r) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = 0} \qquad r<a$$

Además sabemos que

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Esta igualdad se satisface si V es una constante a determinar C

$$\therefore \quad V = C$$

Ahora podemos determinar el valor de esta constante imponiendo condiciones de borde. Sabemos que el potencial debe ser continuo, y además se nos dice que este vale V_0 en $r = a$, entonces para que el potencial sea continuo en todo $r \leq a$

$$C = V_0 \Rightarrow \boxed{V(r) = V_0} \quad r \leq a$$

$r > a$ $(r \in [a, b]$ y $r > b)$

Para estas zonas (entremedio de los cilindros y fuera de ellos) no conocemos las densidades de carga ni la carga presente en los cilindros, por lo que no podemos resolver mediante Ley de Gauss. Sin embargo, conocemos el potencial en 2 puntos del espacio, por lo que podemos resolver usando la Ecuación de Poisson

$$\boxed{\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0}$$

Notemos que en este sistema el espacio entre los cillndros se encuentra vacío, por lo que allí $\rho = 0$ (no hay densidad de carga). Este caso particular de la ecuación de Poisson se denomina Ecuación de Laplace:

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

En coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Por la simetría sabemos que V no puede tener dependencias de φ ni z, por tanto

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

Ahora podemos resolver esta ecuación diferencial mediante integración directa

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \quad / \times r$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \quad / \int dr$$

Integramos a ambos lados respecto a *r*. **No** olvidar la cte. de integración (es muy importante)

$$r\frac{\partial V}{\partial r} = C_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{C_1}{r} \quad / \int dr$$

$$\boxed{V(r) = C_1 \ln(r) + C_2}$$

Ahora solo nos queda despejar las constantes, esto lo podemos hacer imponiendo las condiciones de borde en cada zona

$r \in [a, b]$

$$V(r=a) = V_0 \Rightarrow V(r=a) = C_1 \ln(a) + C_2 = V_0 \quad (1)$$

$$V(r=b) = 0 \Rightarrow V(r=b) = C_1 \ln(b) + C_2 = 0 \quad (2)$$

$$(1)-(2) \iff C_1 \ln(a) + \cancel{C_2} - C_1 \ln(b) - \cancel{C_2} = V_0$$

$$C_1 \left(\ln(a) - \ln(b)\right) = V_0$$

$$C_1 \ln\left(\frac{a}{b}\right) = V_0$$

$$\boxed{C_1 = \frac{V_0}{\ln(a/b)}}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln(b) + C_2 = 0$$

$$C_2 = \frac{-V_0 \ln(b)}{\ln(a/b)}$$

$$C_2 = \frac{V_0 \ln(b)}{-\ln(a/b)}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{V_0 \ln(b)}{\ln(b/a)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln(r) - \frac{V_0 \ln(b)}{\ln(a/b)}} \quad r \in [a, b]$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + 0$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{-V_0}{\ln(a/b)\, r} \hat{r}} \quad r \in (a, b)$$

$r > b$

$$V(r=b) = 0 \Rightarrow V(r=b) = C_1 \ln(b) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \ln(b)$$

$$\star\ V(r=\infty) \neq \infty \Rightarrow V(r=\infty) = C_1 \ln(\infty) + C_2 \neq \infty \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

$$\therefore \boxed{V(r) = 0} \quad r \geq b$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0} \quad r > b$$

★ El potencial **no** puede diverger (aka. ser "infinito") en ningún punto del espacio, esto es algo que siempre se debe cumplir.

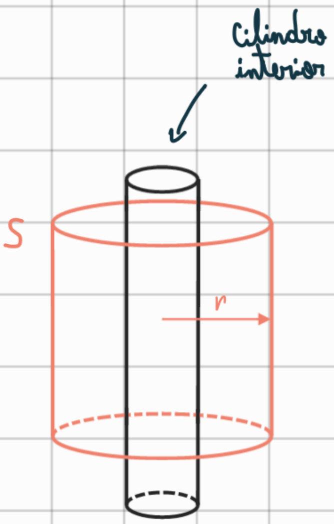
Resumiendo

$$\boxed{V(r) = \begin{cases} V_0, & r \leq a \\ \dfrac{V_0}{\ln(a/b)} \ln(r) - \dfrac{V_0 \ln(b)}{\ln(a/b)}, & r \in [a, b] \\ 0, & r \geq b \end{cases}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{-V_0}{\ln(a/b)\, r} \hat{r}, & r \in [a, b] \\ 0, & r > b \end{cases}}$$

b)

Como ya conocemos **E** en entre los cilindros, podemos calcular la carga libre encerrada usando la Ley de Gauss



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} \frac{-V_0}{\ln(a/b)\cancel{r}}\,\overbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}^{=1}\,\cancel{r}\,d\varphi\,dz = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{enc} = -\varepsilon_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} \frac{V_0}{\ln(a/b)}\,d\varphi\,dz$$

$$= \frac{-\varepsilon_0 V_0}{\ln(a/b)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} d\varphi\,dz$$

$$\boxed{Q_{enc} = \frac{-2\pi L \varepsilon_0 V_0}{\ln(a/b)}}$$

Este valor corresponde a la carga total presente en el cilindro interior.

c)

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{Todo el espacio}} |\vec{E}|^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} |\vec{E}|^2 dV$$

La integración en *z* se hace entre -*L*/2 y *L*/2, ya que por arriba y debajo del cilindro "no hay campo" (técnicamente lo despreciamos dado que lo aproximamos como un cilindro infinito).

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} 0\, dV + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_a^{b} \underbrace{\frac{\cancel{-}V_0}{\ln(a/b)\, r}\hat{r}\cdot\frac{\cancel{-}V_0}{\ln(a/b)\, r}\hat{r}}_{\hat{r}\cdot\hat{r}=1} dV + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_b^{\infty} 0\, dV$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_a^{b} \frac{V_0^2}{\ln(a/b)^2\, r^{\cancel{2}}}\cancel{r}\, dr\, d\varphi\, dz$$

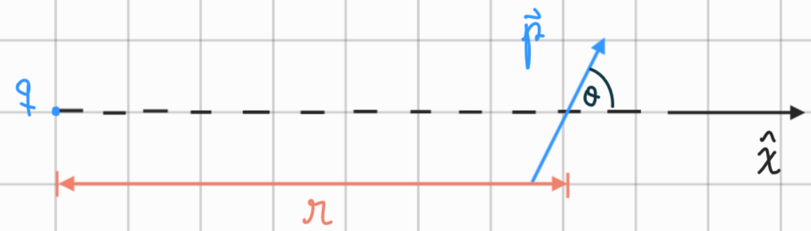
$$= \frac{\varepsilon_0}{\cancel{2}} L\, \cancel{2}\pi \frac{V_0^2}{\ln(a/b)^2}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\pi L \varepsilon_0 V_0^2}{\ln(a/b)^2}\ln(r)\Big|_a^b = \frac{\pi L \varepsilon_0 V_0^2}{\ln(a/b)^2}\left[\ln(b) - \ln(a)\right]$$

$$= \frac{-\pi L \varepsilon_0 V_0^2}{\ln(a/b)^2}\left[\ln(a) - \ln(b)\right] = \frac{-\pi L \varepsilon_0 V_0^2}{\ln(a/b)^{\cancel{2}}}\cancel{\ln(a/b)}$$

$$\boxed{U = \frac{-\pi L \varepsilon_0 V_0^2}{\ln(a/b)}}$$

P2



a)

La energía del sistema viene dada por la siguiente expresión

$$\boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

donde **p** corresponde al dipolo y **E** es el campo eléctrico externo, que en este caso es el campo eléctrico que genera la carga puntual.
Dado que nuestro dipolo se encuentra inclinado en un ángulo θ respecto a la horizontal, podemos descomponerlo en sus componentes horizontal y vertical como sigue

$$\vec{p} = p\cos\theta\,\hat{x} + p\sin\theta\,\hat{y}$$

Ahora necesitamos el campo eléctrico que genera la carga puntual, este lo obtendremos a partir del potencial de la carga puntual, el cual sabemos que es

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Usando que $\vec{E} = -\nabla V$ obtendremos el campo eléctrico, pero primero escribiremos el potencial en coordenadas cartesianas

$$V(x,y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}$$

Y ahora aplicamos el menos gradiente

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{y}$$

$$\vec{E} = \frac{q x \hat{x}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{q y \hat{y}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Ahora reemplazamos **p** y **E** en la fórmula del inicio

$$U(x,y) = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -(p\cos\theta\,\hat{x} + p\sin\theta\,\hat{y})\cdot\left(\frac{q x \hat{x}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{q y \hat{y}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$U(x,y) = \frac{-p q x\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{p q y\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Con esto tenemos una expresión de la energía para un dipolo ubicado en un punto arbitrario del espacio (x, y) en el campo eléctrico de una carga puntual situada en el origen. Sin embargo, dado que nuestro sistema de referencia está centrado en la carga puntual, sabemos que nuestro dipolo se encuentra en las coordenadas $x = r$ e $y = 0$, por lo que debemos reemplazar estos valores en la expresión anterior de la energía para obtener la energía del sistema, esto es

$$\boxed{U = -\frac{p q\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

El cual es el valor de la energía en nuestro sistema.
Ahora, para conocer el ángulo θ para el cual se maximiza la energía, derivamos e igualamos a 0

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{pq \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \overset{!}{=} 0$$

Dado que $\theta \in [0, 2\pi)$, existen dos valores de θ para los cuales se cumple la igualdad, $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.
Volvamos a la expresión para la energía

$$U = -\frac{pq \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

notemos que esta se encuentra multiplicada por una función coseno, y sabemos que $\cos\theta \in [-1, 1]$, por lo que el máximo de la energía se dará cuando $\cos\theta = -1$, pues en ese caso tendremos

$$U = -\frac{pq(-1)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{pq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Y $\cos\theta = -1$ se cumplirá cuando $\theta = \pi$, por lo que este es el valor de θ que maximiza nuestra energía.

b)

De mecánica sabemos que $\vec{F} = -\nabla U$, y dado que conocemos U, podemos usar la expresión anterior para encontrar la fuerza que experimenta el dipolo

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$-\nabla U = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-pqx\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{pqy\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}\right)\hat{x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-pqx\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{pqy\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}}\right)\hat{y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p q x \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{p q y \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \right)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p q x \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{p q y \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \right)$$

$$-\nabla U = \left(\frac{-3 p q x y \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{3 p q x^2 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{5/2}} + \frac{p q \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \right)\hat{x}$$

$$+ \left(\frac{-3 p q y^2 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{5/2}} + \frac{p q \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{3 p q x y \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{5/2}} \right)\hat{y}$$

$$-\nabla U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p q}{(x^2+y^2)^{3/2}} \left(\frac{-3xy\sin\theta}{x^2+y^2} - \frac{3x^2\cos\theta}{x^2+y^2} + \cos\theta \right)\hat{x}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p q}{(x^2+y^2)^{3/2}} \left(\frac{-3y^2\sin\theta}{x^2+y^2} + \sin\theta - \frac{3xy\cos\theta}{x^2+y^2} \right)\hat{y}$$

Esta ~~horrible~~ expresión corresponde a la fuerza que sentiría el dipolo en cualquier punto del espacio (x, y) debido al campo eléctrico que genera una carga puntual situada en el origen, pero nosotros sabemos que nuestro dipolo se encuentra en $x = r$ e $y = 0$, por lo que reemplazando estos valores, encontramos la fuerza que experimenta este

$$-\nabla U\Big|_{\substack{x=r\\ y=0}} = \vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p q}{r^3}\left(\frac{-3\cancel{r^2}\cos\theta}{\cancel{r^2}} + \cos\theta \right)\hat{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p q}{r^3}\sin\theta\,\hat{y}$$

$$= \frac{1}{\underset{2}{\cancel{4}}\pi\varepsilon_0}\frac{p q}{r^3}\left(-\cancel{2}\cos\theta\right)\hat{x} + \frac{p q \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{y}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{-p q \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{x} + \frac{p q \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{y}}$$

FCV: