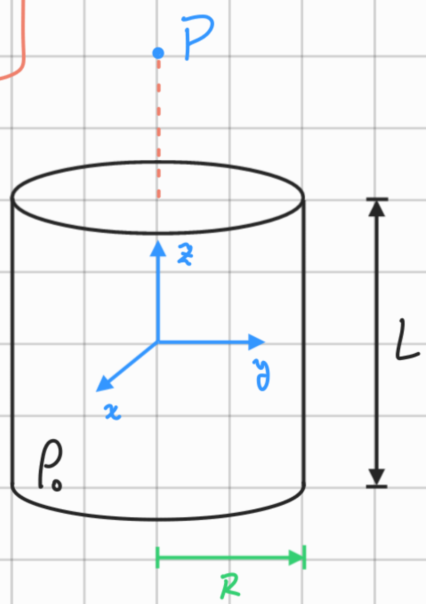
P1

a)



P se encuentra por sobre el cilindro.

$$\vec{r} = z\hat{z}; \qquad z > L/2$$

$$\vec{r}\,' = r'\hat{r} + z'\hat{z}; \qquad r' \in [0, R],\ z' \in [-L/2, L/2]$$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = (z - z')\hat{z} - r'\hat{r}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = \left[(z-z')^2 + r'^2\right]^{3/2}$$

$$dq' = r'dr'd\varphi'dz'; \qquad \varphi' \in [0, 2\pi)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{(z-z')\hat{z} - r'\hat{r}}{\left[(z-z')^2 + r'^2\right]^{3/2}}\, r'dr'd\varphi'dz'}$$

b)

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[L + \sqrt{(z - \tfrac{L}{2})^2 + R^2} - \sqrt{(z + \tfrac{L}{2})^2 + R^2}\right]\hat{z} \qquad (1)$$

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} + \mathcal{O}(x^2) \qquad (2)$$

$$L = \delta \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[\delta + \sqrt{(z - \tfrac{\delta}{2})^2 + R^2} - \sqrt{(z + \tfrac{\delta}{2})^2 + R^2}\right]\hat{z} \qquad (3)$$

Nos piden expandir a primer orden en δ, donde este es muy pequeño, para esto usamos la expresión de más arriba (2)

Como nos dicen que $\delta << 1$, estamos pensando en que δ es un "poquito" más grande que 0, por lo que la expansión se hace entorno a 0, es decir

$$\vec{E} \approx \vec{E}(\delta=0) + (\delta-0)\left.\frac{d\vec{E}}{d\delta}\right|_{\delta=0} = \vec{E}(\delta=0) + \delta\left.\frac{d\vec{E}}{d\delta}\right|_{\delta=0} \qquad (4)$$

$$\vec{E}(\delta=0) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[0 + \sqrt{(z-0)^2+R^2} - \sqrt{(z+0)^2+R^2}\right]\hat{z}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[\cancel{\sqrt{z^2+R^2}} - \cancel{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{z}$$

$$\vec{E}(\delta=0) = 0$$

$$\frac{d\vec{E}}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[\delta + \sqrt{\left(z-\frac{\delta}{2}\right)^2+R^2} - \sqrt{\left(z+\frac{\delta}{2}\right)^2+R^2}\right]\hat{z}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[1 + \frac{d}{d\delta}\left(\sqrt{\left(z-\frac{\delta}{2}\right)^2+R^2}\right) - \frac{d}{d\delta}\left(\sqrt{\left(z+\frac{\delta}{2}\right)^2+R^2}\right)\right]\hat{z}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[1 + \frac{\cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{\delta}{2}\right)}{\cancel{2}\sqrt{\left(z-\frac{\delta}{2}\right)^2+R^2}} - \frac{\cancel{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{\delta}{2}\right)}{\cancel{2}\sqrt{\left(z+\frac{\delta}{2}\right)^2+R^2}}\right]\hat{z}$$

$$\frac{d\vec{E}}{d\delta} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{\left(z-\frac{\delta}{2}\right)}{2\sqrt{\left(z-\frac{\delta}{2}\right)^2+R^2}} - \frac{\left(z+\frac{\delta}{2}\right)}{2\sqrt{\left(z+\frac{\delta}{2}\right)^2+R^2}}\right]\hat{z}$$

$$\left.\frac{d\vec{E}}{d\delta}\right|_{\delta=0} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{2\sqrt{z^2+R^2}} - \frac{z}{2\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{z}$$

$$\left.\frac{d\vec{E}}{d\delta}\right|_{\delta=0} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{z}$$

$$(4) \Rightarrow \vec{E} \approx \frac{\delta\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{z} \qquad (5)$$

Este sería el campo de un disco plano, pero nosotros queremos el campo en función de la densidad de carga superficial σ_0, no la densidad volumétrica ρ_0. Aquí entonces debemos buscar una relación entre σ_0, ρ_0 y δ. Para ello haremos análisis dimensional.

Revisemos que dimensiones tiene cada valor

Recordemos que dijimos que $L = \delta$, y L es un largo, por lo tanto δ tiene unidades de longitud, es decir:

$$[\delta] = L$$

σ_0 tiene unidades de carga por área, y un área tiene unidades de longitud al cuadrado, o sea:

$$[\sigma_0] = \frac{Q}{L^2}$$

Finalmente, ρ_0 tiene unidades de carga por unidad de volumen, y un volumen tiene unidades de longitud al cubo, por lo tanto:

$$[\rho_0] = \frac{Q}{L^3}$$

Esto quiere decir que

$$[\rho_0\delta] = \frac{Q}{L^{\cancel{3}\,2}} \times \cancel{L} = \frac{Q}{L^2} = [\sigma_0]$$

Y de aquí podemos concluir que

$$\boxed{\rho_0 \delta = \sigma_0}$$

pues esta combinación hace que nuestras unidades de medida funcionen.
Por lo tanto

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)\hat{z}}$$

Que corresponde al campo generado por un disco plano (en su eje de simetría) de radio *b* y densidad de carga superficial σ_0.