Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 8: Laplace, Energía y Dipolo

P1. Spoiler

Considere dos cascarones metálicos cilíndricos concéntricos de radios a y b ($a < b$), entre los cuales existe vacío. El cascarón interior se encuentra a potencial V_0 y el exterior a potencial 0.

a) Calcule el potencial y el campo eléctrico en todo el espacio.

b) ¿Qué valor posee la carga acumulada en el cascarón interior?

c) ¿Cuál es la energía del sistema?

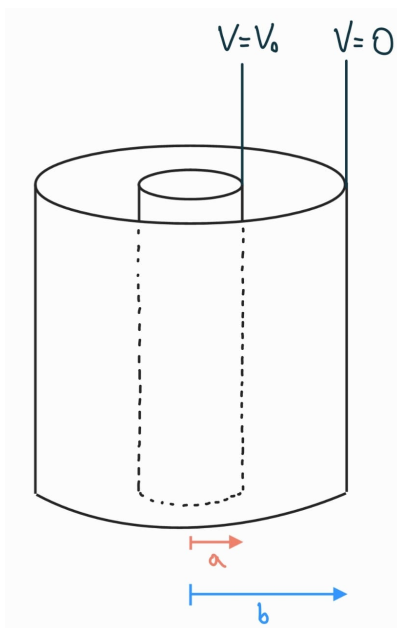

Figura 1: Cilindros concéntricos.

P2. Carga puntual y dipolo

Considere una carga puntual $q > 0$ a una distancia r de un dipolo de momento dipolar p el cual forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la Figura 2.

a) Calcule la energía del sistema ¿Para qué valor de θ se maximiza la energía?

b) Encuentre la fuerza que la carga q ejerce sobre el dipolo.

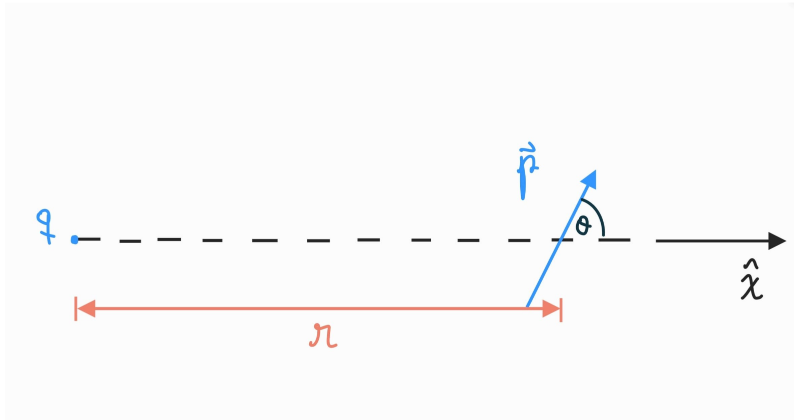

Figura 2

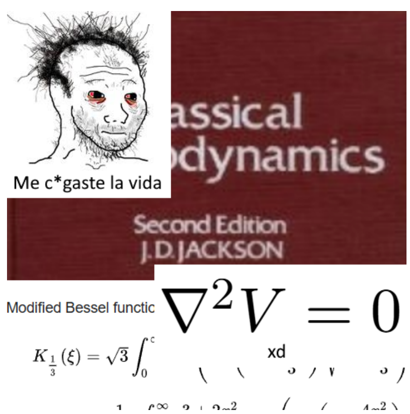

Figura 3: Ojalá fuese meme.

Resumen

Ecuaciones de Poisson y Laplace

El potencial eléctrico cumple la Ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

donde $\nabla^2 V$ es lo que se conoce como el Laplaciano de V. Para regiones del espacio donde no existe densidad de carga (i.e. $\rho = 0$) se tiene la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

Estas ecuaciones diferenciales se pueden resolver si se conocen las condiciones de borde necesarias para el potencial e imponiendo la continuidad de este. Finalmente, el campo eléctrico se puede despejar mediante $\vec{E} = -\nabla V$.

Laplaciano en diferentes sistemas coordenados:

1) Cartesianas: $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

2) Cilíndricas: $\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

3) Esféricas: $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Energía Eléctrica

Energía electrostática: Para una distribución de carga, corresponde al trabajo que se debe realizar para trasladar esa carga desde regiones de potencial cero al lugar que ocupa en la distribución, se puede pensar como la energía necesaria para "armar" un sistema de cargas. Para un sistema de N cargas puntuales, la energía estará dada por:

$$U = \sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)$$

Para distribuciones continuas:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho V dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V |\vec{E}|^2 dV$$

donde la segunda integral se realiza sobre **todo el espacio**.

Resumen

Dipolo

Se constituye de dos cargas puntuales de igual magnitud $+q$ y $-q$ separadas una distancia d la cual es muy pequeña comparada con la distancia a la que estamos trabajando ($d \ll r$). Para esta configuración el momento dipolar es:

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

El potencial producido por un dipolo ubicado en el origen es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

Esta expresión nos dice que el potencial de un dipolo, a diferencia del de una carga puntual, depende de la dirección de observación (a través del ángulo θ). Además, depende de la distancia como $1/r^2$, mientras que el de una carga puntual va como $1/r$. Esto quiere decir que el potencial (y campo) de un dipolo disminuyen más rápidamente con la distancia que el de una carga puntual.

El campo eléctrico en $\vec{r}$ generado por un dipolo es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

Para distribuciones más complejas, sean discretas o continuas, la expresión del momento dipolar viene dada por:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i\vec{r}_i = \int dq(\vec{r}\,')\vec{r}\,'$$

donde $dq = \rho dV'$, $dq = \sigma dS'$ o $dq = \lambda dl'$.

Energía de un dipolo: Si tenemos un dipolo $\vec{p}$ inmerso en un campo eléctrico externo $\vec{E}$, la energía del sistema viene dada por la siguiente expresión:

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

Torque sobre un dipolo: Similar al caso anterior, un dipolo inmerso en un campo eléctrico externo expermineta un torque:

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$$