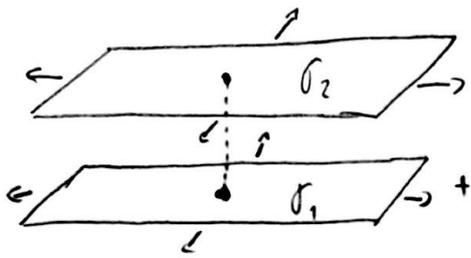
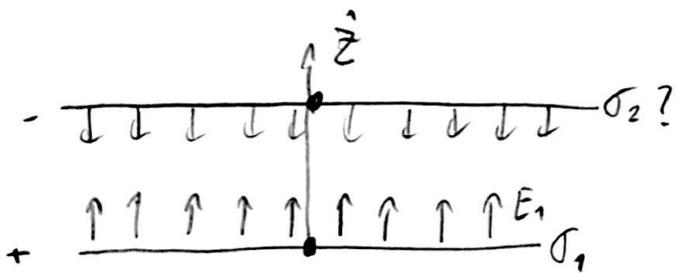


P<sub>1</sub>)



Si nos dicen que las placas son muy grandes, podemos despreciar las condiciones de borde. Es decir considerar estos como infinitas.

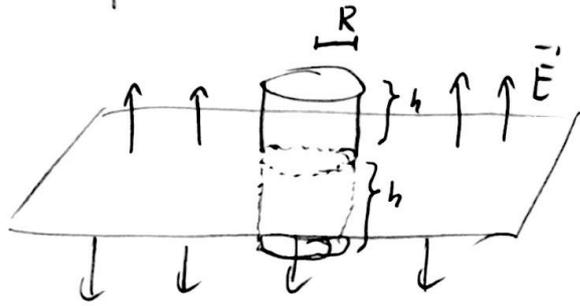
Así podemos aproximar el campo que produce una distribución de carga uniforme en las placas con solo la componente normal a estas.



Nos piden la densidad de carga en la placa superior  $\sigma_2(x,y)$  para que la diferencia de potencial entre los centros de las placas sea  $V_1 = \Delta V = V(+)-V(-) = V(\sigma_1) - V(\sigma_2) = -\int_{\sigma_2}^{\sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Por convención si tenemos indicada la polaridad de los puntos con (-) y (+) el potencial entre ellos será  $\Delta V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Para relacionar  $V(\sigma)$  sacaremos el  $\vec{E}$  que produce la placa  $\sigma$ .



Usamos un cilindro como superficie gaussiana cerrada. Nos damos cuenta que en el manto el flujo es nulo y que ambas bases por simetría tienen el mismo flujo.

$$g) \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{2 \int_{\text{Base}} E(h) dS}_{\text{Area}} + \int_{\text{manto}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 E(h) \int dS =$$

$$= 2 E(h) R^2 \pi$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}} / \epsilon_0 \rightarrow \text{Ley de Gauss}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma \cdot dS = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int dS = \frac{R^2 \pi \sigma}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \hat{n}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{array} \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \hat{z} \quad \uparrow \hat{z}$$

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

Asumiendo  $\sigma_2$  como uniforme y conocida podemos obtener el campo existente entre placas.  $\vec{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \hat{z}$

$$\Rightarrow V_1 = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para hacer esta integral de línea se pueden elegir cualquier trayectoria, al ser  $\vec{E}$  un campo conservativo, todas nos darán un mismo valor.



Por conveniencia tomaremos la que es paralela al campo  $d\vec{l} = dz \hat{z}$

$$V_1 = \int_0^h \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \hat{z} \cdot dz \hat{z} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \int_0^h dz = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} h$$

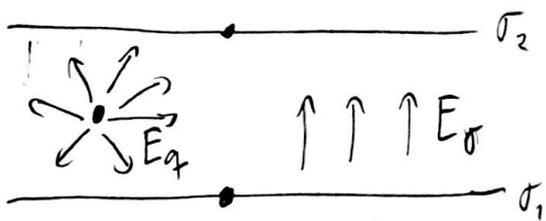
$$V_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \epsilon_0} h$$

como  $V_1$  es conocido  
despejamos  $\sigma_2$

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{2 \epsilon_0 V_1}{h}$$

uniforme en toda la placa.

• Para la segunda parte usaremos ppo. de superposicion:



$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_\sigma$$

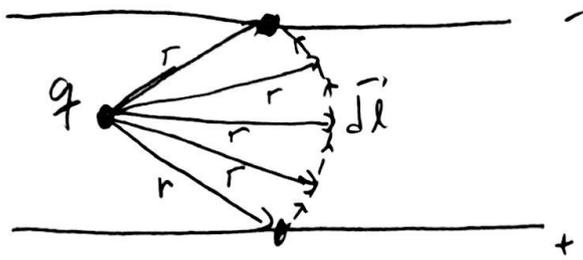
$$V_1 = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_+^- (\vec{E}_\sigma + \vec{E}_q) \cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_+^- \vec{E}_\sigma \cdot d\vec{l}} + \int_+^- \vec{E}_q \cdot d\vec{l}$$

Ya lo calculamos

$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \epsilon_0} h$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \epsilon_0} h + \int_+^- \vec{E}_q \cdot d\vec{l}$$

al calcular el potencial  
que genera el campo  
producido por  $q$ . ( $\vec{E}_q$ )  
Podemos despejar  
 $\sigma_2$  de la ecuacion



$$\vec{E}_q \perp d\vec{l}$$

Como dijimos, la integral de línea  $\int_+ \vec{E} \cdot d\vec{l}$  es independiente de la trayectoria.

Debido a esto podemos usar una trayectoria que mantenga la distancia con la carga. Que sea parte de una circunferencia con  $+q$  en el centro.

De esta manera la trayectoria será siempre perpendicular al campo  $E_q$

$$\int_+ \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = \int_+ 0 \, dl = 0$$

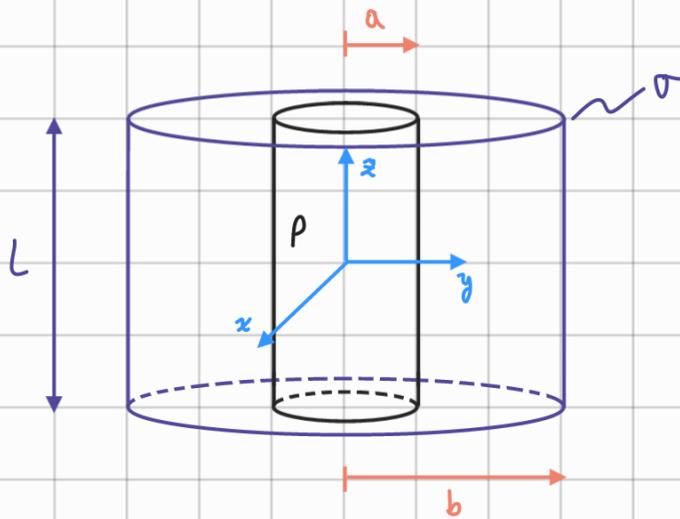
$$V_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} h + 0 \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_1 - \frac{2\epsilon_0 V_1}{h}$$

Al igual que el caso anterior.

Notemos que esto solo lo podemos hacer por la geometría del problema, pues la carga está al medio de las placas y los puntos ~~están~~ están uno sobre el otro

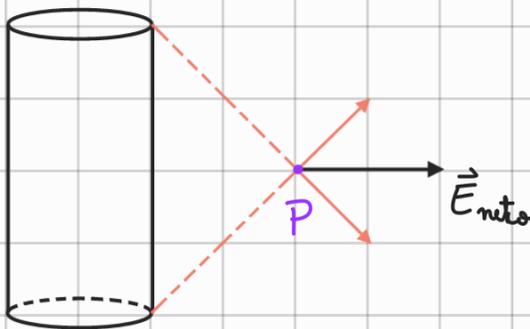
$P_2$

Ubicamos el sistema de referencia en el centro del cilindro interior y usamos coordenadas cilíndricas



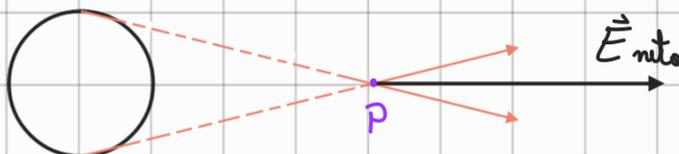
Como se nos dice que  $L \gg b$ , podemos aproximar este cable como si fuese un cilindro infinito.

Veamos ahora la simetría del problema, pensemos únicamente en el cable interno y algún punto  $P$  fuera de este



Notemos que para cada aporte que venga desde arriba de  $P$  existirá un aporte que vendrá desde abajo el cual cancelará la componente vertical del campo en ese punto (muy similar a la  $P_1$  del aux 1). Por otro lado, como ahora el cilindro es "infinito" (muy largo), da igual si movemos el punto  $P$  para arriba o abajo, siempre habrá un aporte y su contraparte que cancelarán las componentes verticales del campo eléctrico.

Ahora miremos el cilindro desde arriba



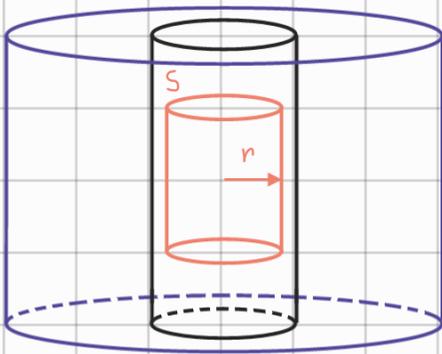
Así como ocurre en una esfera, no importa en que ángulo nos pongamos alrededor del cilindro, siempre existirá un aporte y su "opuesto" que anularán la componente angular del campo eléctrico. Esto se desprende de que la densidad de carga en particular no depende de  $\varphi$ , pues es uniforme. Y por esta misma razón, la intensidad del campo no puede tener dependencias de  $\varphi$  ni  $z$ . Los argumentos anteriores se pueden extender al caso en el interior del cilindro macizo y para el cascarón cilíndrico.

De todo lo anterior podemos concluir que el campo eléctrico debe tener la siguiente forma:

$$\vec{E}(r) = E(r)\hat{r} \quad \text{En coordenadas cilíndricas.}$$

Ahora podemos usar la Ley de Gauss para resolver.

Empezamos desde adentro hacia afuera. Colocamos una superficie imaginaria cilíndrica de radio  $r$  y alto  $L$  al interior del cilindro macizo (en el dibujo no tiene el mismo largo para que se pueda ver mejor solamente)



Ahora aplicamos la Ley de Gauss sobre este cilindro

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Resolvemos el lado izquierdo primero.

Para el cilindro existen 3 superficies, las 2 tapas y el manto. El diferencial de superficie para las tapas es

$$d\vec{S}_1 = \hat{z} r dr d\varphi \quad \text{Para la tapa superior.}$$

$$d\vec{S}_2 = (-\hat{z}) r dr d\varphi \quad \text{Para la tapa inferior.}$$

Mientras que el diferencial de superficie del manto es:

$$d\vec{S}_s = \hat{r} r d\varphi dz$$

Como tenemos un cilindro completo  $\varphi \in [0, 2\pi)$

Mientras que  $r' \in [0, r]$

Y como el cilindro tiene largo  $L$   $z' \in [-L/2, L/2]$

Por último, ya dedujimos que el campo tiene la forma  $E(r)\hat{r}$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^r E(r)\hat{r} \cdot \hat{z} r dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^r E(r)\hat{r} \cdot \hat{z} r dr d\varphi + \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} r d\varphi dz \\ &= E(r)r \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} d\varphi dz \end{aligned}$$

*cte. respecto a  $\varphi$  y  $z$*

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi L E(r)r$$

Ahora el lado derecho

$$Q_{enc} = \int_{V'} \rho dV'$$

El diferencial de volumen para un cilindro es  $r dr d\varphi dz$

$$\therefore Q_{enc} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r' dr' d\varphi dz$$

$$Q_{enc} = \pi r^2 L \rho \longrightarrow \frac{Q_{enc}}{\epsilon_n} = \frac{\pi r^2 L \rho}{\epsilon_0}$$

Igualamos ambos lados

$$2\pi L E(r)r = \frac{\pi r^2 L \rho}{\epsilon_0}$$

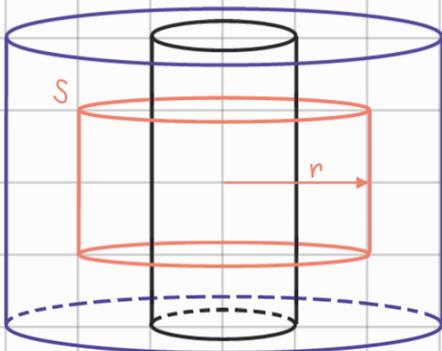
$$E(r) = \frac{r\rho}{2\epsilon_0}$$

Y por los argumentos de simetría concluimos la dirección del campo

$$\vec{E}(r) = \frac{r\rho}{2\epsilon_0} \hat{r} \quad r < a$$

Ahora resolvemos para el espacio intermedio.

Dibujamos nuestra superficie gaussiana con un radio  $r \in [a, b)$



En este caso el lado izquierdo de la Ley de Gauss se resuelve de forma análoga a la parte anterior, por lo que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi L E(r)r$$

Ahora Calculemos la carga encerrada por la superficie imaginaria.

Como la superficie tiene un radio  $r \in [a, b)$ , y fuera del cilindro macizo no hay densidad de carga, tendremos que

$$Q_{enc} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^b \rho r' dr' d\phi dz'$$

$$Q_{enc} = \rho 2\pi L \int_0^a r dr = 2\pi L \rho \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^a$$

$$Q_{enc} = \pi L \rho a^2 \longrightarrow \boxed{\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\pi L \rho a^2}{\epsilon_0}}$$

Igualamos

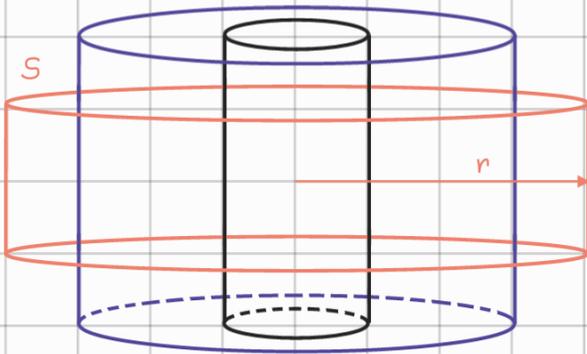
$$2\pi L E(r) r = \frac{\pi L \rho a^2}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r}$$

Y por los argumentos de simetría

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r}} \quad r \in [a, b]$$

Finalmente resolvemos para el exterior del cable.  
Ahora nuestra superficie gaussiana es



Nuevamente el lado izquierdo de la Ley de Gauss se resuelve de forma análoga a la primera parte, por lo que

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi L E(r) r}$$

Ahora notemos lo siguiente para la carga encerrada. Se nos dice que el sistema tiene una carga total igual a 0, y ahora nuestra superficie gaussiana encierra todo el cable (aunque en el dibujo no se ve así por razones de visualización), de manera que la carga encerrada es 0

$$Q_{enc} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = 0}$$

Igualando

$$2\pi L E(r)r = 0$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = 0} \quad r > b$$

El campo eléctrico es nulo fuera del cable.

$$b) \quad \vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r} & r < a \\ \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r} & r \in [a, b] \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Notemos que  $E$  solo tiene componente radial, por lo que podemos utilizar un camino como el siguiente para integrar



$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow d\vec{l} = dr\hat{r}$$

El potencial se calcula como

$$V = - \int_0^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Y usando el camino que elegimos arriba

$$V = - \int_0^r \vec{E} \cdot \hat{r} dr$$

Dado que tenemos 3 zonas, deberemos calcular el potencial en cada una de ellas

$r < a$

$$V_1 = - \int_0^r \frac{\rho r'}{2\epsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r} dr' = - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^r r' dr' =$$

$$V_1(r) = \frac{-\rho r^2}{4\epsilon_0}$$

$r \in [a, b]$

$$V_2 = - \int_0^a \frac{\rho r'}{2\epsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r} dr' - \int_a^r \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r'} \hat{r} \cdot \hat{r} dr' = \frac{-\rho a^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \int_a^r \frac{dr'}{r'} = \frac{-\rho a^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} (\ln(r) - \ln(a))$$

$$V_2(r) = \frac{-\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right]$$

$r > b$

$$V_3 = - \int_0^a \frac{\rho r'}{2\epsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r} dr' - \int_a^b \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r'} \hat{r} \cdot \hat{r} dr' - \underbrace{\int_b^r 0 \cdot \hat{r} dr'}_{=0} = \frac{-\rho a^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} (\ln(b) - \ln(a))$$

$$V_3(r) = \frac{-\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

Verifiquemos la continuidad de  $V$

$$\ln(1) = 0$$

$$V_1(r=a) = \frac{-\rho a^2}{4\epsilon_0}$$

$$V_2(r=a) = \frac{-\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{a}{a}\right) \right] = \frac{-\rho a^2}{4\epsilon_0}$$

$$V_1(r=a) = V_2(r=a) \quad \checkmark$$

$$V_2(r=b) = \frac{-\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$V_3(r=b) = \frac{-\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$V_2(r=b) = V_3(r=b) \quad \checkmark$$

c)

