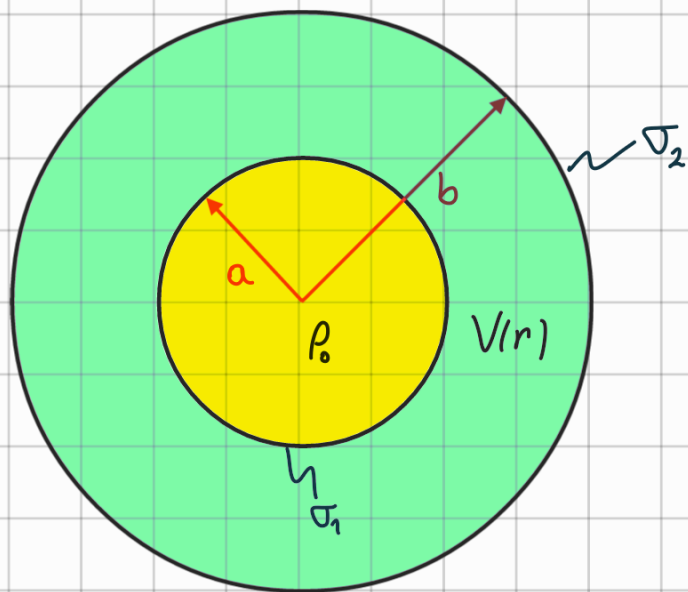


P₁



$$V_2(r) = -\frac{k}{6} r^2; \quad r \in [a, b]$$

Empecemos calculando el campo en la región $r \in (a, b)$
Como ya conocemos la forma del potencial en esta zona,
podemos usar

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} \right)$$

(V no depende de φ ni θ)

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{k}{6} r^2 \right) \hat{r} = \frac{k}{3} r \hat{r}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kr}{3} \hat{r}} \quad r \in (a, b) \quad (\star)$$

Conocido el campo, podemos usar la forma diferencial de la Ley de Gauss para encontrar la densidad de carga en esta zona

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\rho = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \cancel{\nabla_{\varphi, \theta} \cdot E_{\varphi, \theta}} \rightarrow 0 \quad (\vec{E} \text{ no depende de } \varphi \text{ ni } \theta)$$

$$\rho = \frac{\epsilon_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{kr}{3} \right)$$

$$= \frac{k\epsilon_0}{3r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = \frac{k\epsilon_0}{3r^2} 3r^2$$

$$\rho = k\epsilon_0 \quad r \in (a, b)$$

Esto nos será de utilidad más adelante.

Ahora comencemos a calcular el campo eléctrico, de adentro hacia afuera

$$r < a$$

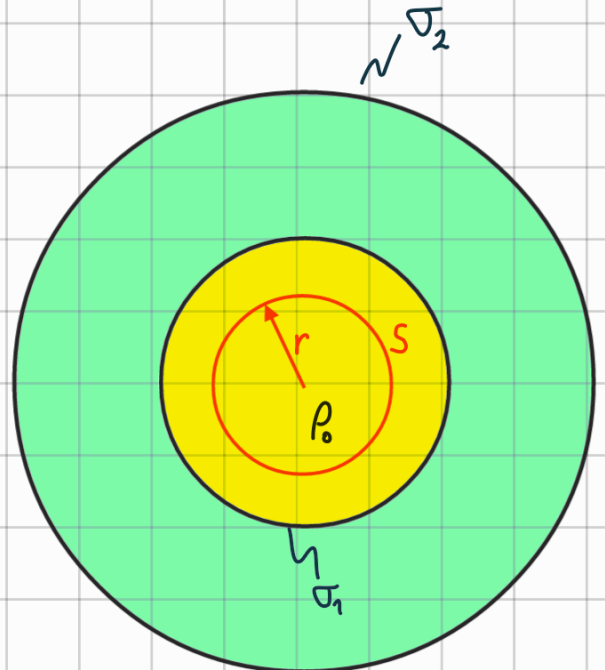
Colocamos una superficie esférica imaginaria de radio $r < a$, y usamos la Ley de Gauss con esta superficie.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Primero resolvemos el lado izquierdo, el cual corresponde al flujo de campo eléctrico sobre la superficie gaussiana. Dada la simetría esférica del sistema, el campo eléctrico deberá tener la siguiente forma

$$\vec{E} = E(r) \hat{r}$$

Además, al tener una superficie esférica, el diferencial de superficie dS deberá ser



$$d\vec{S} = r^2 \sin\theta d\varphi d\theta \hat{r} ; \quad \varphi \in [0, 2\pi) \text{ y } \theta \in [0, \pi] \text{ (Esfera completa).}$$

Recordemos que la orientación del diferencial de superficie corresponde a la normal a la superficie, es decir, a la dirección que sale de la superficie, por lo que esta deberá ser como anotamos arriba (en $\hat{r}$).

Ahora podemos reemplazar esto en el lado izquierdo de la Ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta$$

$E(r)$ y r^2 no dependen de φ ni θ , los sacamos.

$$= E(r) r^2 \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\varphi d\theta}_{4\pi}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

Tenemos el lado izquierdo, ahora hagamos el derecho.

En este caso, nuestra superficie gaussiana encierra parte de la carga contenida en la esfera interior, y como conocemos la densidad de carga en esta región, podemos calcular la densidad de carga integrando dicha densidad sobre el volumen que encierra la superficie

$$Q_{enc} = \int_V \rho_0 dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho_0 r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \rho_0 \underbrace{\int_0^r r^2 dr}_{\frac{r^3}{3}} \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\varphi d\theta}_{4\pi}$$

$$Q_{enc} = \rho_0 \frac{r^3}{3} 4\pi$$

$$Q_{enc} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0$$

En este caso, dado que la densidad de carga es **uniforme**, podríamos también haber calculado la carga encerrada multiplicando la densidad por el volumen. Pero en caso de que la densidad de carga hubiese **no uniforme** (o sea, cambia al movernos en el espacio) tendríamos que haber integrado sí o sí. La forma general de calcular la carga encerrada es integrando la densidad sobre el volumen.

Y ahora que tenemos los dos lados de la Ley de Gauss, igualamos

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$$

Y por los argumentos de simetría concluimos que la dirección del campo es $\hat{r}$

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r} \quad r < a$$

$$r \in (a, b)$$

Ahora colocamos una superficie gaussiana con radio $r \in (a, b)$ y resolvemos siguiendo el mismo procedimiento anterior usando Ley de Gauss.

El lado izquierdo es análogo a la parte anterior, pues dado que en esta región seguimos teniendo simetría esférica, el campo sigue teniendo la forma

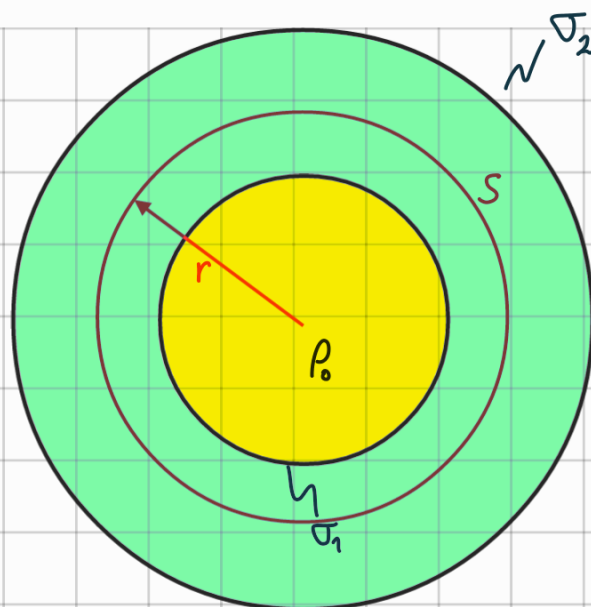
$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

de manera que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

Ahora necesitamos la carga que encierra nuestra superficie. Notemos que aquí estamos encerrando 3 cosas diferentes con carga. La primera es la esfera interna de color amarillo con densidad de carga ρ_0 , la segunda es el cascarón ubicado en $r = a$ con densidad de carga σ_1 , y la última es un pedazo del cascarón grueso de color verde, el cual tiene una densidad de carga $k\epsilon_0$, que es la que calculamos al inicio; por lo que tenemos que considerar estas tres contribuciones para la carga encerrada

$$Q_{enc} = \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho_0 r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta}_{\text{Esfera interior}} + \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma_1 a^2 \sin\theta d\varphi d\theta}_{\text{Cascarón delgado en } r=a} + \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_a^r k\epsilon_0 r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta}_{\text{Pedazo del cascarón grueso verde.}}$$



$$Q_{enc} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 + 4\pi a^2 \sigma_1 + k\epsilon_0 \int_a^r r^2 dr \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\varphi d\theta}_{4\pi}$$

$$Q_{enc} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 + 4\pi a^2 \sigma_1 + k\epsilon_0 4\pi \left. \frac{r^3}{3} \right|_a^r$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 + 4\pi a^2 \sigma_1 + \frac{4}{3}\pi \epsilon_0 (r^3 - a^3)$$

$$Q_{enc} = 4\pi \left[\frac{a^3 \rho_0}{3} + a^2 \sigma_1 + \frac{k\epsilon_0}{3} (r^3 - a^3) \right]$$

Ahora igualamos ambos lados de la Ley de Gauss

$$\cancel{4\pi} r^2 E(r) = \frac{\cancel{4\pi}}{\epsilon_0} \left[\frac{a^3 \rho_0}{3} + a^2 \sigma_1 + \frac{k\epsilon_0}{3} (r^3 - a^3) \right]$$

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{a^3 \rho_0}{3} + a^2 \sigma_1 + \frac{k\epsilon_0}{3} (r^3 - a^3) \right]$$

Y por los argumentos de simetría

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{a^3 \rho_0}{3} + a^2 \sigma_1 + \frac{k\epsilon_0}{3} (r^3 - a^3) \right] \hat{r} \quad r \in (a, b)$$

Pero ya habíamos calculado el campo eléctrico en esta misma zona al inicio (★), por lo que podemos igualar ambas expresiones y así despejar σ_1

$$\frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{a^3 \rho_0}{3} + a^2 \sigma_1 + \frac{k\epsilon_0}{3} (r^3 - a^3) \right] = \frac{k r}{3}$$

$$\frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0} + \frac{a^2 \sigma_1}{\epsilon_0} + \frac{k}{3} (r^3 - a^3) = \frac{k}{3} r^3$$

$$\frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0} + \frac{a^2 \sigma_1}{\epsilon_0} + \cancel{\frac{k}{3} r^3} - \cancel{\frac{k}{3} a^3} = \cancel{\frac{k}{3} r^3}$$

$$\frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0} + \frac{a^2 \sigma_1}{\epsilon_0} - \frac{k}{3} a^3 = 0 \quad / \times \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{a \rho_0}{3\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} - \frac{k}{3} a = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{ka}{3} \epsilon_0 - \frac{a \rho_0}{3}$$

Y con esto despejamos la verdadera forma del campo en esta zona

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{a^3 \rho_0}{3} + a^2 \left(\frac{ka}{3} \epsilon_0 - \frac{a \rho_0}{3} \right) + \frac{k \epsilon_0}{3} (r^3 - a^3) \right] \hat{r}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\cancel{\frac{a^3 \rho_0}{3}} + \cancel{\frac{ka^3}{3} \epsilon_0} - \cancel{\frac{a^3 \rho_0}{3}} + \frac{k \epsilon_0}{3} r^3 - \cancel{\frac{k \epsilon_0}{3} a^3} \right] \hat{r}$$

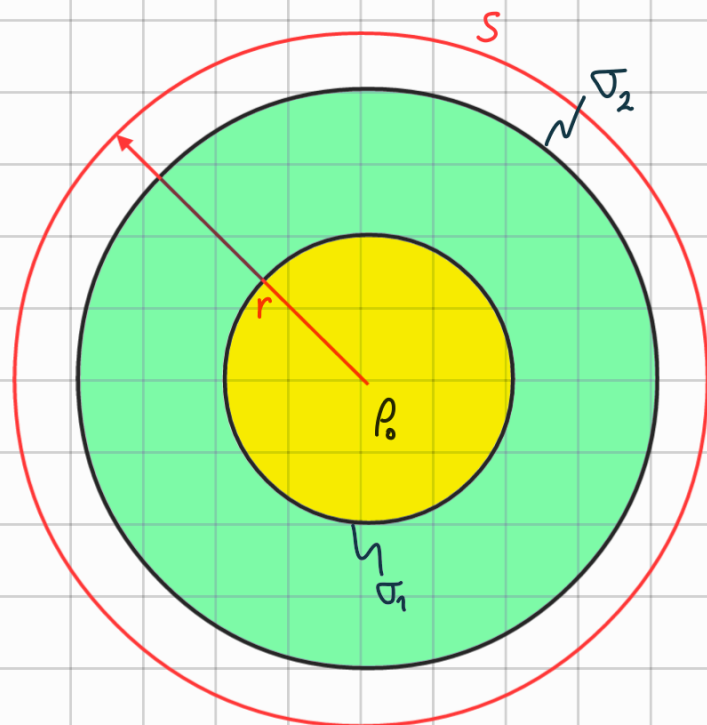
$$= \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \frac{k \epsilon_0}{3} r^3 \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{kr}{3} \hat{r} \quad r \in (a, b)$$

$$r > b$$

Como ahora queremos el campo en $r > b$, hacemos una superficie gaussiana con un radio mayor a b .

El lado izquierdo de la Ley de Gauss se calcula de la misma manera que en las dos regiones anteriores, por lo que obtenemos



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E$$

Ahora queremos el lado izquierdo.

Para la carga encerrada tenemos 4 contribuciones, la esfera amarilla, el cascarón delgado en $r=a$, el cascarón grueso verde y ahora también el cascarón exterior en $r=b$. Así entonces

$$Q_{enc} = \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho_0 r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta}_{\text{Esfera interior.}} + \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma_1 a^2 \sin\theta d\varphi d\theta}_{\text{Cascarón delgado en } r=a.} + \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_a^b k\epsilon_0 r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta}_{\text{Cascarón grueso verde.}} + \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma_2 b^2 \sin\theta d\varphi d\theta}_{\text{Cascarón delgado en } r=b.}$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 + 4\pi a^2 \sigma_1 + \frac{4}{3}\pi \epsilon_0 (b^3 - a^3) + 4\pi b^2 \sigma_2$$

$$= 4\pi \left(\frac{a^3 \rho_0}{3} + a^2 \sigma_1 + \frac{k\epsilon_0}{3} b^3 - \frac{k\epsilon_0}{3} a^3 + b^2 \sigma_2 \right)$$

$$\sigma_1 = \frac{ka}{3} \epsilon_0 - \frac{a\rho_0}{3}$$

$$= 4\pi \left(\frac{a^3 \rho_0}{3} + a^2 \sigma_1 + \frac{k\epsilon_0}{3} b^3 - \frac{k\epsilon_0}{3} a^3 + b^2 \sigma_2 \right)$$

$$= 4\pi \left(\cancel{\frac{a^3 \rho_0}{3}} + \cancel{\frac{ka^3}{3} \epsilon_0} - \cancel{\frac{a^3 \rho_0}{3}} + \frac{k\epsilon_0}{3} b^3 - \cancel{\frac{k\epsilon_0}{3} a^3} + b^2 \sigma_2 \right)$$

$$= 4\pi \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b^3 + \sigma_2 b^2 \right)$$

$$Q_{enc} = 4\pi b^2 \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b + \sigma_2 \right)$$

Por la Ley de Gauss

$$\cancel{4\pi} r^2 E(r) = \frac{\cancel{4\pi} b^2}{\epsilon_0} \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b + \sigma_2 \right)$$

$$E(r) = \frac{b^2}{\epsilon_0 r^2} \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b + \sigma_2 \right)$$

Y por los argumentos de simetría le damos la dirección al campo

$$\vec{E}(r) = \frac{b^2}{\epsilon_0 r^2} \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b + \sigma_2 \right) \hat{r} \quad r > b$$

Para encontrar σ_2 usaremos el potencial. Este lo calcularemos de **afuera** hacia **adentro**, situando nuestra referencia en el infinito

$$V(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

* Auxiliar 2:

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r \sin\theta d\varphi \hat{\varphi} + r d\theta \hat{\theta}$$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r E(r) \hat{r} \cdot (dr \hat{r} + r \sin\theta d\varphi \hat{\varphi} + r d\theta \hat{\theta}) ; \quad \begin{aligned} \hat{r} \cdot \hat{\varphi} &= \hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0 \\ \hat{r} \cdot \hat{r} &= 1 \end{aligned}$$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r E(r) dr$$

$r > b$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \frac{b^2}{\epsilon_0 r^2} \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b + \sigma_2 \right) dr$$

$$V(r) = - \frac{b^2}{\epsilon_0} \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b + \sigma_2 \right) \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{b^2}{\epsilon_0} \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b + \sigma_2 \right) \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r = \frac{b^2}{\epsilon_0} \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b + \sigma_2 \right) \frac{1}{r}$$

$$V_1(r) = \frac{b^2}{\epsilon_0 r} \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b + \sigma_2 \right) \quad r \geq b$$

Ahora utilizaremos la propiedad de que el potencial es continuo, es decir, el potencial para $r \geq b$ y para $r \in [a, b]$ deben ser iguales en $r=b$, eso es (en parte) lo que significa que el potencial sea continuo. Además, por el enunciado ya conocemos V en la zona $r \in [a, b]$, así entonces

$$V_2(r=b) = V_1(r=b)$$

$$-\frac{k}{6} b^2 = \frac{b^2}{\epsilon_0 b} \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b + \sigma_2 \right)$$

$$= \frac{b}{\epsilon_0} \frac{k\epsilon_0}{3} b + \frac{b}{\epsilon_0} \sigma_2$$

$$-\frac{k}{6} b^2 = \frac{k b^2}{3} + \frac{b}{\epsilon_0} \sigma_2$$

$$\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} = -\frac{k b}{3} - \frac{k b}{6}$$

$$= -\frac{3 k b}{6}$$

$$\sigma_2 = -\frac{k b \epsilon_0}{2}$$

$\Rightarrow$

$$V_1(r) = \frac{b^2}{\epsilon_0 r} \left(\frac{k\epsilon_0}{3} b - \frac{k b \epsilon_0}{2} \right)$$

$$V_1(r) = -\frac{b^3 k}{6 r} \quad r \geq b$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{b^2}{\epsilon_0 r^2} \left(\frac{k a_0}{3} b - \frac{k b a_0}{2} \right) \hat{r}$$

$$= \frac{b^2}{r^2} \left(\frac{k}{3} b - \frac{k b}{2} \right) \hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{k b^3}{6 r^2} \hat{r} \quad r > b$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3 \epsilon_0} \hat{r} & r < a \\ \frac{k r}{3} \hat{r} & r \in (a, b) \\ -\frac{k b^3}{6 r^2} \hat{r} & r > b \end{cases}$$

Y finalmente calculamos el potencial en $r < a$

$$V(r); r < a$$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \int_{\infty}^b \underbrace{\frac{k b^3}{6 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r}}_{=1} dr - \int_b^a \underbrace{\frac{k r}{3} \hat{r} \cdot \hat{r}}_{=1} dr - \int_a^r \underbrace{\frac{\rho_0 r}{3 \epsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r}}_{=1} dr$$

$$= \frac{kb^3}{6} \int_{-\infty}^b \frac{dr}{r^2} - \frac{k}{3} \int_b^a r dr - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \int_a^r r dr = \frac{kb^3}{6} \left(\frac{-1}{r} \right) \Big|_{-\infty}^b - \frac{k}{3} \frac{r^2}{2} \Big|_b^a - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} \Big|_a^r$$

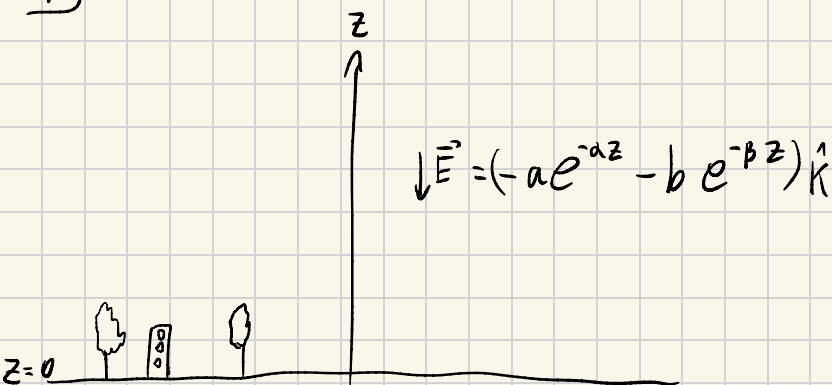
$$= -\frac{kb^3}{6b} - \frac{k}{6}(a^2 - b^2) - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}(r^2 - a^2)$$

$$= -\frac{kb^2}{6} - \frac{k}{6}(a^2 - b^2) - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}(r^2 - a^2)$$

$$V(r) = \frac{1}{6} \left[k(b^2 - a^2) + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}(a^2 - r^2) - kb^2 \right] \quad r < a$$

FCV.

P₁)



a) Sabemos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot \vec{E}$

$$= \frac{\partial}{\partial z} E$$
$$= -\frac{\partial}{\partial z} (ae^{-az} - be^{-\beta z})$$
$$= aae^{-az} + b\beta e^{-\beta z} = \rho(z)/\epsilon_0$$

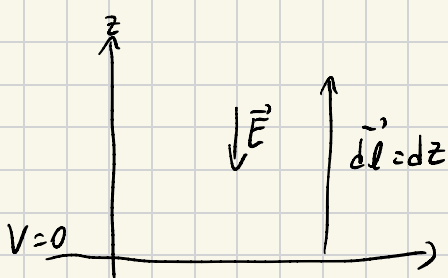
$\Rightarrow \rho(z) = \epsilon_0 (aae^{-az} + b\beta e^{-\beta z})$ para $z > 0$

b) Sabemos que $V(\vec{r}) - V(\vec{r}_{ref}) = - \int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Podemos usar de referencia $z = \infty \Rightarrow E \approx 0$

o en este caso en que $z=0$ no se indefine el campo $z=0 \Rightarrow |\vec{E}| = a+b$

$\Rightarrow$ definimos $\vec{r}_{ref} \equiv z=0 \Rightarrow V(z=0) = 0$



$$V(z) - V(\infty) = - \int_{\infty}^z \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow V(z) = + \int_0^z a e^{-\alpha z} + b e^{-\beta z} dz$$

$$\Rightarrow V(z) = -a/\alpha e^{-\alpha z} - b/\beta e^{-\beta z}$$

$$= -a/\alpha (e^{-\alpha z} - 1) - b/\beta (e^{-\beta z} - 1)$$

$$V(z) = a/\alpha (1 - e^{-\alpha z}) + b/\beta (1 - e^{-\beta z})$$

c) Si $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$ y $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{W}{q}$

Podemos entender V como trabajo electrico por unidad de carga. Este trabajo es el que actua en mover de un punto A a uno B

$$Q (V(A) - V(B)) = W \text{ realizado por el } \vec{E} \text{ sobre la carga } Q \text{ al moverse de A a B.}$$

Si una carga $+q$ se quiere mover de $z=0$ a $z=\infty$ el trabajo realizado por $\vec{E}$ sera:

$$W = \Delta V \cdot Q = (V(0) - V(\infty)) Q$$

$$= (0 - V(\infty)) q$$

$$= -(a/\alpha + b/\beta) q$$

Al ser negativo, quiere decir que se opone al mov.

$\Rightarrow -(a/\alpha + b/\beta) q$ es la energia necesaria para ir de $z=0$ a $z=\infty$