Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 5: Ley de Gauss y Potencial

P1. Pregunta densa

Se tiene una distribución de carga de simetría esférica caracterizada por dos radios a y b ($a < b$). Para $r < a$ la densidad de carga es una constante ρ_0. En la región $r \in (a, b)$ existe una densidad de carga desconocida $\rho(r)$, pero se sabe que el potencial total en ese lugar es $V(r) = -\frac{k}{6}r^2$. Por otro lado, en el radio $r = a$ hay una cáscara esférica con densidad de carga superficial σ_1, mientras que en $r = b$ hay otra cáscara con densidad de carga σ_2, ambas densidades superficiales son desconocidas.
Si solo se conocen a, b, ρ_0 y k; determine el campo y potencial eléctrico en todo el espacio, σ_1, σ_2 y $\rho(r)$

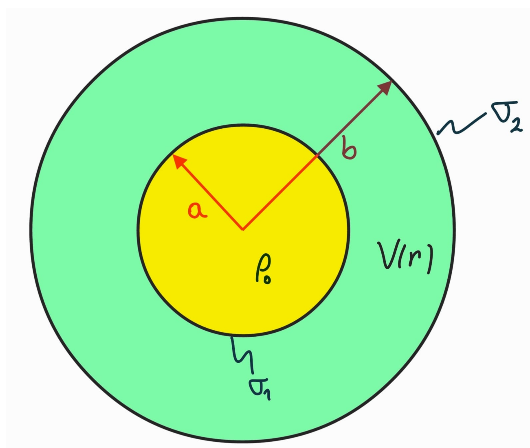

Figura 1

P2. Atmósfera eléctrica

En un día con buen tiempo, el campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra se puede describir aproximadamente por la expresión:

$$\vec{E} = -ae^{-\alpha z} - be^{-\beta z}\hat{k},$$

donde a, b, α y β son constantes con $(\alpha, \beta) > 0$. El eje z denota la altura sobre la superficie de la Tierra.

(a) Determine la densidad de carga ρ en todo el espacio.

(b) Calcule el potencial eléctrico en todo el espacio.

(c) Cuánta energía debe poseer una partícula de carga $+q$ en la superficie de la Tierra para escapar de su interacción eléctrica.

Figura 2

Resumen

Potencial

Rotor de $\vec{E}$: Para el caso electroestático, se puede demostrar que:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Potencial eléctrico: : La relación anterior permite definir el potencial eléctrico:

$$V(\vec{r}) \equiv -\int_{O}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

donde O es un algún punto de referencia que podemos elegir libremente.
Una propiedad muy importante que cumple el potencial eléctrico es que este siempre es continuo, esto puede ser útil para chequear resultados o imponer condiciones de borde.

Diferencia de potencial: Corresponde al trabajo por unidad de carga necesario para mover dicha carga desde un punto $\vec{r_1}$ a otro punto $\vec{r_2}$ a través de un campo eléctrico $\vec{E}$. Este se calcula como:

$$\Delta V = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para distribuciones de carga finitas se suele usar como referencia el infinito, donde $V(\infty) = 0$ y así:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

De todo lo anterior se desprende que:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

MUCHO ojo con el signo menos (prohibido olvidar).
Y al igual que el campo eléctrico, el potencial puede ser calculado mediante integración directa como:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Gradiente en diferentes sistemas coordenados:

1. Cartesianas: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$
2. Cilíndricas: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$
3. Esféricas: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}$