Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 4: Ley de Gauss

P1. Flujo

Considere la superficie de un cubo de lado a que es atravesado por un campo eléctrico. Calcular el flujo total de la superficie y el campo eléctrico en cada punto de ésta cuando:

a) El campo de magnitud E es uniforme y normal a una de las caras.

b) El campo de magnitud E es uniforme, tangente al plano que contiene una de las caras y forma un ángulo θ con la normal de una cara adyacente a esta.

c) El campo es el que genera una carga puntual q en el centro del cubo.

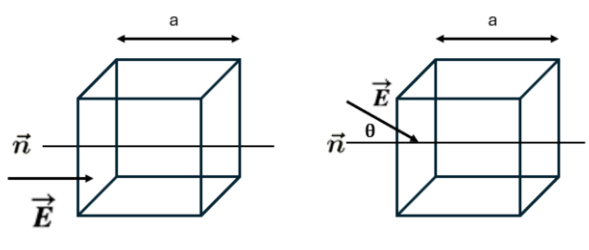


Figura 1

P2. Cascarón grueso.

Si se tiene un cascarón esférico grueso (Figura 1) que posee una densidad de carga $\rho(r) = k/r^2$ para $a \leq r \leq b$.

a. Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.

b. Grafique $|\vec{E}|$ como función de r para el caso $b = 2a$.

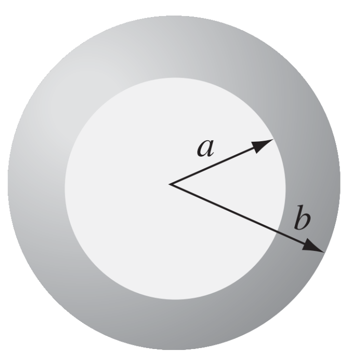


Figura 2: Cascarón grueso cargado.

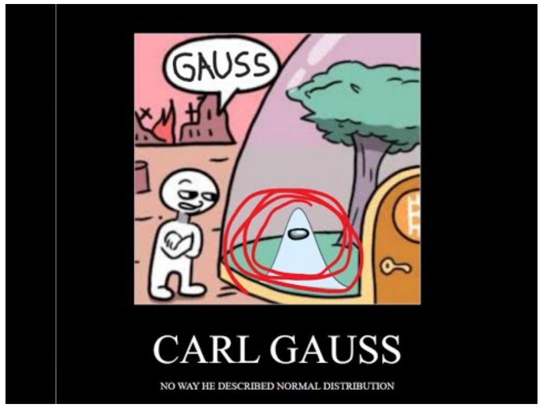


Figura 3: Amogauss.

Resumen

Ley de Gauss y Operadores vectoriales

Operador nabla: Es un operador diferencial vectorial representado por el símbolo ∇ (a veces también anotado como $\vec{\nabla}$). Este puede actuar sobre campos escalares o vectoriales mediante las operaciones correctas. En coordenadas cartesianas puede escribirse como un vector cuyas componentes son las derivadas con respecto a cada coordenada asociada al espacio tridimensional:

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Esta notación puede dar intuición para ciertos cálculos. ¿Recuerdan que en CVV al tomar el gradiente de una función escalar (∇f) obtenían un vector? Bueno, si toman un "vector" ∇ y lo multiplican por un "escalar" f, naturalmente obtienen otro vector:

$$\nabla f = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Divergencia: Es un operador diferencial el cual opera sobre un campo vectorial y devuelve un campo escalar que representa el flujo del campo vectorial a través de un volumen infinitesimalmente pequeño en cada punto del espacio. La divergencia tiene diferentes formas según cada sistema coordenado:

a. Cartesianas: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

b. Cilíndricas: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(F_r r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

c. Esféricas: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(F_r r^2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin\theta)$

Notemos la intuición aquí, al igual que cuando tomamos el producto punto entre dos vectores obtenemos un escalar, si tomamos el producto punto del "vector" ∇ con el "vector" $\vec{F}$, obtenemos un escalar también.

Rotor: Es otro operador diferencial que actúa sobre campo vectoriales, este describe la circulación infinitesimal de un campo vectorial. A diferencia de la divergencia, el rotor de un campo es un vector el cual denota la magnitud y eje de la circulación máxima.
En este caso es más conveniente anotar el rotor como un determinante:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

Aquí h_u, h_v y h_w son los factores de escala asociados al sistema de coordenadas que estemos usando. Los casos útiles son:

a. Cartesianas: $h_x = h_y = h_z = 1$.

b. Cilíndricas: $h_r = 1$, $h_\varphi = r$ y $h_z = 1$.

c. Esféricas: $h_r = 1$, $h_\varphi = r\sin\theta$ y $h_\theta = r$.

Nuevamente podemos ver la intuición, cuando tomamos el producto cruz de dos vectores obtenemos un vector, por lo que si tomamos el producto cruz de ∇ con $\vec{F}$ también obtenemos un vector.

Resumen

Teorema de la divergencia o Teorema de Gauss: Indica que la integral de flujo de un campo vectorial $\vec{F}$ a través de una superficie cerrada ∂V es igual a la integral de volumen de la divergencia de dicho campo sobre el volumen V encerrado por aquella superficie.

$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

Teorema del Rotor o de Teorema de Stokes: Dice que, dado un campo vectorial $\vec{F}$, la integral de trabajo a lo largo de una curva cerrada simple ∂S es igual a la integral de flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de la superficie S cuyo borde es ∂S:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Ley de Gauss: Establece una relación entre el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada (∂V) correspondiente a la frontera del volumen V, y la carga contenida dentro de este (Q_{enc}), tal que:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{anc}}{\varepsilon_0}$$

En caso de no conocer la carga encerrada, pero si la densidad presente, se puede calcular Q_{enc} como sigue:

$$Q_{enc} = \int_V \rho dV = \int_S \sigma dS = \int_l \lambda dl$$

Mediante el Teorema de Gauss, se puede llegar a la forma diferencial de la Ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

Nota: La Ley de Gauss se cumple siempre, sin embargo, para que esta sea de utilidad al determinar un campo eléctrico, es necesario que exista alguna **simetría**. Los casos con simetría más comunes son:

a. Plano o bloque "delgado" infinito.

b. Cable o cilindro infinito.

c. Esfera con densidad de carga dependiente de únicamente de r.

Otros casos no tan evidentes pueden ser:

a. Distribuciones infinitas con simetría axial: $\rho(\vec{r}) = \rho(z)$ (la densidad de carga varía únicamente en un eje, no depende de x ni y).

b. Distribuciones radiales: $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ (la densidad de carga varía con r únicamente).

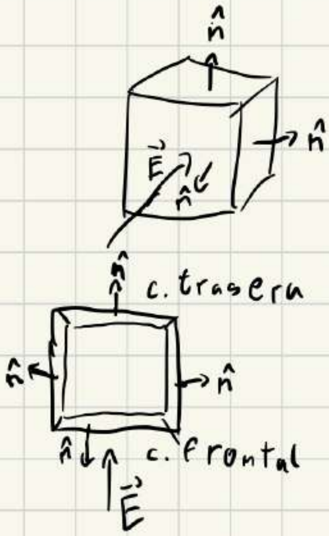
Datazo: Las distribuciones de carga infinitas (cables, planos, cilindros infinitos) no existen en el mundo real, pero son aproximaciones útiles en ciertos casos. Pensemos en los cables de una línea de transmisión, de cerca el cable de 100 metros puede parecer infinito; o si estamos desviando electrones en un laboratorio, dos placas de 20×20 cm separadas 1 milímetro son efectivamente infinitas.

P1)

escalar — vector — escalar

$$\text{Flujo} = \Phi(\vec{S}) = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS$$

a)



Caras laterales $\vec{E}\cdot\hat{n} = 0 \Rightarrow \Phi = 0$

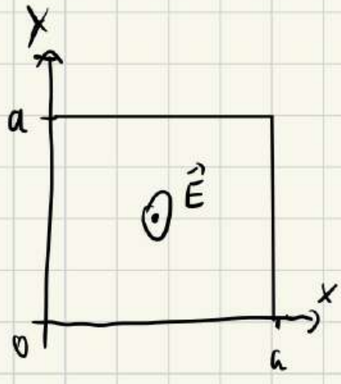
Cara frontal: $\vec{E}\cdot\hat{n} = -E$

Cara trasera: $\vec{E}\cdot\hat{n} = E$

Si el campo sale de la superficie cerrada se define positivo. Si entra se define negativo.

$$\Phi_{total} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum \Phi_{cara_i}$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + \Phi_{\substack{cara\\frontal}} + \Phi_{\substack{cara\\trasera}}$$



$$\Phi_{\substack{cara\\frontal}} = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \int_S (-E)\, dS$$

$$= -E \int_0^a\int_0^a dx\, dy$$

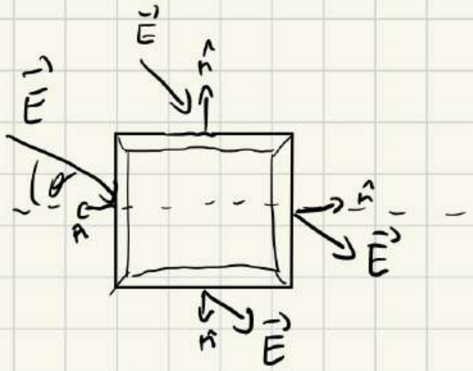
$$= -E a^2$$

Analogo: $\phi_{\text{cara trasera}} = E a^2$

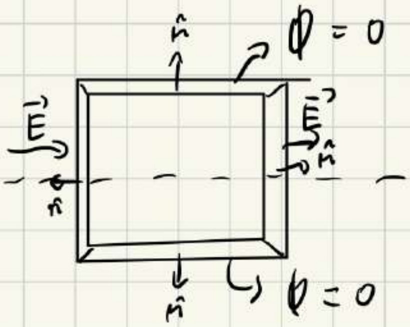
$$\Rightarrow \phi_{total} = \phi_{\text{cara frontal}} + \phi_{\text{cara trasera}} = -E a^2 + E a^2$$

$$\Rightarrow \phi_{total} = 0$$

b)

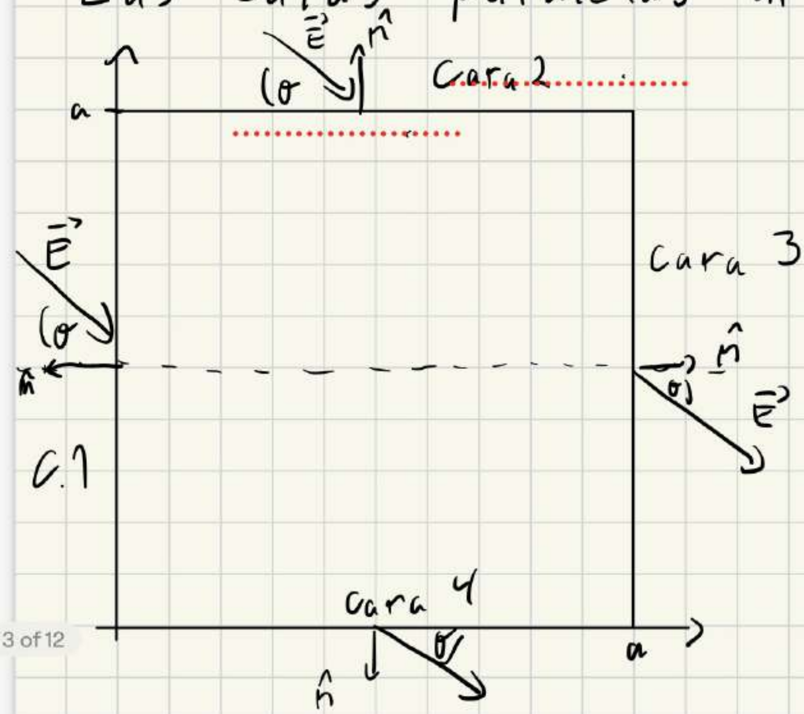


vista frontal



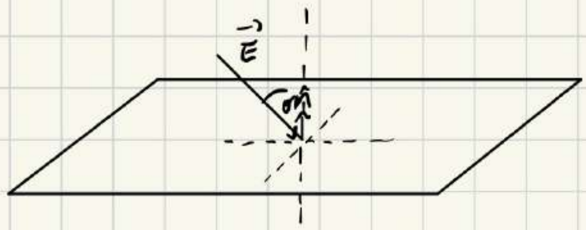
vista superior

Las caras paralelas al campo tienen $\phi = 0$



Nombranos las caras

Cara 1:

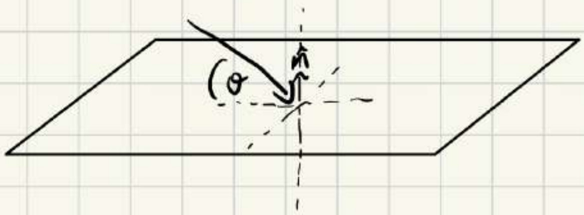


$$\vec{E} \cdot \hat{n} = -|\vec{E}| \cdot |\hat{n}| \cos(\theta) = -E \cdot 1 \cos(\theta)$$

$$= -E\cos(\theta)$$

$$\phi_{c.1} = \int_0^a\int_0^a -E\cos(\theta)\,dx\,dy = -E a^2 \cos(\theta)$$

Cara 2:

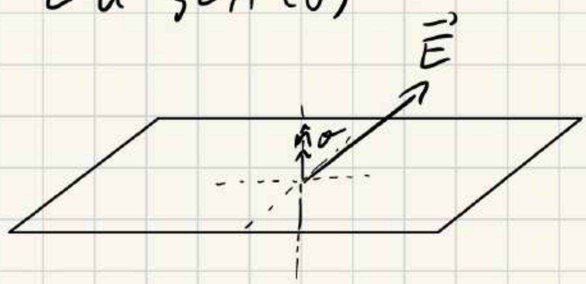


$$\vec{E} \cdot \hat{n} = -|\vec{E}| \cdot |\hat{n}| \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) = -|\vec{E}| \cdot |\hat{n}| \operatorname{sen}(\theta)$$

$$= -E \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\Rightarrow \phi_{c.2} = -E a^2 \operatorname{sen}(\theta)$$

Cara 3:



$$\vec{E} \cdot \hat{n} = |\vec{E}| \cdot |\hat{n}| \cdot \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \phi_{c.3} = E a^2 \cos(\theta)$$

Cara 4:

$$\vec{E}\cdot\hat{n} = |\vec{E}|\cdot|\hat{n}|\,sen(\theta)$$

$$\Rightarrow \phi = Ea^2 sen(\theta)$$

$$\Phi_{total} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6$$

$$= -Ea^2 sen(\theta) + -Ea^2\cos(\theta) + Ea^2 sen(\theta) + Ea^2\cos(\theta) + 0 + 0$$

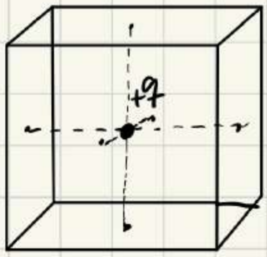
$$= 0$$

Con la ley de Gauss

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \Phi_{total} = \int_V \underbrace{\nabla\cdot\vec{E}}_{\rho/\varepsilon_0}\, dVolumen$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dvolumen = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{encerrada}$$

En (a) y (b) no existía carga al interior de los cubos. Por ley de Gauss podemos decir $\Phi_{total} = 0$ sin necesidad de calcular nada.

c) 

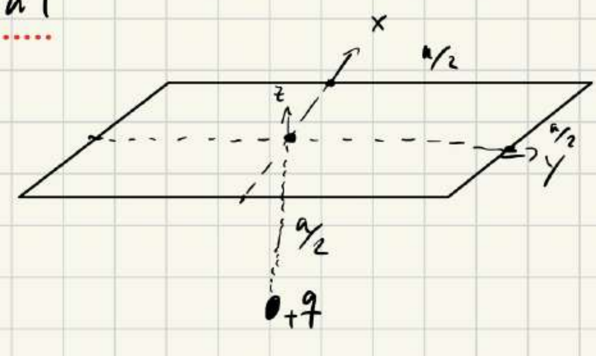
Por ley de Gauss sabemos que

$$\Phi_{total} = \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_{vol} \rho/_{\varepsilon_0} dV = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

$$= q/_{\varepsilon_0}$$

Pero no conocemos el campo electrico. En este caso a ausencia de simetria del campo en la superficie, debemos usar el metodo tradicional

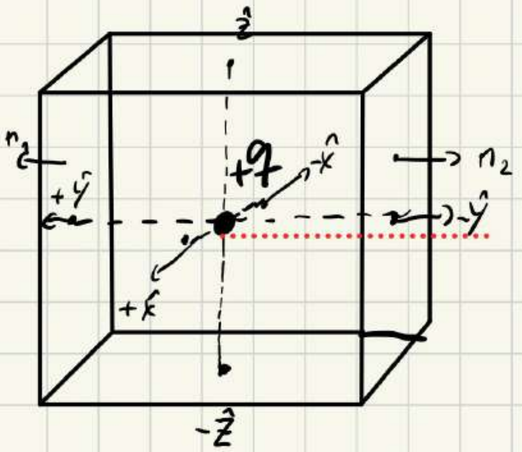
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$\vec{r} = 0$

$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y} + a/_2 \hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{E}(x,y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + a/_2\hat{z}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + a^2/_4})^3}$$



Expresamos el campo total en todas las caras.

$$\text{Cara 1}: (y = a/2): \vec{E}(x,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x\hat{x} + z\hat{z} + \frac{a}{2}\hat{y}}{\left(\sqrt{x^2+z^2+\frac{a^2}{4}}\right)^3}$$

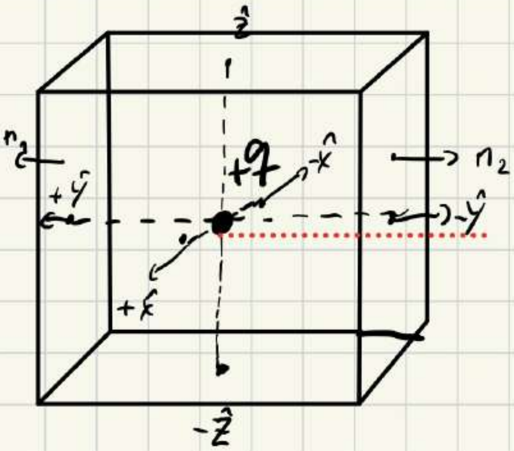
$$\text{Cara 2}: (y = -a/2): \vec{E}(x,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x\hat{x} + z\hat{z} - \frac{a}{2}\hat{y}}{\left(\sqrt{x^2+z^2+\frac{a^2}{4}}\right)^3}$$

$$\text{Cara 3}: (z = a/2): \vec{E}(x,y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x\hat{x} + y\hat{y} + \frac{a}{2}\hat{z}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+\frac{a^2}{4}}\right)^3}$$

$$\text{Cara 4}; (z = -a/2): \vec{E}(x,y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x\hat{x} + y\hat{y} - \frac{a}{2}\hat{z}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+\frac{a^2}{4}}\right)^3}$$

$$\text{Cara 5}; (x = a/2) \quad \vec{E}(y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y\hat{y} + z\hat{z} + \frac{a}{2}\hat{x}}{\left(\sqrt{z^2+y^2+\frac{a^2}{4}}\right)^3}$$

$$\text{Cara 6}; (x = -a/2): \vec{E}(y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z\hat{z} + y\hat{y} - \frac{a}{2}\hat{x}}{\left(\sqrt{z^2+y^2+\frac{a^2}{4}}\right)^3}$$



Expresamos el campo total en todas las caras.

Cara 1: $(y = a/2)$: $\vec{E}(x,z) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{x\hat{x} + z\hat{z} + a/2\,\hat{y}}{(\sqrt{x^2+z^2+a^2/4})^3}$

Cara 2: $(y = -a/2)$: $\vec{E}(x,z) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{x\hat{x} + z\hat{z} - a/2\,\hat{y}}{(\sqrt{x^2+z^2+a^2/4})^3}$

Cara 3: $(z = a/2)$: $\vec{E}(x,y) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{x\hat{x} + y\hat{y} + a/2\,\hat{z}}{(\sqrt{x^2+y^2+a^2/4})^3}$

Cara 4; $(z = -a/2)$: $\vec{E}(x,y) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{x\hat{x} + y\hat{y} - a/2\,\hat{z}}{(\sqrt{x^2+y^2+a^2/4})^3}$

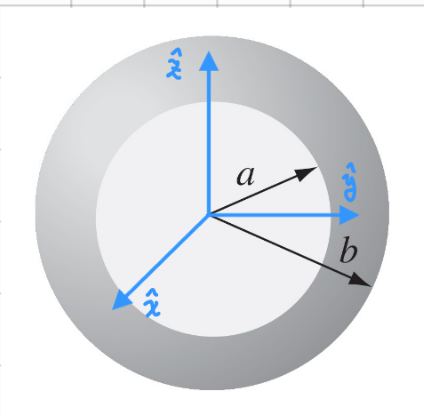
Cara 5; $(x = a/2)$ $\vec{E}(y,z) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{y\hat{y} + z\hat{z} + a/2\,\hat{x}}{(\sqrt{z^2+y^2+a^2/4})^3}$

Cara 6; $(x = -a/2)$: $\vec{E}(y,z) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{z\hat{z} + y\hat{y} - a/2\,\hat{x}}{(\sqrt{z^2+y^2+a^2/4})^3}$

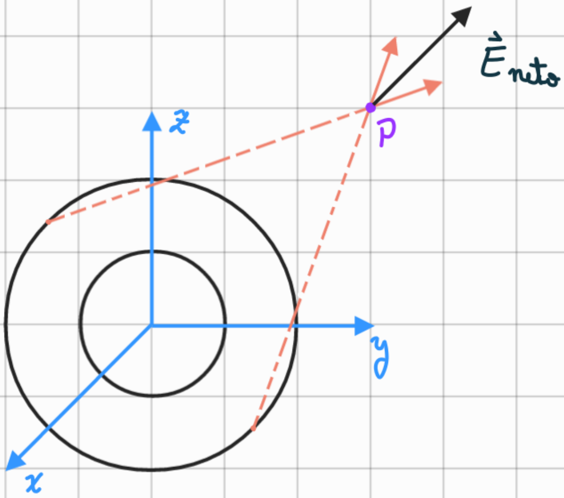
P2)

$$\rho = \frac{k}{r^2} \quad (a \leq r \leq b)$$

Iniciamos definiendo nuestro sistema de coordenadas, para este caso lo más adecuado es sitúar el origen en el centro del casquete



Gracias a la simetría del sistema, este problema puede ser resuelto mediante la Ley de Gauss, pero primero debemos justificar su uso.
Pensemos en un punto *P* en el exterior del casquete



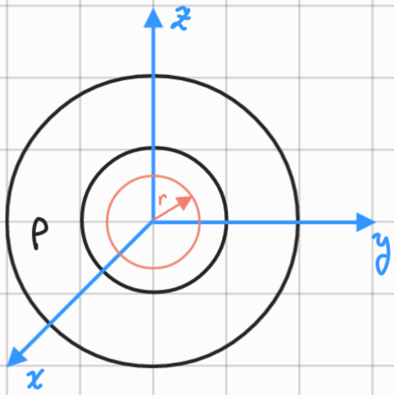
dado que la densidad de carga depende únicamente de *r*, para cada contribución que venga desde algún punto del casquete, existirá su contraparte que anulará las componentes del campo en $\hat{\varphi}$ y $\hat{\theta}$, de forma que este únicamente tendrá una componente en $\hat{r}$. Por otro lado, la intensidad del campo no podrá depender de las variable angulares φ y θ, pues como dijimos, la densidad de carga depende solo de *r*, de todo esto se deduce que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

Este análisis se puede extender de forma análoga para puntos al interior del casquete.

Ahora ya podemos usar la Ley de Gauss. Resolveremos el campo desde adentro hacia afuera.

Empezamos dibujando una superficie esférica imaginaria S de radio $r < a$ centrada en el origen



ahora aplicamos la Ley de Gauss en su forma integral

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Resolvamos primero el lado izquierdo. El diferencial de superficie para una esfera es

$$d\vec{S} = \hat{r}\, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \qquad \text{donde } \varphi \in [0, 2\pi) \text{ y } \theta \in [0, \pi]$$

$$\therefore \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{E} \cdot \hat{r}\, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

De los argumentos de simetría dedujimos que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

Reemplazando

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E(r) \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_{=1} \underbrace{r^2}_{\text{cte. respecto de } \varphi \text{ y } \theta} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

Como $E(r)$ no depende de φ ni θ, podemos sacarlo de integral

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) r^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

*Nota:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 4\pi$$

Esta integral aparecerá varias veces, así que es bueno que se la aprendan de memoria.

$$\Rightarrow \boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r) r^2 4\pi}$$

Ahora vamos con el lado derecho de la Ley de Gauss.
Notemos en este caso que la carga que encierra nuestra superficie es 0, pues dentro del casquete no hay carga, por lo tanto tenemos que

$$\boxed{Q_{enc} = 0}$$

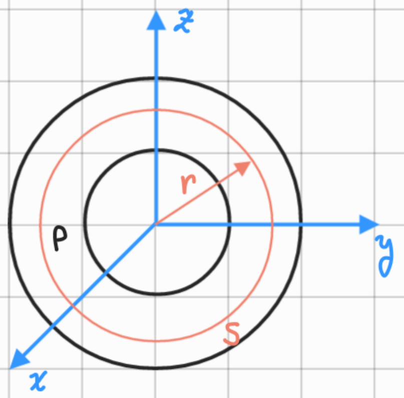
Igualando

$$4\pi r^2 E(r) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0} \qquad r < a$$

El campo eléctrico al interior del casquete es nulo.

Ahora resolvamos para la zona intermedia.
Para este caso la superficie imginaria tendrá un radio $r \in [a, b)$



El lado izquierdo de la Ley de Gauss se calcula de la misma manera que en el caso anterior, por lo que

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)}$$

Ahora calculamos el lado derecho.
Notemos que la carga es variable con respecto al radio, por lo que la carga encerrada de carga la calcularemos como

$$Q_{enc} = \int_{V'} \rho(r')\, dV'$$

El diferencial de volumen en coordenadas esféricas es

$$dV = r'^2 \sin\theta'\, dr'\, d\varphi'\, d\theta'$$

Por otro lado, tenemos que la densidad de carga solo existe para $a \leq r \leq b$ y como nuestra superficie tiene radio *r*, la integral sobre *r'* irá entre *a* y *r*. Además el cascarón está completo angularmente, por lo que

$$\varphi' \in [0, 2\pi) \qquad y \qquad \theta' \in [0, \pi]$$

Así entonces

$$Q_{enc} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{r} \frac{k}{\cancel{r'^2}} \cancel{r'^2} \sin\theta'\, dr'\, d\varphi'\, d\theta'$$

$$= k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{r} \sin\theta'\, dr'\, d\varphi'\, d\theta'$$

$$= 4\pi k\, r'\Big|_a^{r}$$

$$\boxed{Q_{enc} = 4\pi k (r-a)}$$

Igualando ambos lados de la Ley de Gauss

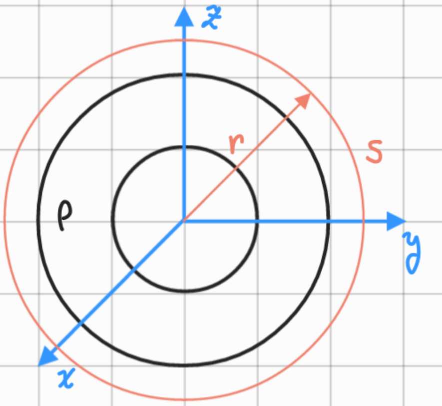
$$\cancel{4\pi} r^2 E(r) = \frac{4\pi k(r-a)}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r^2}$$

Finalmente, por los argumentos de simetría concluimos que **E** apunta en $\hat{r}$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r}} \qquad r \in [a,b]$$

Por último, calculamos el campo fuera del cascarón.
Construimos la superficie imaginaria ahora con un radio *r* < *b*



Nuevamente el lado izquierdo de la Ley de Gauss se calcula de manera análoga a la primera parte

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)}$$

Ahora para el lado derecho calculamos la carga encerrada.
Recordemos que la carga solo está en $a \leq r \leq b$, y para este caso *r* > *b*, por lo que los limites de la integral en *r'* serán *a* y *b*. Por lo tanto:

$$Q_{enc} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^b \frac{k}{\cancel{r'^2}}\cancel{r'^2} \sin\theta' \, dr' \, d\varphi' \, d\theta'$$

$$Q_{enc} = 4\pi k(b-a)$$

Igualando ambos lados de la Ley de Gauss

$$\cancel{4\pi} r^2 E(r) = \frac{\cancel{4\pi} k(b-a)}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{k(b-a)}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r}} \qquad r > b$$

Donde otra vez se usan los argumentos de simetría para concluir que el campo apunta en $\hat{r}$.

b)

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r \in [a, 2a] \\ \dfrac{ka}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r > 2a \end{cases}$$