Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2025
Profesor: Ignacio Andrade S.
Auxiliares: Felipe Carrasco & Pablo Guglielmetti.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 4: Ley de Gauss

P1. Flujo
Considere la superficie de un cubo de lado a que es atravesado por un campo eléctrico. Calcular el flujo total de la superficie y el campo eléctrico en cada punto de ésta cuando:

a) El campo de magnitud E es uniforme y normal a una de las caras.

b) El campo de magnitud E es uniforme, tangente al plano que contiene una de las caras y forma un ángulo θ con la normal de una cara adyacente a esta.

c) El campo es el que genera una carga puntual q en el centro del cubo.

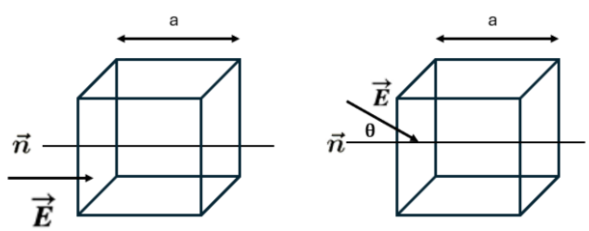

Figura 1

P2. Cascarón grueso.
Si se tiene un cascarón esférico grueso (Figura 1) que posee una densidad de carga $\rho(r) = k/r^2$ para $a \le r \le b$.

a. Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.

b. Grafique $|\vec{E}|$ como función de r para el caso $b = 2a$.

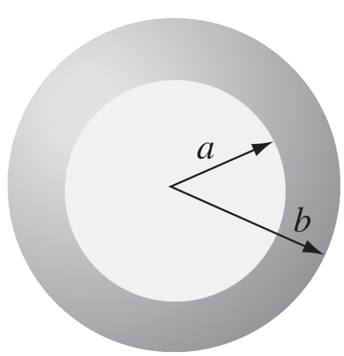

Figura 2: Cascarón grueso cargado.

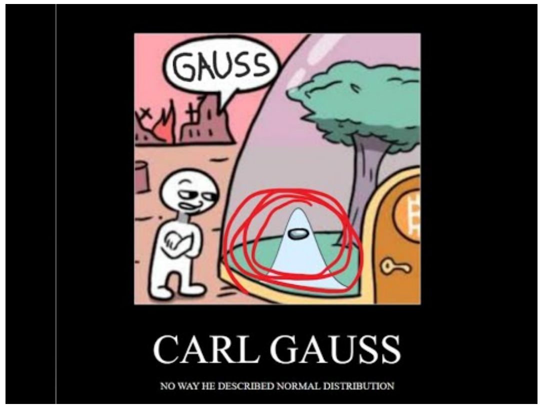

Figura 3: Amogauss.

Resumen

Ley de Gauss y Operadores vectoriales

Operador nabla: Es un operador diferencial vectorial representado por el símbolo ∇ (a veces también anotado como $\vec{\nabla}$). Este puede actuar sobre campos escalares o vectoriales mediante las operaciones correctas. En coordenadas cartesianas puede escribirse como un vector cuyas componentes son las derivadas con respecto a cada coordenada asociada al espacio tridimensional:

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Esta notación puede dar intuición para ciertos cálculos. ¿Recuerdan que en CVV al tomar el gradiente de una función escalar (∇f) obtenían un vector? Bueno, si toman un "vector" ∇ y lo multiplican por un "escalar" f, naturalmente obtienen otro vector:

$$\nabla f = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Divergencia: Es un operador diferencial el cual opera sobre un campo vectorial y devuelve un campo escalar que representa el flujo del campo vectorial a través de un volumen infinitesimalmente pequeño en cada punto del espacio. La divergencia tiene diferentes formas según cada sistema coordenado:

a. Cartesianas: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

b. Cilíndricas: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(F_r r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

c. Esféricas: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(F_r r^2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin\theta)$

Notemos la intuición aquí, al igual que cuando tomamos el producto punto entre dos vectores obtenemos un escalar, si tomamos el producto punto del "vector" ∇ con el "vector" $\vec{F}$, obtenemos un escalar también.

Rotor: Es otro operador diferencial que actúa sobre campo vectoriales, este describe la circulación infinitesimal de un campo vectorial. A diferencia de la divergencia, el rotor de un campo es un vector el cual denota la magnitud y eje de la circulación máxima.
En este caso es más conveniente anotar el rotor como un determinante:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

Aquí h_u, h_v y h_w son los factores de escala asociados al sistema de coordenadas que estemos usando. Los casos útiles son:

a. Cartesianas: $h_x = h_y = h_z = 1$.

b. Cilíndricas: $h_r = 1$, $h_\varphi = r$ y $h_z = 1$.

c. Esféricas: $h_r = 1$, $h_\varphi = r\sin\theta$ y $h_\theta = r$.

Nuevamente podemos ver la intuición, cuando tomamos el producto cruz de dos vectores obtenemos un vector, por lo que si tomamos el producto cruz de ∇ con $\vec{F}$ también obtenemos un vector.

Resumen

Teorema de la divergencia o Teorema de Gauss: Indica que la integral de flujo de un campo vectorial $\vec{F}$ a través de una superficie cerrada ∂V es igual a la integral de volumen de la divergencia de dicho campo sobre el volumen V encerrado por aquella superficie.

$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

Teorema del Rotor o de Teorema de Stokes: Dice que, dado un campo vectorial $\vec{F}$, la integral de trabajo a lo largo de una curva cerrada simple ∂S es igual a la integral de flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de la superficie S cuyo borde es ∂S:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Ley de Gauss: Establece una relación entre el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada (∂V) correspondiente a la frontera del volumen V, y la carga contenida dentro de este (Q_{enc}), tal que:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{anc}}{\varepsilon_0}$$

En caso de no conocer la carga encerrada, pero si la densidad presente, se puede calcular Q_{enc} como sigue:

$$Q_{enc} = \int_V \rho dV = \int_S \sigma dS = \int_l \lambda dl$$

Mediante el Teorema de Gauss, se puede llegar a la forma diferencial de la Ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

Nota: La Ley de Gauss se cumple siempre, sin embargo, para que esta sea de utilidad al determinar un campo eléctrico, es necesario que exista alguna **simetría**. Los casos con simetría más comunes son:

a. Plano o bloque "delgado" infinito.

b. Cable o cilindro infinito.

c. Esfera con densidad de carga dependiente de únicamente de r.

Otros casos no tan evidentes pueden ser:

a. Distribuciones infinitas con simetría axial: $\rho(\vec{r}) = \rho(z)$ (la densidad de carga varía únicamente en un eje, no depende de x ni y).

b. Distribuciones radiales: $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ (la densidad de carga varía con r únicamente).

Datazo: Las distribuciones de carga infinitas (cables, planos, cilindros infinitos) no existen en el mundo real, pero son aproximaciones útiles en ciertos casos. Pensemos en los cables de una línea de transmisión, de cerca el cable de 100 metros puede parecer infinito; o si estamos desviando electrones en un laboratorio, dos placas de 20×20 cm separadas 1 milímetro son efectivamente infinitas.