

Pauta aux 1

1) Para calcular la carga total de un cuerpo sumamos cada parte infinitesimal donde hay densidad de carga:

Densidad de carga:

Lineal: $\lambda = \frac{dQ}{dl} \Rightarrow Q = \int \lambda dl$ [dl diferencial de línea]

Superficial: $\sigma = \frac{dQ}{dA} \Rightarrow Q = \iint \sigma dA$ [dA diferencial de superficie]

Volumétrica: $\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow Q = \iiint \rho dV$ [dV diferencial de Volumen]

Estos diferenciales varían según el sistema de coordenadas que estemos usando

	cartesianos	cilíndricas	esféricas
dl	dx, dy, dz	$dz, dr, r d\theta$	$dr, r d\theta, r \sin(\theta) d\phi$
dA	$dx dy, dy dz, dz dx$	$dz dr, r d\theta dz, r d\theta dr$	$r d\theta dr, r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi, r \sin(\theta) d\theta dr$
dV	$dx dy dz$	$r d\theta dz dr$	$r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi dr$

En este caso estamos frente una densidad volumétrica. Y claramente nos son convenientes las coor. cilíndricas.

$$\rho(z, r) = 3 \rho_0 r^2 \sqrt{z} \Rightarrow Q = \int \rho(z, r) dV$$

$$Q = \iiint 3 \rho_0 r^2 \sqrt{z} r d\theta dz dr$$

Los límites de integración están dados por la frontera de la región con distribución, en este caso el cilindro:

$$Q = \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} 3 \rho_0 r^2 \sqrt{z} r d\theta dz dr$$

Ahora resolvemos las integrales en el orden que mas nos acomode.

$$Q = 3 \rho_0 \int_0^R \int_0^h \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} r^3 \sqrt{z} dz dr$$

$$= 6 \rho_0 \pi \int_0^R \int_0^h \sqrt{z} dz r^3 dr$$

$$Q = 6 \epsilon_0 \pi \left(\frac{2}{3}\right) h^{3/2} \int_0^R r^3 dr$$

$$Q = 4 \epsilon_0 \pi h^{3/2} \frac{1}{4} R^4$$

$$Q = \epsilon_0 \pi h^{3/2} R^4$$

P2. Para calcular campo usaremos la forma integral de Culomb:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

donde: dq es la parte infinitesimal de carga que produce campo

$$dq = \lambda dl \text{ o } \sigma dA \text{ o } \rho dV$$

$\vec{r}$ es la posición la cual se quiere conocer el campo. el argumento de $E(\vec{r})$

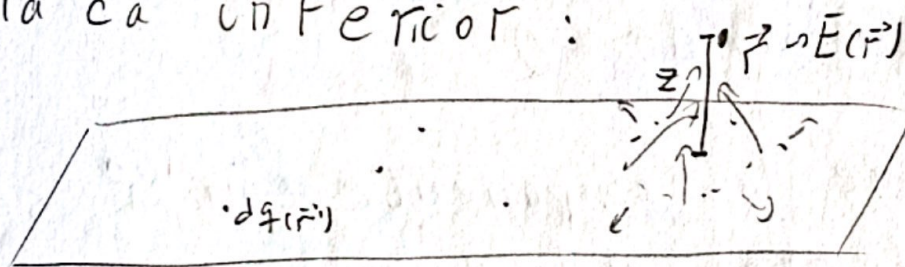
$\vec{r}'$: la posición de cada $dq(\vec{r}')$

Notemos que $\vec{E}$ es una magnitud vectorial y la componente vectorial de la fórmula te la da $(\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow$ que es un vector.

Para estudiar el problema estudiaremos el campo de cada cuerpo por separado para luego usar el principio de superposición.

Los cuerpos serán:

- Placa inferior infinita ($+\sigma$)
- Placa superior infinita ($+2\sigma$)
- Agujero que se modelara como un disco de radio R de densidad (-2σ) lo cual anula la carga de la placa superior.
- Placa inferior:



Al ser infinita podemos decir que nuestra única referencia es la distancia z a esta.

Usaremos coordenadas cilíndricas considerando la placa como una base infinita $dA = r dr d\theta$

$$\vec{r} = z \hat{z}$$

$$dQ(\vec{r}') = \sigma dA = \sigma r dr d\theta$$

$$\vec{r}' = r \hat{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\sigma (z\hat{z} - r\hat{r})}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} r d\theta dr$$

Notemos los límites de integración:

$$dr : 0 \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad d\theta : 0 \rightarrow 2\pi \Rightarrow \text{base infinita.}$$

$\hat{r} = \sin(\theta)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{x}$ por lo que depende de θ . Al integrar $\int_0^{2\pi} \hat{r} d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(\theta)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{x} d\theta$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta = 0$$

Concluimos que la componente con $\hat{r}$ se anula al integrar el $d\theta$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^\infty \frac{z\hat{z}r}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} dr$$

Esta es la clásica integral al hacer Coulomb. se resuelve con cambio de variable

$$u = z^2 + r^2 \Rightarrow \frac{du}{dr} = 2r \Rightarrow dr = \frac{du}{2r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{z\hat{z}r}{u^{3/2}} \frac{du}{2r}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{\sqrt{z^2+0}}^{\sqrt{z^2+\infty^2}} z/2 \hat{z} u^{-3/2} du$$

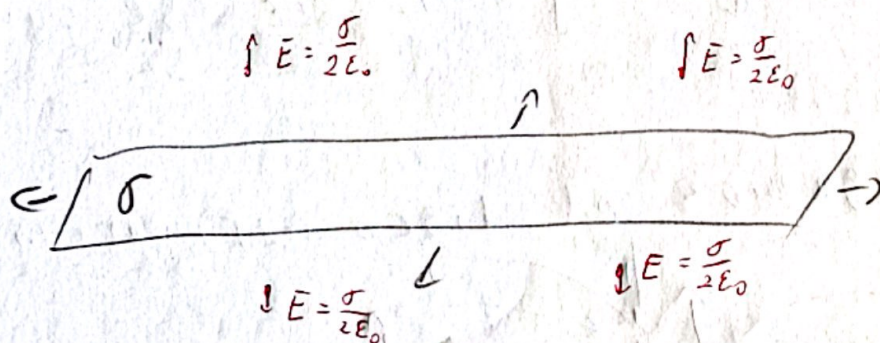
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z/2 (-2) u^{-1/2} \Big|_{z^2}^{\infty} \hat{z}$$

$$= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left(\frac{1}{\sqrt{\infty}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right) \hat{z}$$

$$= \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} z \left(-\frac{1}{z} \right) \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

Notemos que no depende de z , lo que nos dice que el campo es el mismo en todo el semiplano.

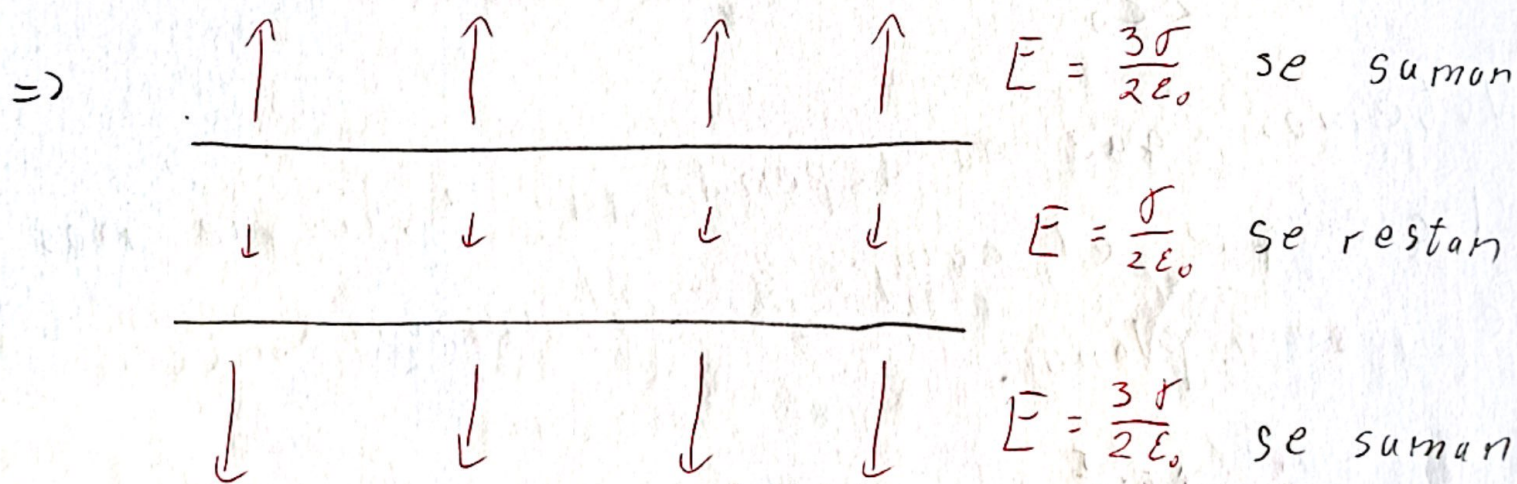
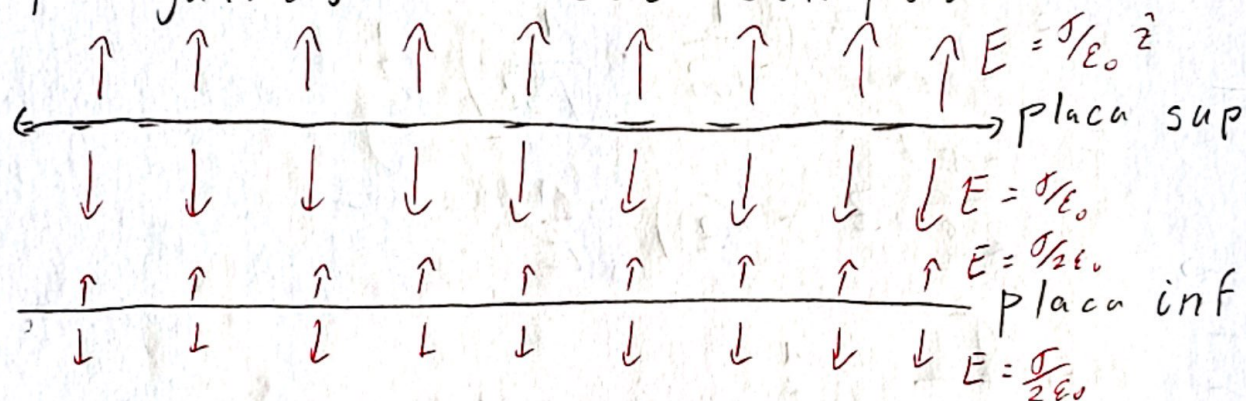


Siempre en dirección normal al plano

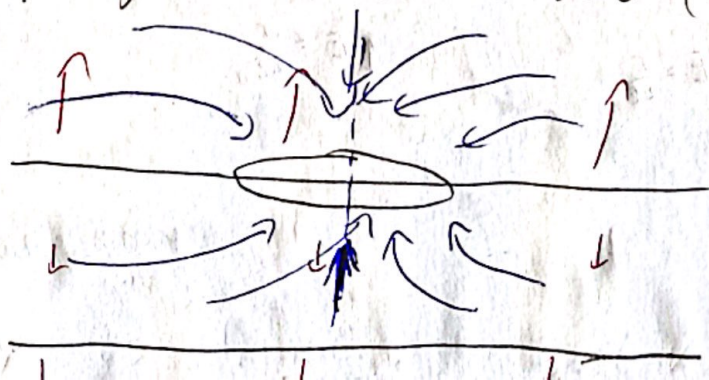
La placa superficial al ser también infinita podemos decir que generará un campo

$$\vec{E}(z) = \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$$

Superpongamos los dos campos



Ahora superpongamos el disco (-2σ) para modelar el agujero:

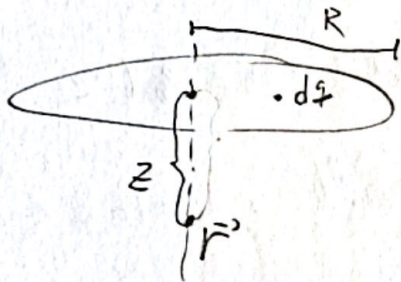


Físicamente podemos darnos cuenta que fuera del eje de simetría del disco, el campo que genere este tendrá componentes tangentes a las placas que no se anularán con los campos de las placas. Así descartamos los puntos que están fuera de el eje.

También podemos razonar que el campo del disco nunca será mayor que al campo opuesto de la placa superior, puesto que la placa superior contiene un disco idéntico y de carga opuesta en misma posición, ADEMÁS del resto de carga INFINITA que también contribuye al campo de la placa.

Por esto la única alternativa para que el campo del disco anule al campo de la placa sup. es que este se vea contrarrestado con el campo de la placa inf. que es lo que ocurre entre las placas.

Ahora calcularemos el campo del disco para encontrar el punto donde se anula con el campo entre placas $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$



$$\vec{r} = z \hat{z}$$

$$d\varphi(\vec{r}') = -2\sigma dA = 2\sigma r' d\theta dr'$$

$$\vec{r}' = r' \hat{r}'$$

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{-2\sigma (z\hat{z} - r'\hat{r}') r' d\theta dr'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

Se anula $\int_0^{2\pi} \hat{r}' d\theta$

$$\vec{E}(z) = \frac{-\sigma 2\pi}{2\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{z\hat{z} r' dr'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

Cambio de variable $u = z^2 + r'^2$

$$\vec{E}(z) = \frac{-\sigma}{\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{z}{2} u^{-1/2} du \hat{z}$$

$$= \frac{-\sigma}{\epsilon_0} \frac{z}{2} (-2) \left(\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right) \hat{z}$$

$$= \frac{-\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right) \hat{z}$$

Es negativo pues el campo apunta hacia el disco

Para que se anule el campo las magnitudes deben ser iguales

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\sqrt{z^2 + R^2} = 2z$$

$$z^2 + R^2 = 4z^2$$

$$4z^2 - z^2 - R^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3z^2 = R^2$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{1}{3} R^2$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} R$$

En el eje de simetría a $\frac{R}{\sqrt{3}}$ unidades por el agujero el campo es nulo.

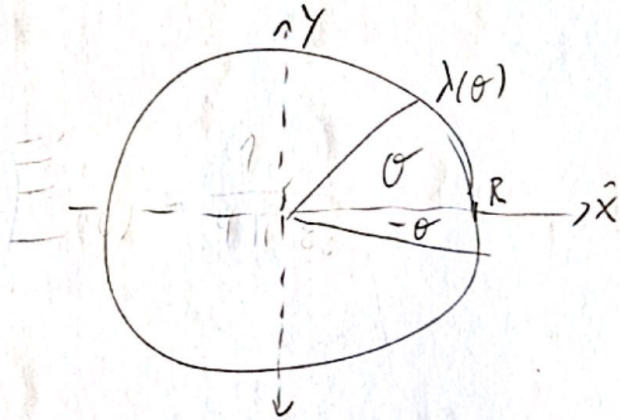
P3) De nuevo usaremos Culomb

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\vec{r} = 0$ el origen

$$dq = \lambda(\theta) R d\theta = q_0 |\theta| \pi R d\theta$$

$$\vec{r}' = R \hat{r} = R (\sin(\theta) \hat{y} + \cos(\theta) \hat{x})$$



$$\vec{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} q_0 |\theta| \pi \frac{(0 - R(\sin(\theta) \hat{y} + \cos(\theta) \hat{x})) R d\theta}{(\sqrt{0 + R^2})^3}$$

$$= \frac{q_0 R^2}{4\epsilon_0 R^3} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |\theta| \sin(\theta) d\theta \hat{y} + \int_{-\pi}^{\pi} |\theta| \cos(\theta) d\theta \hat{x} \right]$$

Para quitarnos el valor absoluto debemos separar la integral entre los limites positivos y los limites negativos.

$$\vec{E}(0) = \frac{-q_0}{4\epsilon_0 R^2} \left[\int_0^\pi \theta \sin(\theta) d\theta \hat{y} + \int_0^\pi \theta \cos(\theta) d\theta \hat{x} - \int_{-\pi}^0 \theta \sin(\theta) d\theta \hat{y} - \int_{-\pi}^0 \theta \cos(\theta) d\theta \hat{x} \right]$$

Resolvamos $\int \theta \sin(\theta) d\theta$ con la vaca.

$$\begin{aligned} \int \theta \sin(\theta) d\theta &= \theta(-\cos(\theta)) - \int (-\cos(\theta)) d\theta \\ &= \sin(\theta) - \theta \cos(\theta) \end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned} \int \theta \cos(\theta) d\theta &= \theta \sin(\theta) - \int \sin(\theta) d\theta \\ &= \theta \sin(\theta) + \cos(\theta) \end{aligned}$$

Con este resultado tenemos:

$$\int_0^\pi \theta \sin(\theta) d\theta = (\sin(\pi) - \pi \cos(\pi)) - (\sin(0) - 0 \cos(0)) = -\pi$$

$$\int_0^\pi \theta \cos(\theta) d\theta = (\pi \sin(\pi) + \cos(\pi)) - (0 \sin(0) + \cos(0)) = -1 - 1 = -2$$

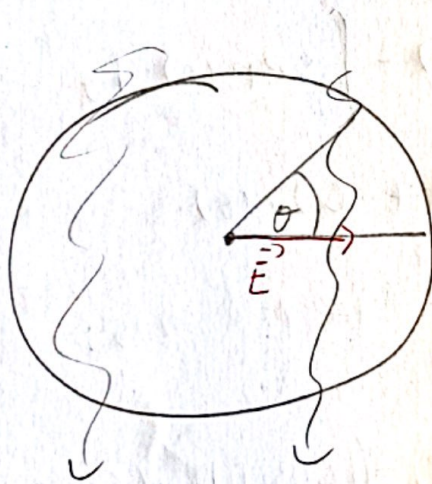
$$\int_{-\pi}^0 \sigma \sin(\theta) d\theta = (\sin(\theta) - 0 \cos(\theta)) - (\sin(-\pi) - -\pi \cos(-\pi)) = -\pi$$

$$\int_{-\pi}^0 \sigma \cos(\theta) d\theta = (0 \sin(\theta) + \cos(\theta)) - (-\pi \sin(-\pi) + \cos(-\pi)) = 1 - 1 = 2$$

Con esto tenemos

$$\vec{E}(0) = \frac{-q_0}{4\epsilon_0 R} [-\pi \hat{y} + -2\hat{x} - -\pi \hat{y} + 2\hat{x}] = 0$$

$$\vec{E}(0) = \frac{q_0}{2\epsilon_0 R} \hat{x}$$



Mas carga

menos
carga.