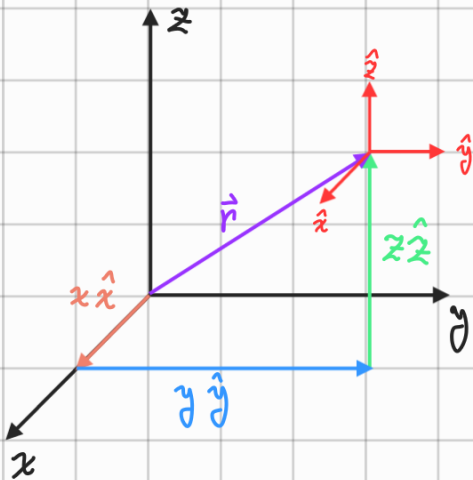


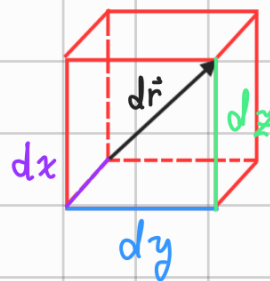
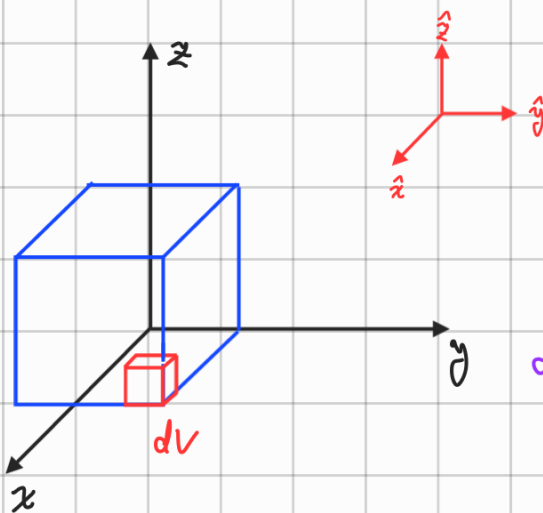
P₁

a) Cartesianas

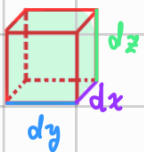


$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Una combinación lineal de los 3 vectores base en el sistema cartesiano nos permite acceder a cualquier punto del espacio.



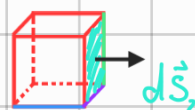
$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$



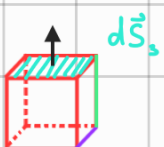
$$dV = dx dy dz$$



$$d\vec{S}_1 = dy dz \hat{x}$$

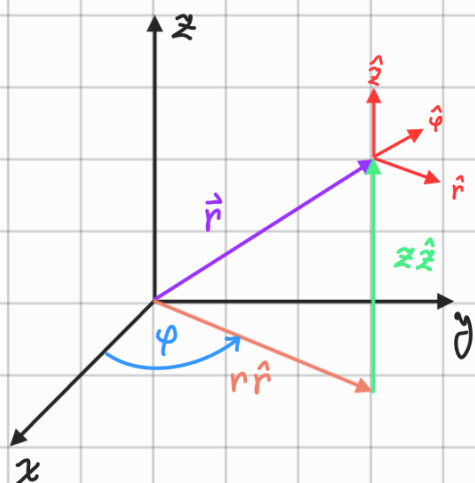


$$d\vec{S}_2 = dx dz \hat{y}$$



$$d\vec{S}_3 = dx dy \hat{z}$$

b) Cilíndricas



$$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$$

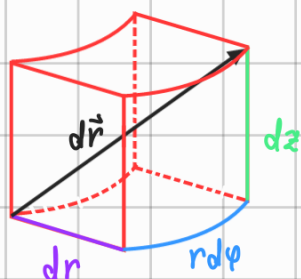
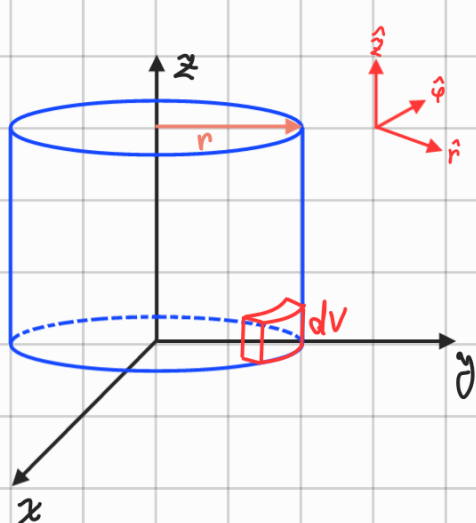
$$r \in (0, \infty)$$

$$\hat{r} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$$

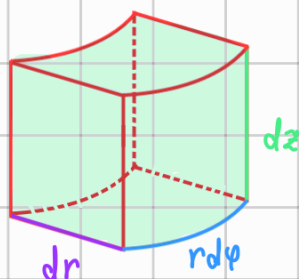
$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

Para este caso solo necesitamos una combinación lineal de los vectores $\hat{r}$ y $\hat{z}$ para acceder a cualquier punto. Dado que $\hat{r}$ tiene dependencia de φ , al ir variando este ángulo el vector $\hat{r}$ va dando vueltas.

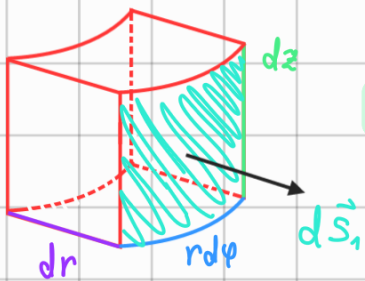


$$d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\varphi \hat{\varphi} + dz\hat{z}$$

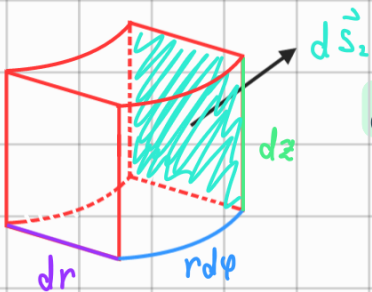


$$dV = r dr d\varphi dz$$

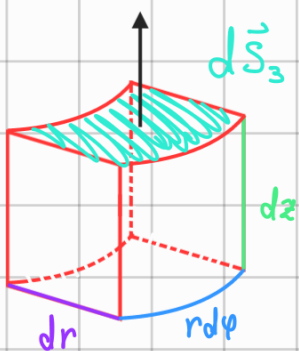
Debemos recordar que aquí estamos tomando pedacitos infinitesimalmente pequeños de un cilindro, de modo que la figura de arriba es efectivamente un cubo, por lo que el diferencial de volumen (dV) es simplemente lado*lado*lado; similarmente los diferenciales de superficie (dS) serán lado*lado. El dibujo se ve arqueado solo para ayudar con la visualización.



$$d\vec{S}_1 = r d\varphi dz \hat{z}$$

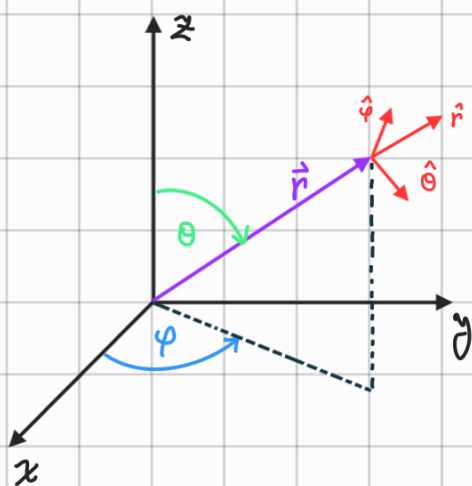


$$d\vec{S}_2 = dr dz \hat{\varphi}$$



$$d\vec{S}_3 = r dr d\varphi \hat{z}$$

c) Esféricas

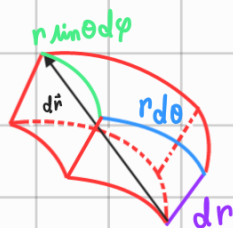
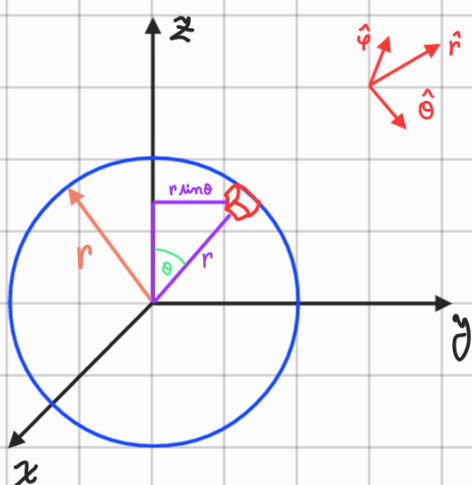


$$\vec{r} = r \hat{r} \quad r \in (0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi) \text{ y } \theta \in [0, \pi]$$

$$\hat{r} = \cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

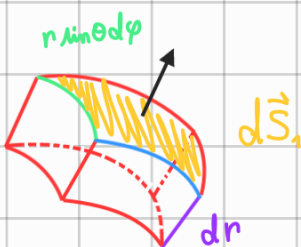
$$\hat{\theta} = \cos \varphi \cos \theta \hat{x} + \sin \varphi \cos \theta \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$$



$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r \sin \theta d\varphi \hat{\varphi} + r d\theta \hat{\theta}$$



$$dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$



$$d\vec{S}_1 = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \hat{r}$$



$$d\vec{S}_2 = r \sin \theta dr d\varphi \hat{\theta}$$



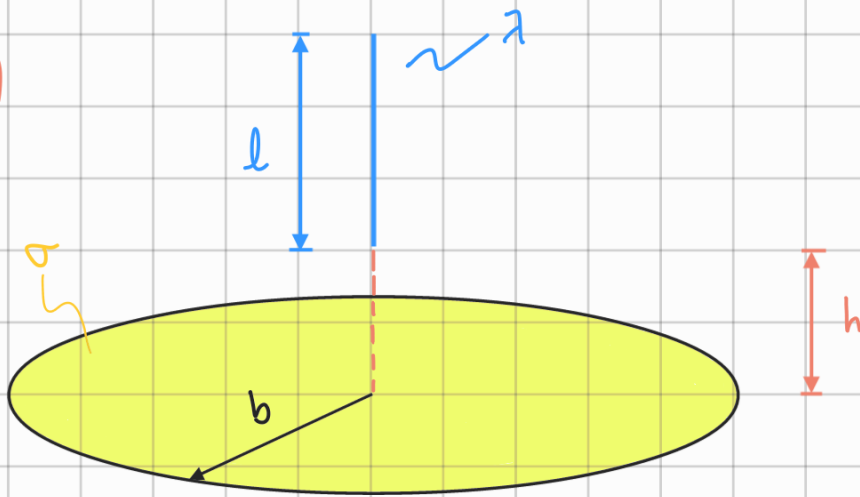
$$d\vec{S}_3 = r dr d\theta \hat{\phi}$$

* Ojo, para las coordenadas esféricas en matemáticas (dim 😞) se intercambian las letras φ y θ . En física (y en este ramo en particular), φ es el ángulo que da la vuelta entera (de 0 a 2π) y θ es el ángulo que cae (de 0 a π). En matemáticas esto es al revés.

Por otro lado, aquí usamos r para la coordenada radial de las coordenadas cilíndricas y esféricas, aunque en otras ocasiones se suele usar la letra ρ para la coordenada radial de cilíndricas. Yo al menos opto por la letra r en ambos casos, ya que ρ se usa para la densidad de carga volumétrica, lo cual puede causar confusión y errores en los cálculos. En algunos textos se usa la letra s para la coordenada radial en cilíndricas, usted puede usar la que quiera mientras sea consistente.

P₂

a)



Para calcular la fuerza sobre el alambre, primero obtendremos el campo eléctrico del disco sobre su eje (lugar donde se encuentra el alambre). Para este caso y dada la geometría, lo más conveniente es usar coordenadas cilíndricas, colocando el origen del sistema en el centro del disco.

Dada esta elección para el sistema de coordenadas, el lugar donde queremos calcular el campo eléctrico (el eje del disco) cae justo sobre el eje z , por tanto:

$$\vec{r} = z \hat{z}$$

Además, nuestra carga se encuentra distribuida sobre el disco de radio b , por lo que esta puede ser parametrizada como:

$$\vec{r}' = r' \hat{r} \quad \text{donde } r' \in [0, b] \quad \leftarrow \text{intervalo donde existe el disco.}$$

De esto sigue que

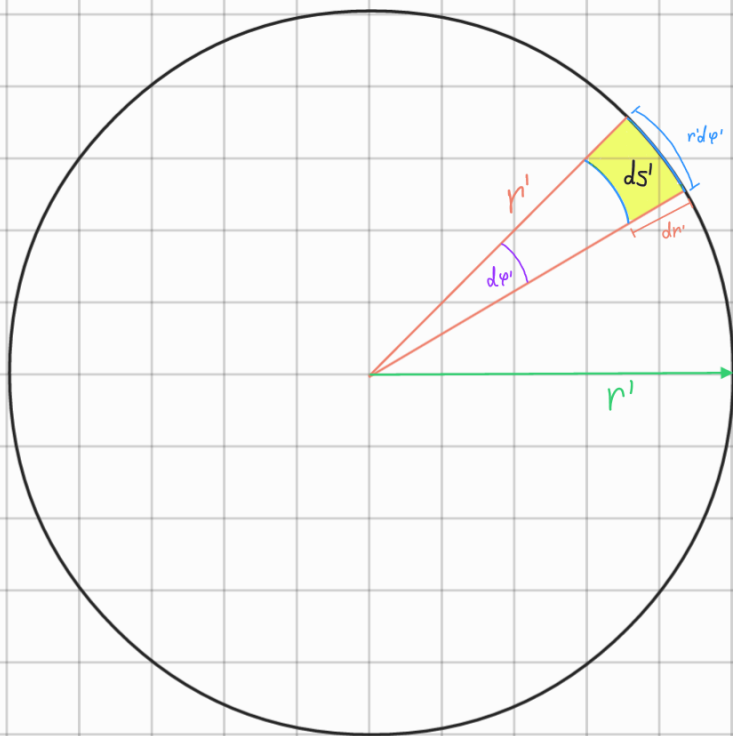
$$\vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - r' \hat{r} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = [z^2 + r'^2]^{1/2} \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = [z^2 + r'^2]^{3/2}$$

Y dado que tenemos un disco completo (que da una vuelta entera) $\varphi \in [0, 2\pi)$

Finalmente, puesto que estamos trabajando con una distribución de carga superficial, nuestro diferencial de carga será

$$dq(\vec{r}') = \sigma dS'$$

Donde dS' corresponde a un elemento de superficie del disco, es decir, un pedacito muy pequeño de la superficie. Este puede ser obtenido de forma geométrica como sigue:



$d\varphi'$ es un ángulo infinitesimal (muy pequeño)

dr' es un trozo infinitesimal de r'

$$\Rightarrow dS' = r' dr' d\varphi'$$

↓
Elemento de
área o diferencial
de superficie.

Así entonces

$$dS' = r' dr' d\varphi'$$

Y al tener un diferencial de superficie, tendremos que resolver una integral de superficie (integral doble). Es decir:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{z\hat{z} - r'\hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} \sigma r' dr' d\varphi' \quad (*)$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{z\hat{z}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi' - \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'\hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi' \right]$$

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{z\hat{z}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi'}_{I_1} - \underbrace{\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'\hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi'}_{I_2}$$

$$I_1 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{\hat{z}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi'$$

$$I_1 = \frac{\sigma \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r' dr' d\varphi'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} ; \quad z \text{ y } \hat{z} \text{ son const. respecto a las variables de integración.}$$

El Teorema de Fubini nos permite escribir esto como

$$I_1 = \frac{\sigma \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'}_{=2\pi} \times \int_0^b \frac{r' dr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} = \frac{\sigma \hat{z}}{2\epsilon_0} \int_0^b \frac{r' dr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}}$$

$$I_1 = \frac{\sigma \hat{z}}{2\epsilon_0} \int_0^b \frac{r' dr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} ; \quad \begin{array}{l} \text{C.V.} \\ u = z^2 + r'^2 \\ du = 2r' dr' \end{array}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\sigma \hat{z}}{2\epsilon_0} \times \frac{-1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \Big|_0^b = \frac{\sigma \hat{z}}{2\epsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \Big|_b^0$$

$$= \frac{\sigma \hat{z}}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right]$$

$$I_1 = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right] \hat{z}$$

$$I_2 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r' \hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\varphi' = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'^2 \hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' d\varphi'$$

Notemos que apesar de que $\hat{r}$ es un vector unitario, no podemos sacarlo de la integral, pues este depende de φ . En coordenadas cilíndricas se cumple que

$$\hat{r} = \cos\varphi' \hat{x} + \sin\varphi' \hat{y}$$

reemplazando en la integral

$$I_2 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'^2 (\cos\varphi' \hat{x} + \sin\varphi' \hat{y})}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' d\varphi'$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'^2 \cos\varphi' \hat{x}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' d\varphi' + \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r'^2 \sin\varphi' \hat{y}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' d\varphi'$$

$$= \frac{\sigma \hat{x}}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi' d\varphi'}_{=0} \times \int_0^b \frac{r'^2 dr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} + \frac{\sigma \hat{y}}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi' d\varphi'}_{=0} \times \int_0^b \frac{r'^2 dr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = 0}$$

$$\therefore \vec{E}_z(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right] \hat{z}$$

Si consideramos $z > 0 \Rightarrow |z| = z$, así:

$$\vec{E}_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \hat{z}$$

Sabemos que para una carga puntual, la fuerza que esta experimenta debido a un campo eléctrico externo es $F = qE$. Pero en este caso tenemos una **distribución continua** de carga, y **no** una carga puntual, por lo que para calcular la fuerza que esta experimenta, tendremos que calcular la fuerza que siente cada pedacito infinitesimalmente pequeño del alambre y sumar todos estos valores, lo cual es equivalente a integrar el campo eléctrico sobre la distribución de carga del alambre, o sea

$$\vec{F} = \int \vec{E} dq$$

Dado que el alambre se ubica sobre el eje z entre h y $h + l$ la integral será

$$\vec{F} = \int_h^{h+l} \vec{E} \lambda dz$$

Y el campo eléctrico externo es el que calculamos anteriormente

$$\vec{F} = \int_h^{h+l} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \hat{z} \lambda dz$$

$$= \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2\epsilon_0} \int_h^{h+l} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) dz$$

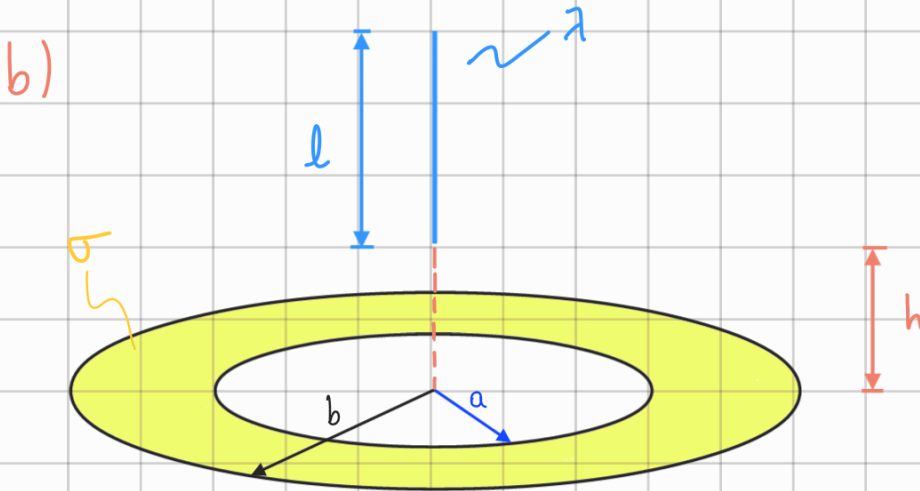
$$= \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2\epsilon_0} \left[\int_h^{h+l} dz - \int_h^{h+l} \frac{z dz}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right]$$

$$\vec{F} = \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2 \epsilon_0} \left[l - \int_h^{h+l} \frac{z \, dz}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right];$$

C.V.
 $u = b^2 + z^2$
 $du = 2z \, dz$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2 \epsilon_0} \left[l - \sqrt{b^2 + z^2} \right]_h^{h+l}$$

$$\vec{F} = \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2 \epsilon_0} \left(l - \sqrt{b^2 + (h+l)^2} + \sqrt{b^2 + h^2} \right)$$



Para este caso, la única diferencia con la parte anterior es que ahora $r' \in [a, b]$ que es el nuevo intervalo en donde existe el disco. Por lo que la integral en r' ahora irá entre a y b . Usando lo que ya sabemos (*)

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{z \hat{z} - r' \hat{r}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} \sigma r' dr' d\varphi'$$

La resolución es igual a la anterior, lo que nos lleva a

$$\vec{E} = \frac{\sigma z \hat{z}}{2 \epsilon_0} \times \frac{-1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \Big|_a^b = \frac{\sigma z \hat{z}}{2 \epsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \Big|_b^a$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \hat{z}$$

$$\vec{F} = \int_h^{h+l} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \hat{z} \lambda dz$$

$$= \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2\epsilon_0} \int_h^{h+l} \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} dz$$

$$= \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2\epsilon_0} \times \left[\sqrt{a^2 + z^2} \Big|_h^{h+l} - \sqrt{b^2 + z^2} \Big|_h^{h+l} \right]$$

$$\vec{F} = \frac{\sigma \lambda \hat{z}}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + (h+l)^2} - \sqrt{a^2 + h^2} - \sqrt{b^2 + (h+l)^2} + \sqrt{b^2 + h^2} \right)$$