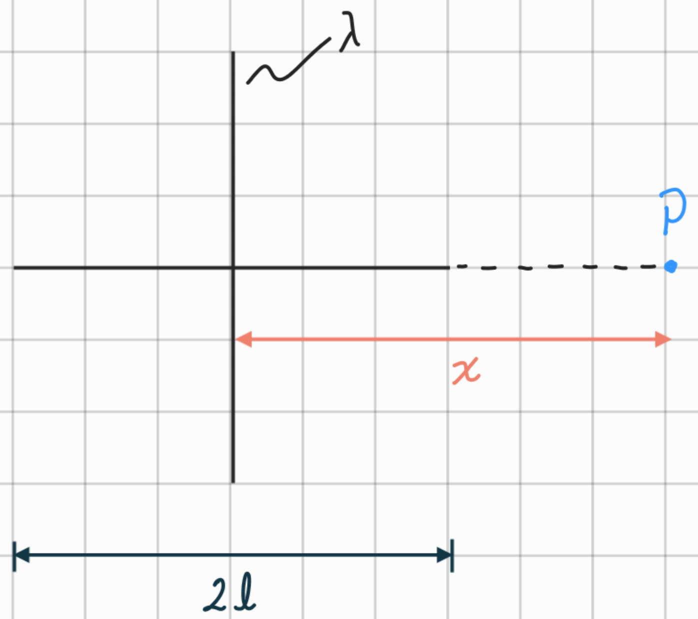
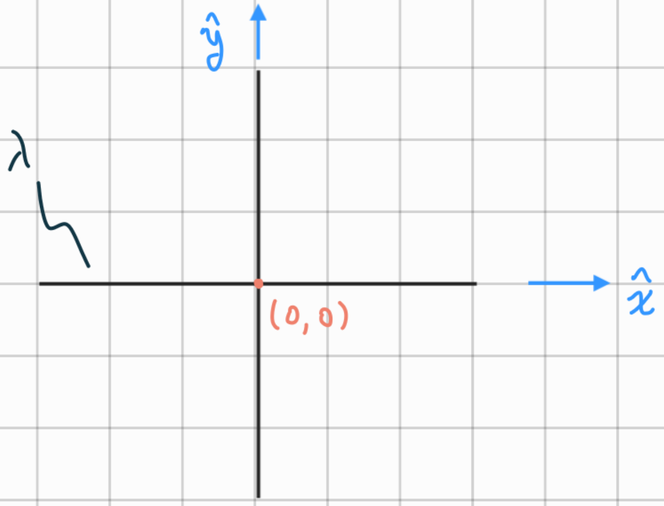
P1



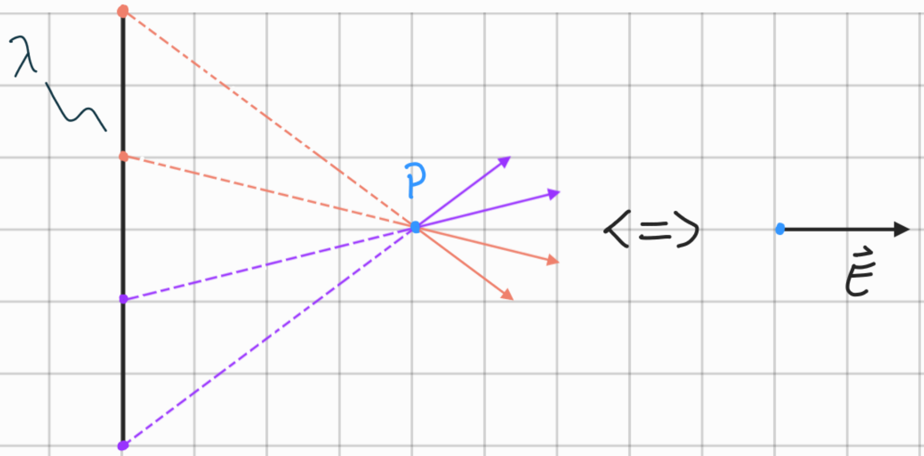
a)

Antes que todo, debemos definir nuestro sistema de referencia. Una buena elección para este caso es colocar el origen del sistema en el centro de la cruz, de manera que $\hat{x}$ apunta hacia la derecha de la hoja, e $\hat{y}$ apunta hacia arriba:



Ahora resolveremos utilizando el principio de superposición, es decir, trataremos el sistema como si existieran 2 alambres distintos, uno vertical y otro horizontal, los cuales forman la cruz. De esta manera, el campo total será la suma de los campos generados por cada alambre.

Pensemos en el alambre vertical ¿En que sentido debería apuntar el campo eléctrico generado por este en nuestro punto de interés?
Aquí podemos pensar en el aporte que hace cada sección infinitesimalmente pequeña del alambre sobre el punto.



Podemos notar que cada sección del alambre que se encuentre por sobre el punto aporta un campo eléctrico que apunta hacia la derecha y abajo (flechas naranjas), mientras que cada sección que se encuentra debajo del punto aporta un campo que apunta hacia la derecha y arriba (flechas moradas). Como nuestro punto se encuentra en el medio del cable, tendremos que por cada flecha naranja existirá una flecha morada, de modo que los aportes de los campos que apuntan hacia arriba y hacia abajo se cancelarán, quedando únicamente la componente que apunta hacia la derecha (flecha negra), para nuestro sistema de referencia esto es $\hat{x}$.

Ahora vamos con el alambre horizontal, otra vez podemos pensar en el aporte que hace cada sección de este, sin embargo, debido a que nuestro punto de interés se encuentra alineado con el eje del alambre, es fácil notar que cada punto de este hará un aporte hacia la derecha, de manera que el campo eléctrico que genera el cable horizontal apuntará en $\hat{x}$.

Finalmente, dada que las contribuciones de cada cable apuntan en $\hat{x}$, la suma de estas , i.e., el campo total, también apuntará en la misma dirección.

b)

Como dijimos antes, calcularemos el campo total haciendo uso del Principio de Superposición, por lo que primero calcularemos el campo generado por el alambre vertical.
Para esto, usamos la definición del campo eléctrico para una distribución continua:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dq(\vec{r}\,')$$

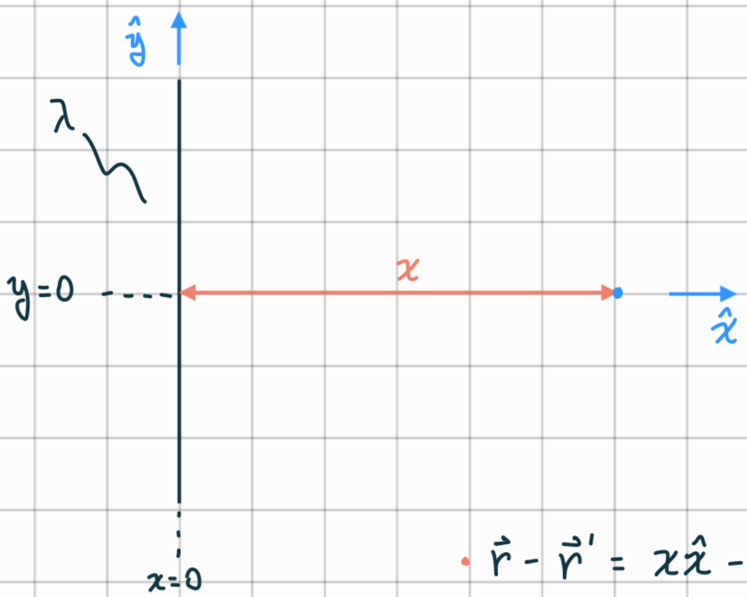
En esta fórmula

$\vec{r}$ es el lugar donde queremos calcular $\vec{E}$.

$\vec{r}\,'$ es el vector que parametriza nuestra distribución se carga, o sea, el vector que nos dice dónde se encuentra la carga que da origen al campo.

$dq(\vec{r}\,')$ es el diferencial de carga, puede pensarse como un "pedacito" infinitesimalmente pequeño de la distribución.

Para una distribución de carga lineal, tenemos que $dq(\vec{r}\,') = \lambda\, dy'$
Esto porque el alambre vertical se encuentra sobre el eje *y* de nuestro sistema de coordenadas. Además tendremos una integral simple, pues el alambre es unidimiensional.



- $\vec{r} = x\hat{x}$
- $\vec{r}\,' = y'\hat{y}$

- $\vec{r} - \vec{r}\,' = x\hat{x} - y'\hat{y}$
- $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \left[x^2 + y'^2\right]^{1/2}$
- $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \left[x^2 + y'^2\right]^{3/2}$

Como el alambre solo existe para $y' \epsilon [-l, l]$, los límites de la integral serán $-l$ y l.

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{x\hat{x} - y\hat{y}}{\left[x^2+y'^2\right]^{3/2}}\lambda\, dy'$$

Ahora solo matraqueamos

cte.

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-l}^{l}\frac{x\hat{x}}{\left[x^2+y'^2\right]^{3/2}}dy' - \int_{-l}^{l}\frac{y'\hat{y}}{\left[x^2+y'^2\right]^{3/2}}dy'\right]$$

Función impar integrada en intervalo simétrico $= 0$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{x\hat{x}}{\left[x^2+y'^2\right]^{3/2}}dy' = \frac{x\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{dy'}{\left[x^2+y'^2\right]^{3/2}};$$

C.V.

$y' = x\, tg(u)$

$dy' = x\, sec^2(u)$

$$\vec{E}_1 = \frac{x\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{-l}^{l} = \frac{x\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{l}{x^2\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{l}{x^2\sqrt{x^2+l^2}}\right)$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\cancel{x}\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2l}{x^{\cancel{2}}\sqrt{x^2+l^2}}$$

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2l\lambda}{x\sqrt{x^2+l^2}}\hat{x}}$$

Ahora calculamos el campo generado por el alambre horizontal

- $\vec{r} = x\hat{x}$ - $\vec{r}' = x'\hat{x}$ - $\vec{r} - \vec{r}' = (x - x')\hat{x}$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2} = |x - x'|$$

Dado que $x' \in [-l, l]$ y $x > l \Rightarrow x - x' > 0$

$\therefore$ - $|\vec{r} - \vec{r}'| = x - x'$

- $|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (x - x')^3$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l} \frac{(x - x')\hat{x}}{(x - x')^3}\lambda\, dx' = \frac{\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l} \frac{\cancel{(x - x')}}{(x - x')^{\cancel{3}\,2}}\, dx'$$

$$= \frac{\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l} \frac{dx'}{(x - x')^2} \; ; \quad \text{C.V.} \; u = x - x', \; du = -dx' \rightarrow K\int_{-l}^{l} \frac{-du}{u^2} = -K\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_{-l}^{l}$$

$$= K\,\frac{1}{u}\Big|_{-l}^{l}$$

$$= K\,\frac{1}{x - x'}\Big|_{-l}^{l}$$

$$= \frac{\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{x - x'}\Big|_{-l}^{l} = \frac{\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x - l} - \frac{1}{x + l}\right]$$

$$= \frac{\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\cancel{x} + l) - (\cancel{x} - l)}{(x - l)(x + l)}\right] = \frac{\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2l}{x^2 - l^2}$$

$$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2l\lambda}{(x^2 - l^2)}\,\hat{x}}$$

Notemos que tal como dedujimos en la primera parte, ambos campos apuntan en $\hat{x}$.

Finalmente, en virtud del principio de superposición, el campo total será la suma del campo generado por cada alambre, o sea:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2l\lambda}{x\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{2l\lambda}{(x^2-l^2)}\right]\hat{x}$$

Definiendo $q \equiv 4l\lambda$ (carga total presente en la cruz)

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{2x\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{q}{2(x^2-l^2)}\right]\hat{x}}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q^2}{x\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{q^2}{(x^2-l^2)}\right]\hat{x}}$$

c) $x \gg l$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{2x\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{q}{2(x^2-l^2)}\right]\hat{x}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{2x\sqrt{x^2(1+l^2/x^2)}} + \frac{q}{2x^2(1-l^2/x^2)}\right]\hat{x}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{2x^2\sqrt{1+(l/x)^2}} + \frac{q}{2x^2\left[1-(l/x)^2\right]}\right]\hat{x}$$

$$x \gg l \Rightarrow (l/x)^2 \approx 0$$

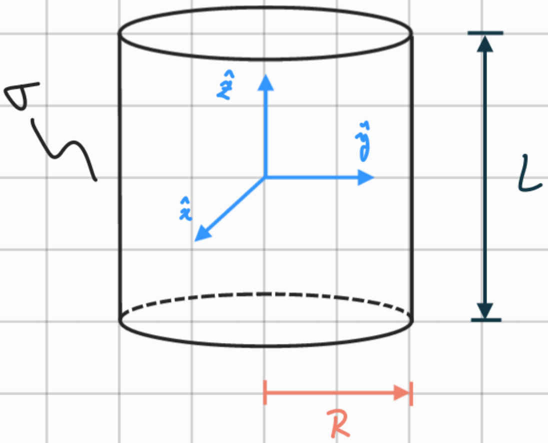
$$\therefore \quad \vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{2x^2} + \frac{q}{2x^2}\right]\hat{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\cancel{2}q}{\cancel{2}x^2}\right]\hat{x}$$

$$\boxed{\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}\hat{x}}$$

Para $x \gg l$ el campo eléctrico se aproxima al de una carga puntual.

P2

Empezamos por ubicar el origen de nuestro sistema de coordenadas, para este caso conviene colocarlo justo en el centro del cilindro



Ahora debemos encontrar $\vec{r}$, $\vec{r}'$ y *dq*.

Como estamos trabajando con un cilindro, la elección más natural para el sistema de coordenadas es cilíndricas.

Notemos que se nos pide calcular el campo eléctrico en el eje de simetría del cilindro, el cual es una línea vertical que pasa justo por el centro de este, la cual coincide con el eje *z*, por lo tanto

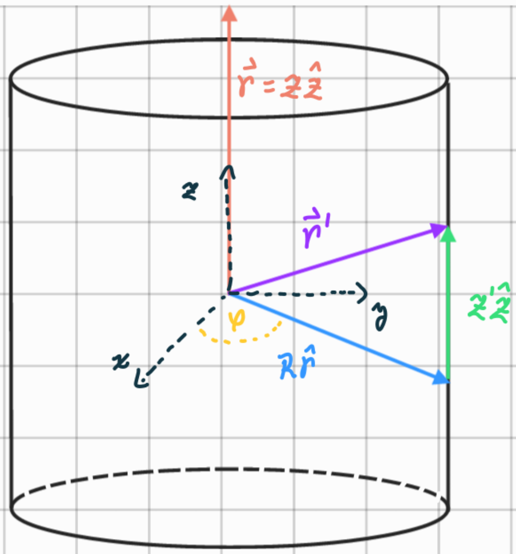
$$\vec{r} = z\hat{z}$$

Ahora queremos ubicar nuestra carga eléctrica. Como esta se encuentra en un cascarón cilíndrico de radio *R* el cual se extiende hacia arriba y hacia abajo tenemos que

$$\vec{r}' = R\hat{r}' + z'\hat{z} \qquad z' \in [-L/2, L/2]$$

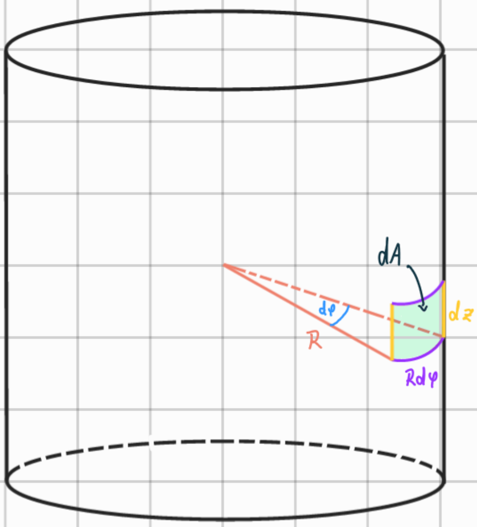
El $R\hat{r}'$ da cuenta de que nuestra carga se encuentra distribuida de forma radial, como en un anillo ubicado a una distancia *R* del origen. El $z'\hat{z}$ nos dice que esta carga además se exitiende hacia arriba y abajo, con límites $z' \in [-L/2, L/2]$

Podemos dibujar estos vectores para visualizar mejor lo que estamos haciendo.



Piensen que el vector azul da vueltas en círculos, mientras que el verde sube y baja. De esta manera, como el vector morado (el $\vec{r}\,'$) es la suma de ambos, este acaba recorriendo todo el manto cilíndrico, o sea que nos va diciendo donde está ubicada la carga eléctrica (o como diría un dim, nos parametriza la superficie 🤓).

Ahora nos falta el diferencial de carga *dq*, recordemos que esto es solo un pedacito muy chico de carga. Como tenemos que nuestro cilindro tiene densidad de carga **superficial** σ, un pedacito de carga *dq* será igual a la densidad de carga por un pedacito de área *dA*, es decir $dq = \sigma dA$.



Para encontrar un pedacito del área (la parte verdosa) de este cascarón cilíndrico, primero tomamos un pedacito de su perímetro el cual vale $Rd\varphi$, y como *dA* es infinitesimalmente pequeño, este simplemente será un cuadrado, por lo que para calcularlo solo debemos multiplicar este pedacito del perímetro ($Rd\varphi$) por un pedacito de altura dz.

De esta manera ***dA* = *Rdφdz***. Por lo tanto

- $dq = \sigma R\, d\varphi' dz'$

- $\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - R\hat{r}' - z'\hat{z} = (z - z')\hat{z} - R\hat{r}'$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \left\{ \left[(z - z')\hat{z} - R\hat{r}'\right] \underset{\text{Producto punto}}{\cdot} \left[(z - z')\hat{z} - R\hat{r}'\right] \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ (z - z')^2 \underbrace{\hat{z}\cdot\hat{z}}_{=1} - (z - z')R \underbrace{\hat{z}\cdot\hat{r}'}_{=0} - (z - z')R \underbrace{\hat{r}'\cdot\hat{z}}_{=0} + R^2 \underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1} \right\}^{1/2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \left[(z - z')^2 + R^2\right]^{1/2} \Rightarrow - \; |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \left[(z - z')^2 + R^2\right]^{3/2}$$

Ahora ya tenemos todo los que necesitamos para resolver el problema, solo debemos reemplazar en la definición del campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, dq(\vec{r}')$$

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \frac{(z - z')\hat{z} - R\hat{r}'}{\left[(z - z')^2 + R^2\right]^{3/2}}\, \sigma R\, d\varphi' dz'$$

Como tenemos un cilindro completo (que da toda la vuelta), la integraaaaaaaaaal en *φ* se hace entre 0 y 2π

$$\vec{E}(z)=\frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{(z-z')\hat{z}-R\hat{r}'}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}}\,d\varphi' dz'$$

$$\vec{E}=\underbrace{\frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{(z-z')\hat{z}}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}}\,d\varphi' dz'}_{I_1}-\underbrace{\frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{R\hat{r}'}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}}\,d\varphi' dz'}_{I_2}$$

$$I_1=\frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{(z-z')\hat{z}}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}}\,d\varphi' dz'$$

$$I_1=\frac{\sigma R\hat{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{(z-z')}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}}\,d\varphi' dz'$$

El Teorema de Fubini (materia de CVV) nos permite separar esta integral en una multiplicación de dos integrales como sigue

$$I_1=\frac{\sigma R\hat{z}}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{=2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{(z-z')}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}}\,dz'$$

$$I_1=\frac{\sigma R\hat{z}}{\cancel{4\pi}_{2}\,\epsilon_0}\,\cancel{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{z-z'}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}}\,dz'$$

C.V.

$u=(z-z')^2+R$

$du=-2(z-z')\,dz'$

$dz'=\dfrac{-du}{2(z-z')}$

$$I_1 = \frac{\sigma R \hat{z}}{2\varepsilon_0} \int_a^b \frac{\cancel{(z-z')}}{u^{3/2}} \left(\frac{-du}{2\cancel{(z-z')}} \right) = \frac{-\sigma R \hat{z}}{4\varepsilon_0} \int_a^b \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{+\sigma R \hat{z}}{\cancel{4}_{2}\varepsilon_0} \left(\frac{\cancel{+2}}{\sqrt{u}} \right) \Bigg|_a^b$$

$$I_1 = \frac{\sigma R \hat{z}}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(z-z') - R}} \Bigg|_{-L/2}^{L/2}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{\sigma R \hat{z}}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(z - L/2)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z + L/2)^2 + R^2}} \right)}$$

$$I_2 = \frac{\sigma R}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \frac{R \hat{r}'}{\left[(z-z')^2 + R^2 \right]^{3/2}} d\varphi' dz' = \frac{\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \frac{\hat{r}'}{\left[(z-z')^2 + R^2 \right]^{3/2}} d\varphi' dz'$$

Un error común (me pasó xd) aquí es intentar sacar el $\hat{r}'$ fuera de la integral, sin embargo, este vector unitario depende de φ pues en coordenadas cilíndricas este tiene la siguiente forma

$$\hat{r} = \cos\varphi \, \hat{x} + \sin\varphi \, \hat{y}$$

por lo cual **no** puede ser sacado de la integral. Lo que hay que hacer en este caso es simplemente "abrir" el vector unitario e integrar

$$I_2 = \frac{\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \frac{\cos\varphi' \hat{x} + \sin\varphi' \hat{y}}{\left[(z-z')^2 + R^2 \right]^{3/2}} d\varphi' dz'$$

$$I_2 = \frac{\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\cos\varphi'\,\hat{x}}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}}\,d\varphi' dz' + \frac{\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\sin\varphi'\,\hat{y}}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}}\,d\varphi' dz'$$

Por Fubini

$$I_2 = \frac{\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0}\hat{x}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\,d\varphi'}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz'}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}} + \frac{\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0}\hat{y}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\,d\varphi'}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz'}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}}$$

Pero la integral del coseno y el seno entre 0 y 2π es 0, es decir

$$\boxed{I_2 = 0}$$

$\therefore$

$$\boxed{\vec{E}(z) = \frac{\sigma R\hat{z}}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-L/2)^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+L/2)^2+R^2}}\right)}$$