Auxiliar#24 : Preparación Exámen

Profesora: Claudia Scóccola
Auxiliar: José Mondaca, Claudio Muena
Ayudante: Matías Zuñiga

P1 Disco con Agujero

Un disco de masa M y radio R puede girar libremente en presencia de gravedad, entorno al eje x (horizontal) del sistema coordinado definido por los ejes x, y y z. Si se hace un agujero circular de radio R/2 en el disco, justo por encima del eje x:

a) Encuentre la matriz de inercia del sólido en el sistema de referencia el cual rota con el sólido.

b) Si el disco gira con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega\hat{x}$, encuentre el momentum angular $\vec{L}$ del sistema.

c) Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema ($\theta << 1$)

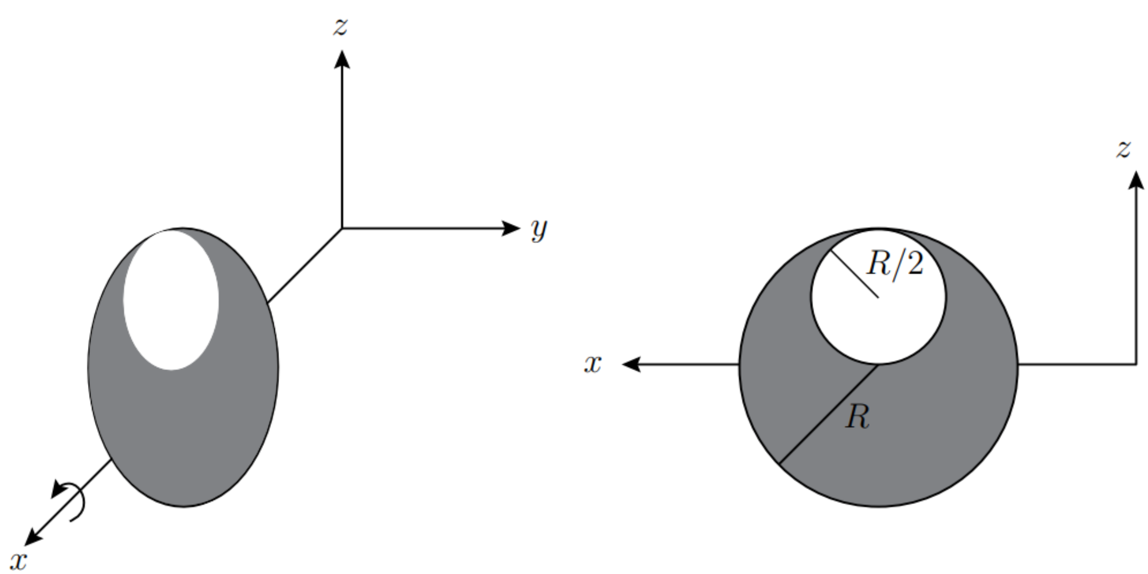

Figura 1: Disco de masa M con agujero de radio R/2

P2 Escalera

Una barra homogénea de largo L y masa M resbala apoyada en una pared lisa y un piso horizontal, también liso (ver figura).

a) Encuentre el Lagrangiano de la barra en función de θ y $\dot{\theta}$.

b) Obtenga las ecuaciones de movimiento, luego integre sus ecuaciones y obtenga $\dot{\theta}$ en función de θ. Considere que inicialmente $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = \theta_0$.

c) Calcule la aceleración horizontal del centro de masas $\ddot{x}$ y encuentre el punto para el cual el extremo superior de la barra deja de tener contacto con la pared.

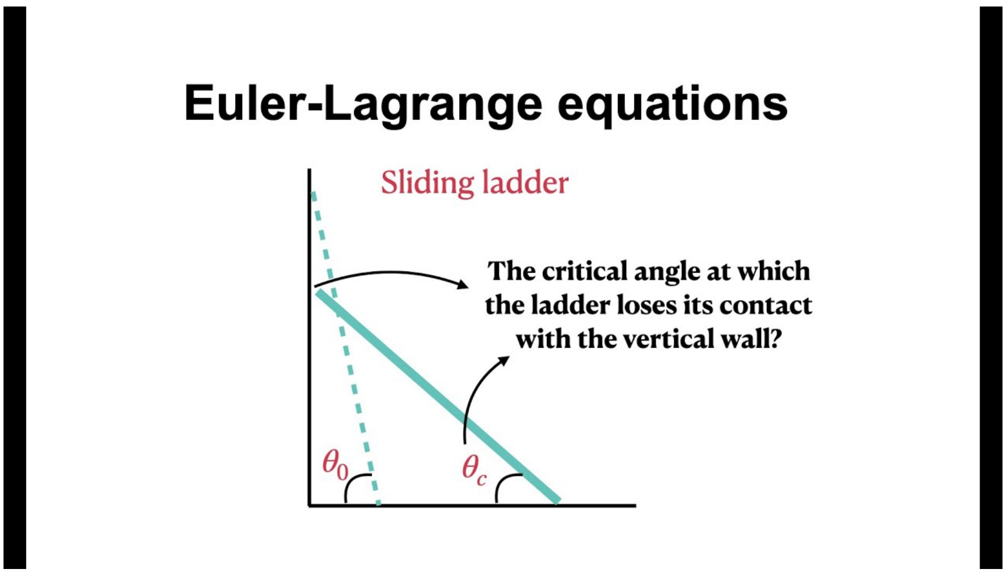

Figura 2: Escalera

3. Resumen

3.1. Matriz de Inercia

Si el vector posición de la i-ésima partícula es de la forma $\vec{r_i}' = x_i'\hat{i}' + y_i'\hat{j}' + z_i'\hat{k}'$, la matríz de inercia (tensor de inercia) vendrá dada por:

$$I_{\mathcal{O}} \equiv \sum_i m_i \begin{pmatrix} (y_i')^2 + (z_i')^2 & -x_i'y_i' & -x_i'z_i' \\ -y_i'x_i' & (x_i')^2 + (z_i')^2 & -y_i'z_i' \\ -z_i'x_i' & -z_i'y_i' & (x_i')^2 + (y_i')^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

En el caso en que tengamos un sólido rígido continuo tendremos que la matríz será:

$$I_{\mathcal{O}} \equiv \int \begin{pmatrix} (y')^2 + (z')^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & (x')^2 + (z')^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & (x')^2 + (y')^2 \end{pmatrix} dm. \tag{2}$$

Podemos escribir lo anterior de manera más compacta con

$$I_{ij} = \int (r^2\delta_{ij} - r_ir_j)\sigma dA \tag{3}$$

La matríz de inercia resulta importante pues se relaciona con el momentum angular del siguiente modo:

$$\vec{L} = M\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + I_{CM}\vec{\Omega} \tag{4}$$

Por otro lado, si uno de los puntos del sólido siempre está fijo podemos hacer coincidir dicho punto con la posición del centro de masas de tal modo que $\vec{r}_{CM} = \vec{v}_{CM} = 0$

Con lo que obtenemos una relación bastante útil para sólidos que tiene soportes fijos.

$$\vec{L} = I_{\mathcal{O}}\vec{\Omega} \tag{5}$$

3.2. Teorema de Steiner

El teorema de Steiner en su forma mas general viene dado por:

$$I_{O'} = I_{\text{CM}} + M_{\text{tot}} \left[\left\| \vec{r}'_{\text{CM}} \right\|^2 \mathbb{I} - \vec{r}'_{\text{CM}} \vec{r}'^{t}_{\text{CM}} \right]$$

Cuando esto se aplica a un momento de inercia principal, este se escribe como:

$$I_{0'} = I_{CM} + Md^2$$

Donde d es la distancia desde el punto O' al centro de masas del sistema. (Acá los I_O son momentos de inercia y no matrices como en la primera expresión).

Importante: Para poder utilizar este teorema, es necesario que los ejes de giro sean paralelos de lo contrario el teorema no funciona.

3.3. Lagrangiano de un Sólido Rígido

Podemos escribir el lagrangiano de un sólido rígido como

$$L = K - U$$

,

donde U es la energía potencial del problema y K será la energía cinética que podemos escribir como:

$$K = \frac{1}{2} m V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t I_{cm} \vec{\Omega}$$

con V_{cm} la velocidad del centro de masas, I_{cm} el momento de inercia con respecto al centro de masas y $\vec{\Omega}$ la velocidad angular.