

Considere un disco de radio a y densidad superficial de masa $\sigma(r) = \sigma_0 \cdot \frac{r}{a} \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right)$

i) Calcule el momento de inercia del disco en torno al eje principal, perpendicular al disco.

ii) Demuestre que para cualquier lámina se cumple que $I_z = I_x + I_y$ (donde los ejes x y y están en el plano del disco).

Nota: Escriba explícitamente I_z en coordenadas

Cartesianas y utilice que $\sigma = \sigma(x, y)$

iii) Evalúe I_x e I_y para el disco dado.

$$\vec{r} = x\vec{x} + y\vec{y}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r \cos \theta ; y = r \sin \theta$$

$$i) I_{zz} = \int_0^{2\pi} \int_0^a (r^2 - \cancel{r_z^2}) \sigma_0 \frac{r}{a} r dr d\theta \quad \text{usando polares}$$

$$= \frac{\sigma_0}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^4 dr d\theta$$

$$= \frac{\sigma_0}{a} 2\pi \frac{a^5}{5} = \frac{2}{5} \pi \sigma_0 a^4$$

ii) Para un caso general considerando coordenadas cartesianas para una lamina arbitraria que vive en el plano x, y, donde z es perpendicular a este plano, con ello tenemos que:

$$I_{zz} = \int_{\text{lamina}} (x^2 + y^2) - \cancel{z^2}^0 \sigma(x, y) dx dy$$

$$= \int_{\text{lamina}} (x^2 + y^2) \sigma(x, y) dx dy$$

$$= \underbrace{\int_{\text{lamina}} x^2 \sigma(x, y) dx dy}_{I_{xx}} + \underbrace{\int_{\text{lamina}} y^2 \sigma(x, y) dx dy}_{I_{yy}}$$

$$\therefore I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$$

iii)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \vec{r} = r \cos \theta \hat{x} + r \sin \theta \hat{y}$$

$$I_{yy} = \int_0^{2\pi} \int_0^a (r^2 - r^2 \sin^2 \theta) \frac{\sigma_0}{a} r^2 dr d\theta$$

$$= \frac{\sigma_0}{a} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \int_0^a r^4 dr$$

$$= \frac{\sigma_0}{a} \pi \frac{a^5}{5} = \frac{\pi \sigma_0 a^4}{5}$$

$$I_{xx} = \int_0^{2\pi} \int_0^a (r^2 - r^2 \cos^2 \theta) \frac{\sigma_0}{a} r^2 dr d\theta$$

$$= \frac{\sigma_0}{a} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^a r^4 dr$$

$$= \frac{\sigma_0}{a} \pi \frac{a^5}{5} = \frac{\pi \sigma_0 a^4}{5}$$

$$I_{zz} = \frac{2}{5} \pi \sigma_0 a^4 = \underbrace{\frac{\pi \sigma_0 a^4}{5}}_{I_{xx}} + \underbrace{\frac{\pi \sigma_0 a^4}{5}}_{I_{yy}}$$