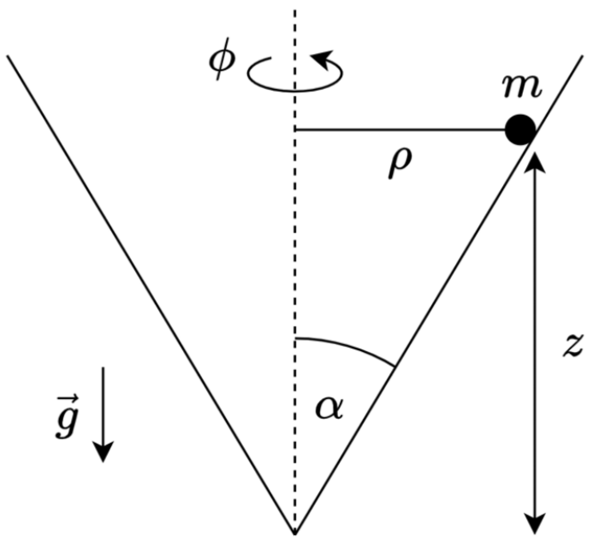
1. Una partícula de masa m se desliza en contacto con la superficie interior (lisa) de un cono de semiángulo α. EL vértice del cono se encuentra en el origen y el eje del mismo apunta verticalmente hacia arriba. La única fuerza que actúa sobre la partícula, además de las fuerzas de restricción, es la fuerza de gravedad.

   a) Escriba las ecuaciones de movimiento utilizando como coordenadas la distancia horizontal ρ desde la partícula hacia al eje, el ángulo ϕ medido sobre un círculo horizontal alrededor del cono y la altura hacia el plano del origen z. Para esto, exprese el Lagrangiano en función de ρ, ϕ y z.

   b) Encuentre las cantidades conservadas durante el movimiento y su significado físico.

   c) Analice el movimiento por el método del potencial efectivo.

   d) Encuenctre las condiciones para que la partícula se mueva en un círculo horizontal.



a) $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \longrightarrow \vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$, por geometría $z = \rho\cot(\alpha)$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2\cot^2(\alpha))$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2(1 + \cot^2(\alpha)) + \rho^2\dot{\phi}^2) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2(\alpha)} + \rho^2\dot{\phi}^2\right)$$

$$U = mgz = mg\rho\cot(\alpha)$$

$$\boxed{\mathcal{L} = K - U = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2(\alpha)} + \rho^2\dot{\phi}^2\right) - mg\rho\cot(\alpha)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = 0 \quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{\dot{\rho}}{\sin^2(\alpha)}\right) - m(\rho\dot{\phi}^2 - g\cot(\alpha)) = 0$$

$$m\frac{\ddot{\rho}}{\sin^2(\alpha)} - m(\rho\dot{\phi}^2 - g\cot(\alpha)) = 0$$

$$\ddot{\rho} = \sin^2(\alpha)(\rho\dot{\phi}^2 - g\cot(\alpha))$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) - \cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}}^{0} = 0 \quad \frac{d}{dt}(\underbrace{m\rho^2\dot{\phi}}_{\text{cte}}) = 0 \longrightarrow m\rho^2\dot{\phi} = m\rho_0^2\dot{\phi}_0 = l_0$$

b) Lagrangiano no depende de $\phi \rightarrow m\rho^2\dot{\phi} = cte$ ∴ se conserva momento angular

Lagrangiano no depende de $t \rightarrow E = K + U = cte$ ∴ se conserva energía

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2(\alpha)} + \rho^2\dot{\phi}^2\right) + mg\rho\cot(\alpha)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m\dot{\rho}\ddot{\rho}}{\sin^2(\alpha)} + \frac{1}{2}m\cdot(2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\ddot{\phi}\rho^2) + mg\dot{\rho}\cot(\alpha) = \frac{m\dot{\rho}\ddot{\rho}}{\sin^2(\alpha)} + m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}^2 + m\dot{\phi}\ddot{\phi}\rho^2 + mg\dot{\rho}\cot(\alpha)$$

$$= \frac{m\dot{\rho}}{\cancel{\sin^2(\alpha)}}\cancel{\sin^2(\alpha)}(\rho\dot{\phi}^2 - g\cot(\alpha)) + m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}^2 + m\dot{\phi}\ddot{\phi}\rho^2 + mg\dot{\rho}\cot(\alpha)$$

$$= m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}^2 - \cancel{m\dot{\rho}g\cot(\alpha)} + m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}^2 + m\dot{\phi}\ddot{\phi}\rho^2 + \cancel{mg\dot{\rho}\cot(\alpha)}, \quad \dot{\phi} = \frac{l_0}{m\rho^2} \rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{2l_0}{m\rho^3}\dot{\rho} = -\frac{2\dot{\rho}}{\rho}\dot{\phi}$$

$$= 2m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}^2 + m\rho^2\dot{\phi}\ddot{\phi} = 2m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}^2 + m\rho^2\dot{\phi}\cdot -\frac{2\dot{\rho}}{\rho}\dot{\phi} = \cancel{2m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}^2} - \cancel{2m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}}\dot{\phi} = 0$$ ∴ si se conserva

c) Como se conserva momento angular $l = m\rho^2\dot{\phi} \rightarrow \dot{\phi} = l/m\rho^2$

$$E = K + U_{eff}(\rho) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2(\alpha)} + \rho^2\dot{\phi}^2\right) + mg\rho\cot(\alpha) = \frac{m}{2\sin^2(\alpha)}\dot{\rho}^2 + U_{eff}(\rho)$$

$$U_{eff} = \frac{m}{2}\rho^2\dot{\phi}^2 + mg\rho\cot(\alpha) = \frac{l^2}{2m\rho^2} + mg\rho\cot(\alpha)$$

Análisis?

d) Para mov. circular, $\dot{\rho} = 0 \rightarrow E = U_{eff}$. Se debe cumplir $U'_{eff} = 0$ y $U''_{eff} > 0$

$$U'_{eff} = \frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{l^2}{\cancel{2}m}\cdot -\frac{\cancel{2}}{\rho^3} + mg\cot(\alpha) = 0 \rightarrow l_0^2 = m^2\rho_0^3 g\cot(\alpha)$$

$$U''_{eff} = \left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{eq} = \frac{3l_0^2}{m\rho_0^4} = \frac{3m^2\rho_0^3\cot(\alpha)}{m\rho_0^4} > 0 \rightarrow \boxed{\cot(\alpha) > 0}$$