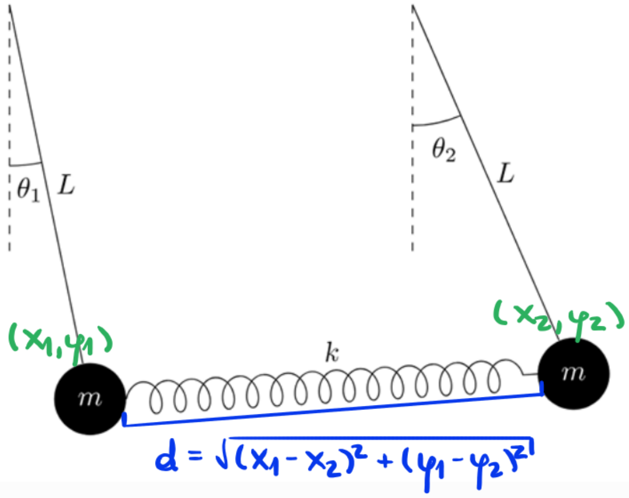
1. Se tienen 2 péndulos simples acoplados por medio de un resorte de constante k y largo natural l_0, que es la misma distancia que tienen los péndulos cuando están en su posición de equilibrio $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Para este sistema:

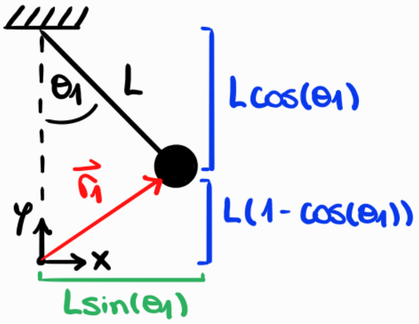
   a) Obtenga el Lagrangiano.

   b) Suponga pequeñas oscilaciones y con eso, asuma que el resorte siempre está horizontal. Obtenga el Lagrangiano para pequeñas oscilaciones. Obtenga las ecuaciones de movimiento y construya el sistema de ecuaciones de manera matricial.

   c) Calcule las frecuencias propias y modos normales. Interprete.



a) Tomando como origen del sistema de referencia la posición de equilibriio del péndulo de la izquierda, las posiciones de cada uno serán:



$$\vec{r}_1 = L\sin(\theta_1)\hat{x} + L(1-\cos(\theta_1))\hat{y}$$

$$\vec{r}_2 = (L\sin(\theta_2) + l_0)\hat{x} + L(1-\cos(\theta_2))\hat{y}$$

Posición de equilibrio sólo se desplaza l_0 en $\hat{x}$

Teniendo esto en cuenta, el Lagrangiano estará dado por:

$$\mathcal{L} = K - U = K - (U_g + U_K)$$

$$K = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$U_g = mg(y_1 + y_2) = mg(2 - \cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))$$

$$U_K = \frac{1}{2}K\Delta^2 = \frac{1}{2}K(d - l_0)^2 = \frac{1}{2}K\left(\sqrt{(l_0 + L(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)))^2 + L^2(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))^2} - l_0\right)^2$$

b) Para pequeñas oscilaciones, se hacen los supuestos:

$$\theta_i = \cancel{\theta_q}^{\circ} + \delta\theta \longrightarrow \sin(\theta_i) = \delta\theta_i \ \wedge \ \cos(\theta_i) = 1 - \frac{\delta\theta_i^2}{2}$$

Aplicando esto al Lagrangiano resulta:

$$K = \frac{1}{2}mL^2(\delta\dot{\theta}_1^2 + \delta\dot{\theta}_2^2)$$

$$U_g = mg\left(2 - \left(1 - \frac{\delta\theta_1^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{\delta\theta_2^2}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}mg(\delta\theta_1^2 + \delta\theta_2^2)$$

$$U_K = \frac{1}{2}K\left(\sqrt{(l_0 + L(\delta\theta_2 - \delta\theta_1))^2 + L^2\cancel{\left(\frac{\delta\theta_2^2}{2} - \frac{\delta\theta_1^2}{2}\right)^2}} - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}KL^2(\delta\theta_2 - \delta\theta_1)^2$$

$$\mathcal{O}(\delta\theta_i^4)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mL^2(\delta\dot{\theta}_1^2 + \delta\dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}mg(\delta\theta_1^2 + \delta\theta_2^2) - \frac{1}{2}KL^2(\delta\theta_2 - \delta\theta_1)^2$$

Considerando que solo existe movimiento horizontal: $(\delta x_i = L\delta\theta_i)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\delta\dot{x}_1^2 + \delta\dot{x}_2^2) - \frac{mg}{2l}(\delta x_1^2 + \delta x_2^2) - \frac{K}{2}(\delta x_2 - \delta x_1)^2$$

Se obtienen las ecuaciones de movimiento con Euler-Lagrange:

$\delta x_1\rfloor \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \delta\dot{x}_1}\right) = m\delta\ddot{x}_1 \wedge \frac{\partial L}{\partial \delta x_1} = -\frac{mg}{l}\delta x_1 + K(\delta x_2 - \delta x_1)$

$\delta x_2\rfloor \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \delta\dot{x}_2}\right) = m\delta\ddot{x}_2 \wedge \frac{\partial L}{\partial \delta x_2} = -\frac{mg}{l}\delta x_2 - K(\delta x_2 - \delta x_1)$

$$m\delta\ddot{x}_1 + \left(\frac{mg}{l} + K\right)\delta x_1 - K\delta x_2 = 0$$

$$m\delta\ddot{x}_2 + \left(\frac{mg}{l} + K\right)\delta x_2 - K\delta x_1 = 0$$

Se plantea el sistema de forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{\hat{M}}\begin{pmatrix} \delta\ddot{x}_1 \\ \delta\ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{mg}{l} + K & -K \\ -K & \frac{mg}{l} + K \end{pmatrix}}_{\hat{V}}\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \hat{M}\ddot{\vec{\delta x}} + \hat{V}\vec{\delta x} = 0 //$$

c) Para que el sistema oscile, usamos el ansatz $\vec{\delta x} = \vec{A}e^{j\omega t} \rightarrow \ddot{\vec{\delta x}} = -\omega^2\vec{\delta x}$
Con esto queda:

$$\hat{M}\ddot{\vec{\delta x}} + \hat{V}\vec{\delta x} = 0 \rightarrow -\hat{M}\omega^2\vec{\delta x} + \hat{V}\vec{\delta x} = 0 \rightarrow (\hat{V} - \omega^2\hat{M})\vec{\delta x} = 0$$

Una vez se tiene de esta forma, las frecuencias propias se obtendrán para al imponer que el determinante de la matriz $(\hat{V} - \omega^2\hat{M})$ sea 0 (para que las soluciones sean no triviales):

$$\det\begin{pmatrix} \frac{mg}{l} + K - \omega^2 m & -K \\ -K & \frac{mg}{l} + K - \omega^2 m \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{mg}{l} + K - \omega^2 m\right)^2 - K^2 = 0 \rightarrow \frac{mg}{l} + K - \omega^2 m = \pm K$$

$$\therefore \omega_+^2 = \frac{g}{l} \wedge \omega_-^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m} //$$

Luego, los modos normales serán los vectores propios asociados a cada una de las frecuencias:

$$\omega_+^2 = g/l \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \delta x_1 = \delta x_2 \longrightarrow V_+ = C_+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oscilan juntos!!!

$$\omega_-^2 = g/l + 2K/m \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} -K & -K \\ -K & -K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \delta x_1 = -\delta x_2 \longrightarrow V_- = C_-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Oscilan en sentido contrario!!!

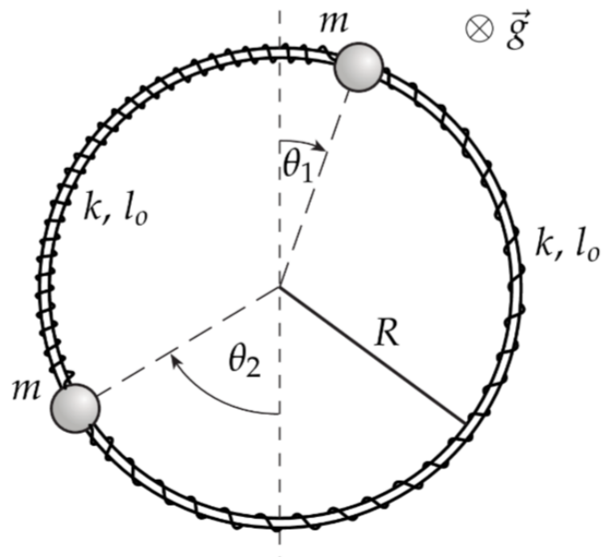
2. Dos masas iguales que deslizan sin roce por un riel circunferencial de radio R se encuentran acopladas por dos resortes iguales de constante elástica k y largo natural l_0.

   a) Escriba las ecuaciones de movimiento.

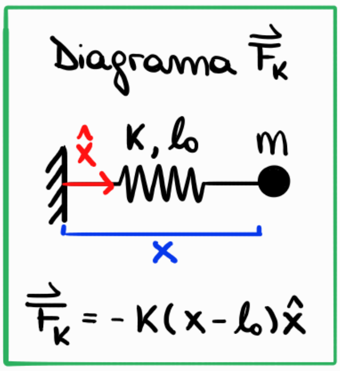
   b) Determine los puntos de equilibrio del sistema.

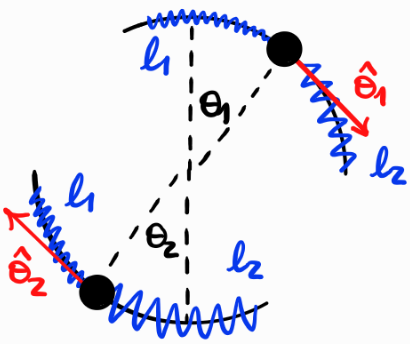
   c) Calcule las frecuencias propias y modos normales de oscilación.

   d) Imagine el sistema se encuentra originalmente en reposo. En $t = 0$ una de las masas es golpeada, quedando con velocidad v_0. Encuentre $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ para $t > 0$.



a) Vemos cómo actúan las fuerzas de los resortes sobre cada una de las masas para obtener las ecuaciones de movimiento:





$$\vec{F}_1 = K(l_1 - l_0)(-\hat{\theta}_1) + K(l_2 - l_0)(\hat{\theta}_1)$$

$$\vec{F}_2 = K(l_1 - l_0)(\hat{\theta}_2) + K(l_2 - l_0)(-\hat{\theta}_2)$$

$l_1 = R(\pi + \theta_1 - \theta_2)$, $l_2 = R(\pi - \theta_1 + \theta_2)$

La aceleración de cada una de las masas (en coordenadas polares) será:

$$\vec{r}_i = R\hat{\rho}_i \rightarrow \vec{v}_i = R\dot{\theta}_i\hat{\theta}_i \rightarrow \vec{a}_i = -R\dot{\theta}_i^2\hat{\rho}_i + R\ddot{\theta}_i\hat{\theta}_i$$

Luego, por segunda Ley de Newton en los ejes tangenciales:

$$\begin{aligned} mR\ddot{\theta}_1 &= K(\ell_2 - \cancel{\ell_0}) - K(\ell_1 - \cancel{\ell_0}) = KR(2\theta_2 - 2\theta_1) \\ mR\ddot{\theta}_2 &= K(\ell_1 - \cancel{\ell_0}) - K(\ell_2 - \cancel{\ell_0}) = KR(2\theta_1 - 2\theta_2) \end{aligned} \leftrightarrow \begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \frac{2K}{m}\theta_1 - \frac{2K}{m}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 - \frac{2K}{m}\theta_1 + \frac{2K}{m}\theta_2 = 0 \end{aligned}$$

b) Los puntos de equilibrio se consiguen al imponer que las aceleraciones angulares son 0:

$$\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 0 \rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

c) Para obtener las frecuencias propias, se escribe el sistema en forma matricial:

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2K/m & -2K/m \\ -2K/m & 2K/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \ddot{\vec{\theta}} + \Omega^2\vec{\theta} = \vec{0}$$

$$\vec{\theta} = Ae^{j\omega t} \rightarrow -\omega^2\vec{\theta} + \Omega^2\vec{\theta} = 0 \rightarrow (\Omega^2 - \omega^2 I)\vec{\theta} = \vec{0}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2K/m - \omega^2 & -2K/m \\ -2K/m & 2K/m - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{2K}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{2K}{m}\right)^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{m} \pm \frac{2K}{m} \rightarrow \omega_+^2 = \frac{4K}{m} \wedge \omega_-^2 = 0$$

Luego los modos normales serán los asociados a cada frecuencia:

$$\omega_+^2 = \frac{4K}{m} \Big\lrcorner \begin{pmatrix} -2K/m & -2K/m \\ -2K/m & -2K/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \theta_1 = -\theta_2 \rightarrow \vec{v}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_-^2 = 0 \lrcorner \begin{pmatrix} 2K/m & -2K/m \\ -2K/m & 2K/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \theta_1 = \theta_2 \rightarrow \vec{v}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución general del sistema será una combinaciión ineal entre los modos normales de oscilación, donde cada uno debe resolver la ecuación diferencial planteada inicialmente. Esto es:

$$\vec{\theta}(t) = f_+(t)\vec{v}_+ + f_-(t)\vec{v}_- \ , \ \ddot{f}_+ + \omega_+^2 f_+ = 0 \wedge \ddot{f}_- + \cancel{\omega_-^2 f_-} = 0$$

Resolviendo, se tiene:

$$f_+ = A_+ \sin(\omega_+ t) + B_+ \cos(\omega_+ t) \quad \wedge \quad f_- = A_- + B_- t$$

$$\therefore \vec{\theta}(t) = \left(A_+ \cos(\omega_+ t) + B_+ \sin(\omega_+ t)\right)\vec{v}_+ + \left(A_- + B_- t\right)\vec{v}_-$$

d) Para la configuración dada, las condiciones iniciales son:

$$\begin{matrix} \theta_1(t=0) = 0 & \wedge & \theta_2(t=0) = 0 \\ \dot{\theta}_1(t=0) = \frac{v_0}{R} & \wedge & \dot{\theta}_2(t=0) = 0 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{\theta}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \dot{\vec{\theta}}(t=0) = \begin{pmatrix} v_0/R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando esto al sistema:

$$\vec{\theta}(t=0) = A_+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + A_- \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} A_+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + A_- \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \therefore A_+ = -A_- \\ A_+ \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + A_- \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \therefore A_+ = A_- \end{matrix}$$

$$\therefore A_+ = A_- = 0$$

$$\dot{\vec{\theta}}(t=0) = B_+ \omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B_- \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0/R \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B_+ \omega \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + B_- \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \therefore B_- = B_+ \omega$$

$$B_+ \omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + B_+ \omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = v_0/R \therefore B_+ = \frac{v_0}{\omega_+ R\sqrt{2}}$$

$$\therefore \vec{\theta}(t) = \frac{v_0}{\omega_+ R\sqrt{2}} \sin(\omega_+ t)\vec{v}_1 + \frac{v_0}{R\sqrt{2}} t \, \vec{v}_2$$