1. Un péndulo esférico, a diferencia de un péndulo simple, no se mueve en un plano, sino que en el espacio. Para el sistema de la figura, encuentre:

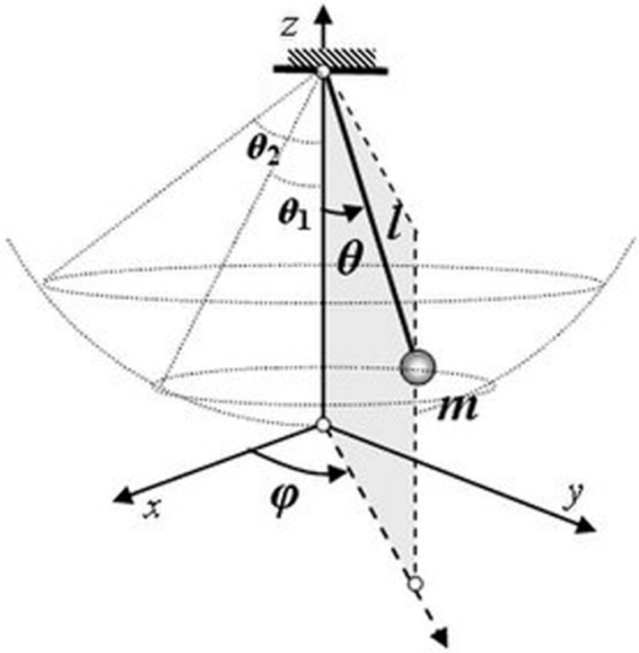

Figura 1: Mono pixeleado

a) El lagrangiano que describe el sistema.

b) Las ecuaciones de movimiento del sistema y sus cantidades conservadas. ¿Qué recupera con $\phi = \phi_0$? Interprete.

c) Obtenga una ecuación diferencial con dependencia solamente de la variable θ.

d) Calcule la energía y con ello reduzca el problema al de una partícula ficticia en un potencial efectivo U_{eff}.

a) Se calcula el Lagrangiano del sistema como $L = K - U$, usando coordenadas esféricas para describir el movimiento de la partícula:

$$\vec{r} = \ell\hat{r} \qquad \vec{v} = \overset{0}{\cancel{\dot{r}}}\hat{r} + \ell\dot{\theta}\hat{\theta} + \ell\sin(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + \ell^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) \qquad U = mgz = -mg\ell\cos(\theta)$$

$$\mathcal{L} = K - U = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + \ell^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) + mg\ell\cos(\theta)$$

b) Para ver las cantidades conservadas del sistema, vemos las dependencias explícitas del Lagrangiano para todas las variables q_i:

- Como no hay dependencia del tiempo, se conserva el hamiltoniano el cual coincide con la Energía.

- Como no hay dependencia de ϕ, se conserva la cantidad:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi}\right) - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}}^{0} = 0 \quad \rightarrow \quad P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} = ml^2 \sin^2(\theta)\dot\phi = cte$$

Utilizando Euler-Lagrange sobre θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(ml^2\dot\theta) - (ml^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot\phi^2 - mgl\sin(\theta)) = 0$$

$$\ddot\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)\dot\phi^2 + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

Si $\phi = \phi_0$ constante, se recupera el péndulo simple:

$$\ddot\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)\cancel{\dot\phi^2}^{0} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot\theta + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

c) Dada la cantidad conservada, se define lo siguiente:

$$h = \frac{P_\phi}{ml^2} \quad \text{constante} \qquad h = \sin^2(\theta)\dot\phi$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento:

$$\ddot\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)\cdot\left(\frac{h^2}{\sin^4(\theta)}\right) + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

$$\ddot\theta - \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)}h^2 + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

d) Se calcula la energía de forma tradicional como $E = K + U$, de forma que aparezca una sola variable para plantear el potencial efectivo:

$$E = K - U = \frac{1}{2}m(l^2\dot\theta^2 + l^2\sin^2(\theta)\dot\phi^2) - mgl\cos(\theta)$$

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\sin^2(\theta)\dot\phi^2 - mgl\cos(\theta)$$

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\sin^2(\theta)\left(\frac{h^2}{\sin^4(\theta)}\right) - mgl\cos(\theta)$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2}_{K_{eff}} + \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\sin^2(\theta)h^2 - mgl\cos(\theta)}_{U_{eff}(\theta)}$$

$$\therefore U_{eff}(\theta) = \frac{1}{2}ml^2\sin^2(\theta)h^2 - mgl\cos(\theta)$$