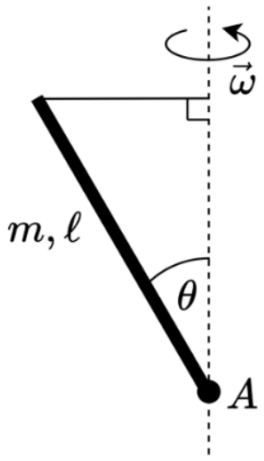
2. Una barra uniforme de masa m y largo ℓ gira con velocidad angular ω alrededor de un eje formando un ángulo θ, tal como se muestra en la figura.. Un extremo de la barra está pivotado en el punto A mientras que el otro está conectado al eje por medio de una cuerda sin masa que permanece tensa y formando un ángulo de 90^o en el punto de contacto con el eje.



a) Calcule la tensión en la cuerda.

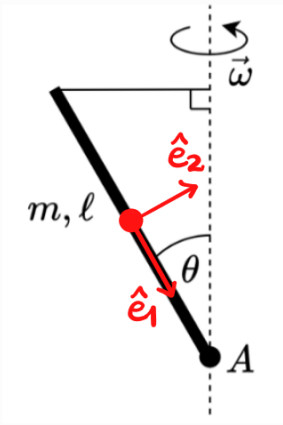
b) Calcule la fuerza que el pivote aplica a la barra.

Nota: No hay gravedad.

a) Abordando el problema mediante el uso de las ecuaciones de Euler para el sólido rígido, se debe definir el sistema de ejes principales centrado en el centro de masa del objeto, y calcular los momentos de inercia respecto a este:

+1

SR ejes principales



$$I_{ij} = \int (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j)\, dm \qquad (e_1, e_2, e_3) \leftrightarrow (x, y, z)$$

$$I_1 = \int (y^2 + z^2) \cdot \frac{m}{\ell} dx = 0 \quad +0{,}4$$

$$I_2 = \int (x^2 + z^2) \cdot \frac{m}{\ell} dx = \frac{m}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx = \frac{m\ell^2}{12} \quad +0{,}4$$

$$I_3 = \int (x^2 + y^2) \cdot \frac{m}{\ell} dx = \frac{m}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx = \frac{m\ell^2}{12} \quad +0{,}4$$

Descomponiendo la velocidad angular de la barra:

$$\vec{\omega} = \omega(-\sin(\theta)\hat{e}_1 + \cos(\theta)\hat{e}_2) \quad +0{,}5$$

Las ecuaciones de Euler resultan:

$$\tau_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2 \omega_3$$

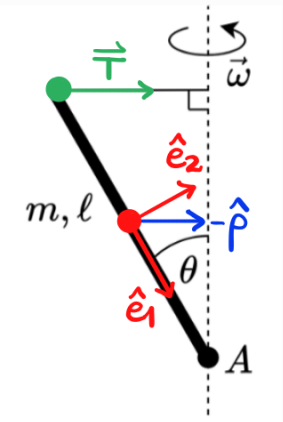
$$\tau_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1 \omega_3$$

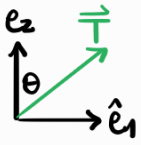
$$\tau_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1 \omega_2$$

La única componente del torque no nula resulta:

$$\tau_3 = -\frac{m\ell^2\omega^2}{12} \sin(\theta)\cos(\theta) \quad +0{,}5$$

Este torque será generado por la tensión de la cuerda y la fuerza que ejerce el pivote. Buscamos determinar los torques generados por cada uno:





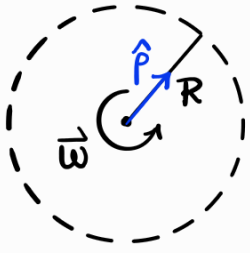
$$\vec{T} = T(\sin(\theta)\hat{e}_1 + \cos(\theta)\hat{e}_2) = -T\hat{\rho}$$

$$\vec{\tau}_{cuerda} = -\frac{\ell}{2}\hat{e}_1 \times T(\sin(\theta)\hat{e}_1 + \cos(\theta)\hat{e}_2)$$

$$= -\frac{\ell T}{2}\cos(\theta)\hat{e}_3$$

+0,5

Se necesita una relación entre la fuerza del pivote y la tensión. Para esto se plantea la Segunda Ley de Newton considerando la aceleración del centro de masa de la barra respecto al eje de rotación:



Trayectoria del centro de masa desde arriba.

$$R = \frac{\ell}{2}\sin(\theta)$$ +0,3

$$\vec{a}_{CM} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\varphi} + \ddot{z}\hat{z}$$

$$= -\frac{\ell\omega^2}{2}\sin(\theta)\hat{\rho}$$ +0,3

Desde esta perspectiva, la tensión se ejerce en la misma dirección (de forma perpendicular hacia el eje). Sin conocer a priori la fuerza que ejerce el pivote sobre la barra, se puede encontrar su torque según:

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{T} + \vec{F}_A \quad \rightarrow \quad \vec{F}_A = m\vec{a}_{CM} - \vec{T} = \left(m\frac{\ell\omega^2}{2}\sin(\theta) - T\right)(-\hat{\rho})$$ +0,4

$$\vec{\tau}_A = \frac{\ell}{2}\hat{e}_1 \times \left(m\frac{\ell\omega^2}{2}\sin(\theta) - T\right)(\sin(\theta)\hat{e}_1 + \cos(\theta)\hat{e}_2) = \left(\frac{m\ell^2\omega^2}{4}\sin(\theta) - \frac{\ell T}{2}\right)\cos(\theta)\hat{e}_3$$ +0,3

Igualando los torques:

$$\tau_3 = \vec{\tau}_{cuerda} + \vec{\tau}_A$$

$$-\frac{m\ell^2\omega^2}{12}\sin(\theta)\cos(\theta) = -\frac{\ell T}{2}\cos(\theta) + \left(\frac{m\ell^2\omega^2}{4}\sin(\theta) - \frac{\ell T}{2}\right)\cos(\theta)$$

$$-\frac{m\ell^2\omega^2}{12}\sin(\theta) = \frac{m\ell^2\omega^2}{4}\sin(\theta) - \ell T$$

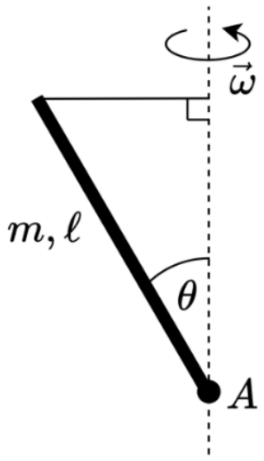
$$-\ell T = m\ell^2\omega^2\sin(\theta)\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore T = \frac{m\ell\omega^2\sin(\theta)}{3}$$ +0,5

b) Teniendo la tensión, la fuerza que ejerce la barra será:

$$\vec{F}_A = m\vec{a}_{CM} - \vec{T} = \left(m\frac{\ell\omega^2}{2}\sin(\theta) - m\frac{\ell\omega^2}{3}\sin(\theta)\right)(-\hat{\rho}) = -m\frac{\ell\omega^2}{6}\sin(\theta)\hat{\rho}$$ +0,5

2. Una barra uniforme de masa m y largo ℓ gira con velocidad angular ω alrededor de un eje formando un ángulo θ, tal como se muestra en la figura.. Un extremo de la barra está pivotado en el punto A mientras que el otro está conectado al eje por medio de una cuerda sin masa que permanece tensa y formando un ángulo de 90^o en el punto de contacto con el eje.



a) Calcule la tensión en la cuerda.

b) Calcule la fuerza que el pivote aplica a la barra.

Nota: No hay gravedad.

a) Tomando como sistema de referencia uno inercial centrado en el pivote, se describe la barra en coordenadas esféricas:

+0,5 SR

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad , \quad r \in [0, \ell]$$

$$\dot{\varphi} = \omega \rightarrow \varphi = \omega t$$

$$\theta = \theta$$

Descomponiendo en coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = \underbrace{r\sin(\theta)\cos(\omega t)}_{x}\hat{x} + \underbrace{r\sin(\theta)\sin(\omega t)}_{y}\hat{y} + \underbrace{r\cos(\theta)}_{z}\hat{z} \quad +0,5$$

El momento angular del sistema estará dado por:

$$\vec{\ell} = I \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad +0,3$$

$$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xz}\,\omega \\ I_{yz}\,\omega \\ I_{zz}\,\omega \end{pmatrix} \quad +0,3$$

$$I_{xz} = \int -xz\,dm = \int_0^{\ell} -r\sin(\theta)\cos(\omega t)\cdot r\cos(\theta)\cdot \frac{m}{\ell}\,dr = -\frac{m\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\omega t)}{\ell}\int_0^{\ell} r^2\,dr$$

$$= -\frac{m\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\omega t)}{\ell}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\ell} = -\frac{m\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\omega t)\,\ell^2}{3} \quad +0,3$$

$$I_{yz} = \int -yz\,dm = \int_0^{\ell} -r\sin(\theta)\sin(\omega t)\cdot r\cos(\theta)\cdot \frac{m}{\ell}\,dr = -\frac{m\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\omega t)}{\ell}\int_0^{\ell} r^2\,dr$$

$$= -\frac{m\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\omega t)}{\ell}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\ell} = -\frac{m\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\omega t)\,\ell^2}{3} \quad +0,3$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\,dm = \frac{m\sin^2(\theta)\,\ell^2}{3} \quad +0,3$$

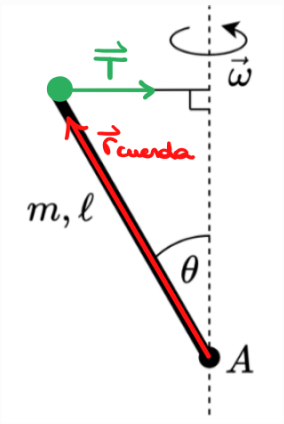
$$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\omega t)\,\ell^2}{3}\omega \\ -\frac{m\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\omega t)\,\ell^2}{3}\omega \\ \frac{m\sin^2(\theta)\,\ell^2}{3}\omega \end{pmatrix} \quad +0,4$$

Y así el torque resulta:

+0,4

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{m\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\omega t)l^2}{3}\omega^2 \\ -\frac{m\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\omega t)l^2}{3}\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{ml^2\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{3}\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este torque es producido únicamente por la tensión de la cuerda:



$$\vec{\tau}_{cuerda} = \vec{r}_{cuerda} \times \vec{F}_{cuerda}$$

$$\vec{r}_{cuerda} = l\hat{r} = l(\sin(\theta)\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\theta)\sin(\omega t)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{z})$$ +0,3

$$\vec{F}_{cuerda} = -T\hat{\rho} = -T(\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y})$$ +0,3

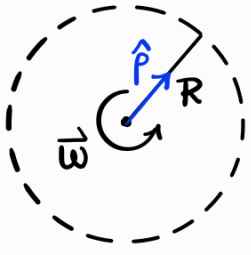
$$\vec{\tau}_{cuerda} = -lT\cos(\theta)(-\sin(\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y})$$ +0,3

Igualando:

$$\frac{ml^2\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{3}\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = lT\cos(\theta)\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T = \frac{ml\omega^2\sin(\theta)}{3}$$ +0,5

b) Se procede de igual manera que lo explicado en la primera resolución de (a) con ecuaciones de Euler para el sólido rígido donde se planteó una relación entre la tensión y la fuerza del pivote por medio de la Segunda Ley de Newton:



Trayectoria del centro de masa desde arriba.

$$R = \frac{l}{2}\sin(\theta)$$ +0,3

$$\vec{a}_{CM} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\varphi} + \ddot{z}\hat{z}$$

$$= -\frac{l\omega^2}{2}\sin(\theta)\hat{\rho}$$ +0,3

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{T} + \vec{F}_A \rightarrow \vec{F}_A = m\vec{a}_{CM} - \vec{T} = (m\frac{l\omega^2}{2}\sin(\theta) - T)(-\hat{\rho})$$ +0,4

$$\vec{F}_A = (m\frac{l\omega^2}{2}\sin(\theta) - m\frac{l\omega^2}{3}\sin(\theta))(-\hat{\rho}) = -m\frac{l\omega^2}{6}\sin(\theta)\hat{\rho}$$

+0,3