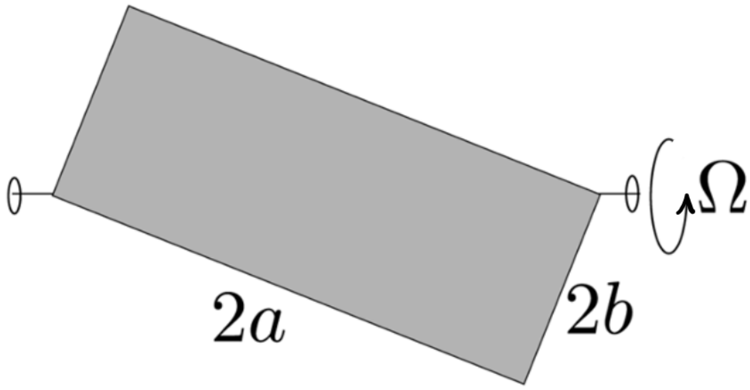
1. Una placa rectangular **delgada y uniforme**, de masa M y lados $2a$ y $2b$ rota con velocidad angular constante $\vec{\Omega}$ en torno a un eje fijo que coincide con una de las diagonales de la placa. Los rodamientos que soportan al eje de rotación están montados en los vértices de la placa como se indica en la figura.

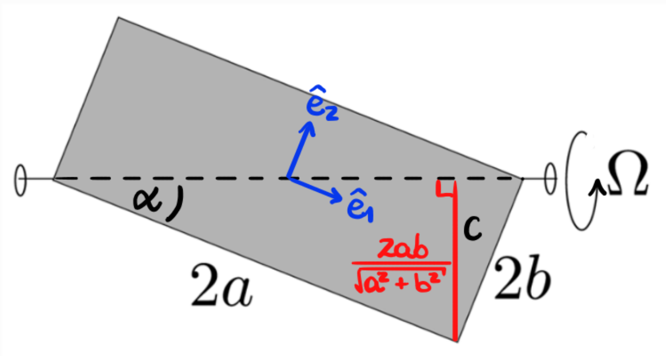


a) Calcule los momentos de inercia de la placa alrededor de sus ejes principales.

b) Calcule la fuerza sobre los rodamientos mientras gira la placa. Nota: Utilice la ecuación:

$$\vec{\tau} = \left(\frac{d\vec{\ell}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{\ell}$$

a) En primer lugar, se deben identificar los ejes principales. Al existir ejes de simetría en la placa, estos serán ejes principales, mientras que el eje restante se tiene por ortogonalidad. De esta forma se tiene:



Los momentos de inercia se obtienen según:

$$I_{ij} = \int (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j)\, dm \,, \quad dm = \frac{M}{4ab} dx dy$$

Al ser componentes principales, sólo se tiene la diagonal.

- $I_1 = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} y^2 \cdot \frac{M}{4ab} dx dy = \frac{M}{4ab} \cdot 2a \int_{-b}^{b} y^2 dy = \frac{M}{2b} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-b}^{b} = \frac{Mb^2}{3}$

- $I_2 = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} x^2 \cdot \frac{M}{4ab} dx dy = \frac{M}{4ab} \cdot 2b \int_{-a}^{a} x^2 dx = \frac{M}{2a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a} = \frac{Ma^2}{3}$

- $I_3 = I_1 + I_2 = \frac{M(a^2+b^2)}{3}$

$$I_{CM} = \frac{M}{3}\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

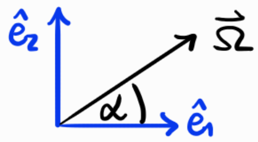
b) La ecuación dada se puede reducir a las ecuaciones de Euler para el sólido rígido, que son aplicables a este problema pues el sistema de ejes principales no es inercial al estar rotando. Estas son:

$$\tau_1 = I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3$$

$$\tau_2 = I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3$$

$$\tau_3 = I_3\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2$$

Donde la velocidad angular *Ω* es del SRNI respecto al SRI. La escribimos en las componentes principales de nuestro sistema de referencia:



$$\vec{\Omega} = \Omega\cos(\alpha)\hat{e}_1 + \Omega\sin(\alpha)\hat{e}_2$$

$$\vec{\Omega} = \Omega\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{e}_1 + \Omega\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{e}_2$$

Notando que *Ω* es constante, las derivadas se anulan. Además, como no hay componente en e_3, los torques 1 y 2 también se anulan quedando:

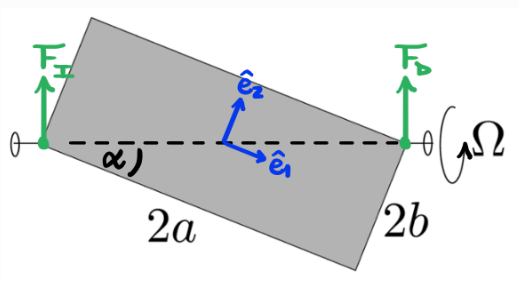
$$\tau_3 = (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2$$

$$\tau_3 = \left(\frac{Ma^2}{3} - \frac{Mb^2}{3}\right)\cdot\Omega\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\Omega\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\tau_3 = \frac{M\Omega^2 ab(a^2-b^2)}{3(a^2+b^2)}$$

Para ver las fuerzas sobre los rodamientos que sostienen la placa en equilibrio, planteamos la Segunda Ley de Newton y calculamos los torques de cada reacción:

$$\vec{F}_I + \vec{F}_D = 0 \rightarrow \vec{F}_I = -\vec{F}_D = \vec{F}$$



$$\vec{\tau}_I = \vec{r}_I \times \vec{F}_I = (-a\hat{e}_1 - b\hat{e}_2)\times F(-\sin(\alpha)\hat{e}_1 + \cos(\alpha)\hat{e}_2)$$

$$= F(-a\cos(\alpha) - b\sin(\alpha))\,\hat{e}_3 = -F\sqrt{a^2+b^2}\,\hat{e}_3$$

$$\vec{\tau}_D = \vec{r}_D \times \vec{F}_D = (a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2)\times -F(-\sin(\alpha)\hat{e}_1 + \cos(\alpha)\hat{e}_2)$$

$$= F(-a\cos(\alpha) - b\sin(\alpha))\,\hat{e}_3 = -F\sqrt{a^2+b^2}\,\hat{e}_3$$

$$\therefore \tau_3 = \tau_I + \tau_D = -2F\sqrt{a^2+b^2}$$

Igualando con lo obtenido anteriormente, se tienen las fuerzas sobre los rodamientos:

$$\tau_3 = \frac{M\Omega^2 ab(a^2-b^2)}{3(a^2+b^2)} = -2F\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow F = -\frac{M\Omega^2 ab(a^2-b^2)}{6(a^2+b^2)^{3/2}}$$

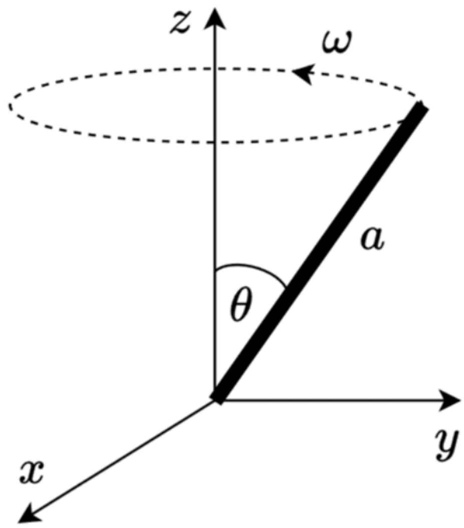
$$\therefore \vec{F}_I = -\frac{M\Omega^2 ab(a^2-b^2)}{6(a^2+b^2)^{3/2}}\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{e}_1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{e}_2\right) = -\vec{F}_D$$

2. Una barra de largo a rota en torno a un eje fijo ($\hat{z}$) con velocidad angular $\omega\hat{z}$ constante, formando un ángulo θ **fijo** con el eje, como se ve en la figura:

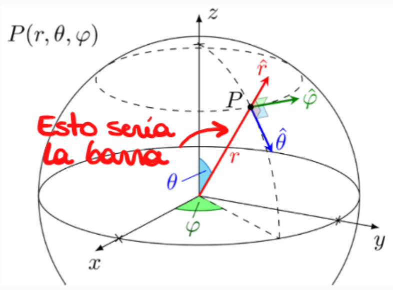
a) Calcule el momento de inercia de la barra en torno al eje de rotación $\hat{z}$.

b) Calcule las componentes del momentum angular en los ejes x, y, z que se indican en la figura (sistema de referencia inercial).

c) Calcule las componentes del torque en el sistema de coordenadas x, y, z.



a) Comenzamos parametrizando la posición de cada partícula que compone la barra en coordenadas esféricas, lo que resulta conveniente pues se tiene información sobre los dos ángulos de dicho sistema de coordenadas:



$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad r \in [0, a]$$

$$\dot{\varphi} = \omega \rightarrow \varphi = \omega t$$

$$\theta = \theta$$

Con esto, la posición en coordenadas cartesianas será:

$$\vec{r} = \underbrace{r\sin(\theta)\cos(\omega t)}_{x}\hat{x} + \underbrace{r\sin(\theta)\sin(\omega t)}_{y}\hat{y} + \underbrace{r\cos(\theta)}_{z}\hat{z}$$

Luego, el momento de inercia respecto al eje z será:

$$I_z = \int r^2 dm, \quad r_{\perp z} = \underbrace{r\sin(\theta)}_{\text{también sale de } (x^2+y^2)} \wedge dm = \frac{M}{a}dr$$

$$I_z = \int_0^a r^2 \sin^2(\theta) \cdot \frac{M}{a} dr = \frac{M\sin^2(\theta)}{a} \int_0^a r^2 dr = \frac{M\sin^2(\theta)}{a} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^a = \frac{M\sin^2(\theta) a^2}{3}$$

b) Para calcular el momento angular en el sistema de referencia inercial, se realiza por definición:

$$\vec{\ell} = I \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xz}\,\omega \\ I_{yz}\,\omega \\ I_{zz}\,\omega \end{pmatrix}$$

Dada la rotación de la barra, para obtener el momento angular es necesario calcular algunos de los momentos de inercia que componen al tensor, mas no todos pues se terminan anulando.

$$I_{xz} = \int -xz\,dm = \int_0^a -r\sin(\theta)\cos(\omega t) \cdot r\cos(\theta) \cdot \frac{M}{a} dr = -\frac{M\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\omega t)}{a} \int_0^a r^2 dr$$
$$= -\frac{M\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\omega t)}{a} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^a = -\frac{M\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\omega t) a^2}{3}$$

$$I_{yz} = \int -yz\,dm = \int_0^a -r\sin(\theta)\sin(\omega t) \cdot r\cos(\theta) \cdot \frac{M}{a} dr = -\frac{M\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\omega t)}{a} \int_0^a r^2 dr$$
$$= -\frac{M\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\omega t)}{a} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^a = -\frac{M\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\omega t) a^2}{3}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\,dm = \frac{M\sin^2(\theta) a^2}{3}$$

De esta forma, las componentes del momento angular serán:

$$\ell_x = -\frac{M\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\omega t) a^2}{3}\omega$$

$$\ell_y = -\frac{M\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\omega t) a^2}{3}\omega$$

$$\ell_z = \frac{M\sin^2(\theta) a^2}{3}\omega$$

c) De igual forma que el momento angular, se calculan las componentes del torque por definición:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

$$\tau_x = \frac{d\ell_x}{dt} = \frac{M\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\omega t) a^2}{3}\omega^2$$

$$\tau_y = \frac{dl_y}{dt} = -\frac{M\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\omega t)\,a^2}{3}\,\omega^2$$

$$\tau_z = \frac{dl_z}{dt} = 0$$