Tres discos

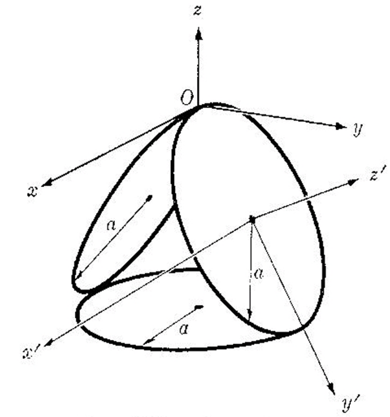
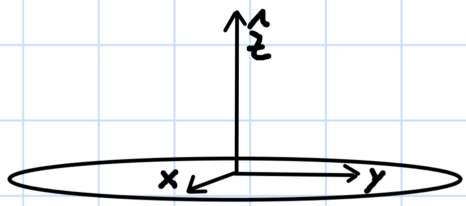


FIG. 10-2.—Tres discos.

Sabemos que

$$I_{\alpha\beta} = \int (r\delta_{ij} - r_\alpha r_\beta)\, dm$$

Para un disco plano



Entonces

$$I_{xx} = \int (x^2\hat{x} + y^2\hat{y} + \cancel{z^2\hat{z}}^{\to 0} - x^2\hat{x})\, dm \quad / \; dm = \sigma \rho\, d\rho\, d\theta$$

↳ dS de cilíndricas en $\hat{z}$

$$I_{xx} = \int y^2 \sigma \rho\, d\rho\, d\theta \,, \quad y = \rho\, \mathrm{sen}(\theta)$$

Si σ cte $\Rightarrow \sigma = \dfrac{M}{\pi R^2} \Rightarrow I_{xx} = \dfrac{M}{\pi R^2} \displaystyle\int \rho^3 \mathrm{sen}^2(\theta)\, d\rho\, d\theta$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(\theta)\, d\theta = \pi \,, \quad \int \rho^3 d\rho = \frac{\rho^4}{4}$$

$$\Rightarrow \quad I_{xx} = \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \pi = \frac{MR^2}{4}$$

En este caso, $R = a \Rightarrow I_{xx} = \frac{Ma^2}{4}$

Analogamente, $I_{yy} = \frac{M}{\pi R^2}\int x^2 \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{M}{\pi R^2}\int \rho^3 \cos^2(\theta) \, d\rho \, d\theta$

$$I_{yy} = \frac{MR^2}{4} = \frac{Ma^2}{4}$$

Finalmente $I_{zz} = \int (x^2\hat{x} + y^2\hat{y} + z^2\hat{z} - z^2\hat{z}) \, dm$

$$\Rightarrow I_{zz} = \int x^2\hat{x} \, dm + \int y^2\hat{y} \, dm = I_{xx} + I_{yy}$$

$$I_{zz} = \frac{MR^2}{2} = \frac{Ma^2}{2}$$

Entonces

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}$$

Que pasaría con I_{xy} por ejemplo?

La ecuación cambia a

$$I_{xy} = -\int xy\,dm = -\frac{M}{\pi R^2}\int \rho^2 \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)\,d\rho\,d\theta$$

$$I_{xy} = -\frac{Ma}{\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)\,d\theta}_{=0}$$

Ocurre lo mismo en las demás componentes.

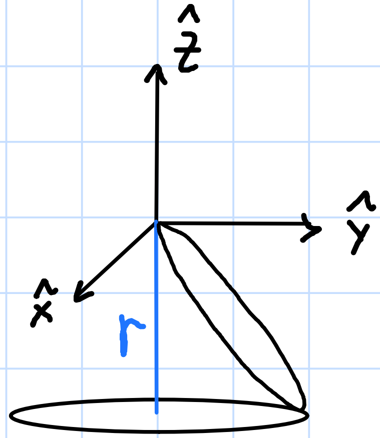
Luego, para obtener el tensor de inercia del disco inferior con respecto al origen O, utilizamos Steiner:

$$I_{inf} = I_{cm} + M(|r^2|\mathbb{1} - r_z^2\hat{z})$$

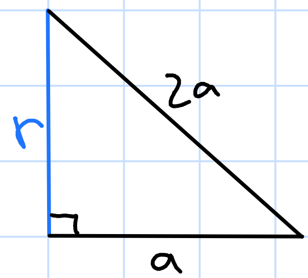
→ identidad

→ Solo se mueve en z

Tenemos que



$\Longrightarrow$



$r = a\sqrt{3}$

Además, solo se traslada en $\hat{z} \Rightarrow r = r_z$

$$\Rightarrow M\left(|r|^2 \mathbb{1} - r_z \hat{z}\right) = M\left(3a^2 \mathbb{1} - 3a^2 \hat{z}\right)$$

Entonces

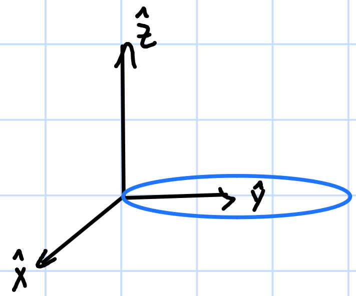
$$I_{int} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4} + M \begin{pmatrix} 3a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_{int} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}$$

Faltan dos, pero con la diferencia que tienen una rotación en su eje de coordenadas c/r al origen O.

Tenemos que está rotado y trasladado, en este caso vamos a trasladar primero.

Si vemos el disco sin rotación, sería tal que el origen se encuentra en un extremo y se trasladó en el eje $\hat{y}$.



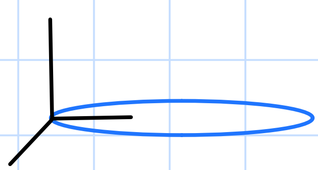
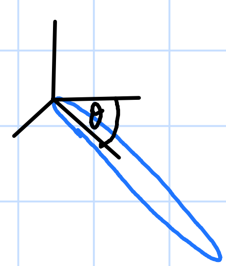
Además, se traslada una distancia a.

Nuevamente, por Steiner: $I_T = I_{cm} + M(|r|^2 \mathbb{1} - r_y^2 \hat{y})$

$$|r| = r_y = a \Rightarrow I_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4} + M \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

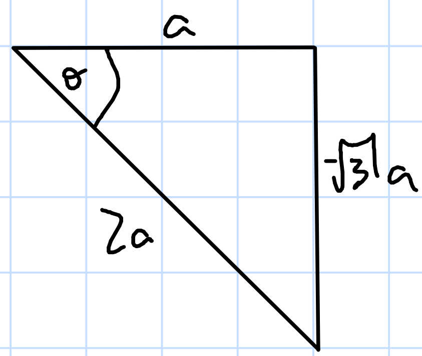
$$I_T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}$$

Nos falta la rotación.

El disco pasa de  a 

$\Rightarrow$ rota en $\theta°$

Por trigonometría



$$\Longrightarrow \operatorname{Sen}(\theta) = \frac{-a\sqrt{3}}{2a} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

Luego, las matrices de rotación son tal que

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, el disco rota en $\hat{x}$, entonces utilizamos R_x.

Finalmente, la inercia del disco es tal que

$$I = R_x I_T R_x^T$$

$$I_T R_x^T = \frac{Ma^2}{4} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{Ma^2}{4} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 3\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

$$R_x I_T R_x^T = \frac{Ma^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 3\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} = \frac{Ma^2}{4}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 19/4 & 5\sqrt{3}/4 \\ 0 & \frac{5\sqrt{3}}{4} & 9/4 \end{pmatrix}$$

$$R_x I_T R_x^T = \frac{Ma^2}{4}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 19/4 & 5\sqrt{3}/4 \\ 0 & \frac{5\sqrt{3}}{4} & 9/4 \end{pmatrix} = I_{der}$$

El disco izquierdo es analogo, con una rotación $\phi = \pi - \theta$ ya que $\theta < 0$

$$\cos(\pi - \theta) = \cos(\pi)\cos(-\theta) - \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(-\theta)$$
$$= -\cos(-\theta) = -1/2$$
$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}(\pi)\cos(-\theta) + \operatorname{sen}(-\theta)\cos(\pi)$$
$$= \operatorname{sen}(\theta) = -\sqrt{3}/2$$

Con esto

$$I_{Izq} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 19/4 & -\frac{5\sqrt{3}}{4} \\ & -\frac{5\sqrt{3}}{4} & 9/4 \end{pmatrix}\frac{Ma^2}{4}$$

Sumando los tres tensores tenemos la inercia total del sistema.

$$I = \begin{pmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{45}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 13/2 \end{pmatrix}\frac{Ma^2}{4}$$

Ahora, si queremos calcular la inercia con respecto al eje y' que pasa por O aplicamos la proyección $I_{y'} = \hat{y}'^T I \hat{y}'$

En este caso, $\hat{y}'$ está dado por la segunda columna de R_x

$$\Rightarrow \hat{y}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Normalizando, (Buscamos un vector unitario) $\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow I_{y'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{45}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 13/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}$$

$$I_{y'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 45/2 \\ -13\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4} = \left(\frac{45}{2} + \frac{39}{2} \right) \frac{Ma^2}{4} = \frac{21}{2} Ma^2 \,//$$